ЗАДАЧИ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОЙ ГОРОДСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

Второй тур, 9-11 классы

9 класс

49. Все клетки доски 10×10 покрашены в белый цвет. Федя и Юра по очереди (начинает Федя) перекрашивают по одной белой клетке в черный цвет. Проигрывает тот, после чьего хода на доске не останется двух соседних по стороне белых клеток. Кто выигрывает при правильной игре? (*А. Храбров*)

50. Назовем квадратный трехчлен *хорошим*, если он имеет два различных вещественных корня, а его коэффициенты — попарно различные числа. Существуют ли 10 таких положительных чисел, что найдутся 500 хороших квадратных трехчленов, все коэффициенты которых содержатся среди этих чисел? (*Ф. Петров*)

51. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ $AB = BC$, $CD = DE$ и $\angle A = \angle C = \angle E < 90^\circ$. Докажите, что этот пятиугольник — описанный. (*Ф. Бахарев*)

52. a, b и c — натуральные числа, для которых

$$(a^2 - 1, b^2 - 1, c^2 - 1) = 1\,.$$

Докажите, что

$$(ab + c, bc + a, ca + b) = (a, b, c)\,.$$

(Как обычно, (x, y, z) обозначает наибольший общий делитель чисел x, y и z.) (*А. Голованов*)

53. Точки A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB треугольника ABC. На средних линиях C_1B_1 и A_1B_1 отмечены точки E и F соответственно так, что прямая BE содержит биссектрису угла AEB_1, а прямая BF — биссектрису угла CFB_1. Докажите, что биссектрисы углов ABC и FBE совпадают. (*Ф. Бахарев*)

54. Решите в натуральных числах уравнение $k^m + m^n = k^n + 1$. (*В. Франк, Ф. Петров*)

55. В международной олимпиаде участвует 300 школьников. Каждый школьник разговаривает ровно на двух из шести официальных языков олимпиады, а каждым языком владеет ровно сто школьников (известно, что школьники разговаривают только на официальных языках). Докажите, что организаторы могут так рассадить участников за круглым столом, чтобы никакие два соседа не говорили на одном языке. (*Ю. Лифшиц*)

10 класс

56. Квадратные трехчлены f и g с целыми коэффициентами принимают только положительные значения и $\frac{f(x)}{g(x)} \geqslant \sqrt{2}$ при всех вещественных x. Докажите, что $\frac{f(x)}{g(x)} > \sqrt{2}$ при всех вещественных x. (*А. Храбров*)

57. Компьютер "Intel Пень-V" умеет выполнять с числом только одну операцию: он прибавляет к нему 1, а затем в полученном числе переставляет все нули в конец, а остальные цифры — как угодно (например, из числа 1004 он может получить 1500 или 5100). В компьютер ввели число 12345, и после выполнения 400 операций на экране оказалось число 100000. Сколько раз за это время на экране компьютера появлялось число, оканчивающееся на нуль?

58. Точка O — центр вписанной окружности треугольника ABC, точка D — середина стороны AB. Известно, что угол AOD — прямой. Докажите равенство $AB + BC = 3AC$. (*С. Иванов*)

59. Из таблицы 20×20 вырезали прямоугольники $1\times20, 1\times19, \ldots,$ 1×1. Докажите, что из оставшейся части таблицы можно вырезать еще 36 прямоугольников 1×2. (*С. Берлов*)

60. На биссектрисе AL треугольника ABC выбрана точка K, причем $\angle BKL = \angle KBL = 30^\circ$. Прямые AB и CK пересекаются в точке M, а прямые AC и BK — в точке N. Найдите угол AMN. (*Д. Ширяев, С. Берлов*)

61. Для любых натуральных чисел $n > m$ докажите неравенство

$$[m, n] + [m + 1, n + 1] > 2m\sqrt{n},$$

где $[x, y]$ — наименьшее общее кратное чисел x и y. (*А. Голованов*)

62. В парламенте страны Альтернативии для любых двух депутатов найдется третий, знакомый ровно с одним из них. Каждый депутат состоит в одной из двух правящих партий. Ежедневно президент приказывает некоторой группе депутатов перейти в другую партию, при этом все депутаты, знакомые хотя бы с одним из депутатов группы, тоже меняют свою партийную принадлежность. Докажите, что президент может добиться того, чтобы все без исключения депутаты Альтернативии перешли в ту партию, которую поддерживает он сам. (Президент не является членом парламента).

(*С. Берлов*)

11 класс

63. Существуют ли такие различные числа x, y, z из $[0, \pi/2]$, что шесть чисел $\sin x$, $\sin y$, $\sin z$, $\cos x$, $\cos y$ и $\cos z$ можно разбить на три двойки с равными суммами.

64. В стране 2000 городов и полностью отсутствуют дороги. Докажите, что можно соединить дорогами некоторые города так, чтобы из двух городов выходило по одной дороге, из двух — по две дороги, из двух — по три, ... , из двух — по 1000 дорог. (*Ф. Бахарев*)

65. Точки A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB остроугольного треугольника ABC. На средних линиях C_1B_1 и A_1B_1 отмечены точки E и F так, что прямая BE содержит биссектрису угла AEB_1, а прямая BF — биссектрису угла CFB_1. Докажите, что углы BAE и BCF равны. (*Ф. Бахарев*)

66. Для любых натуральных чисел $n > m$ докажите неравенство

$$[m, n] + [m + 1, n + 1] > \frac{2mn}{\sqrt{n - m}},$$

где $[x, y]$ — наименьшее общее кратное чисел x и y. (*А. Голованов*)

67. Точка I — центр окружности, вписанной в остроугольный треугольник ABC, а точка H — ортоцентр этого треугольника. Точка M — середина меньшей дуги AC описанной окружности треугольника ABC. Оказалось, что $MI = MH$. Найдите угол $\angle ABC$.

(*Ф. Бахарев*)

68. Найдите все такие функции $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, что для любых целых x и y выполняется соотношение $f(x + y + f(y)) = f(x) + 2y$.

(*Ф. Петров*)

69. Из таблицы 20×20 вырезали прямоугольники $1 \times 20, 1 \times 19, \ldots, 1 \times 1$. Докажите, что наибольшее количество прямоугольников 1×2, которое заведомо можно вырезать из оставшейся части таблицы равно 85.