ЗАДАЧИ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОЙ ГОРОДСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

Отборочный тур

9–10 классы

70. В таблице 10×10 написаны натуральные числа, не превосходящие 10. При этом числа в любых двух соседних по стороне или углу клетках взаимно просты. Докажите, что какое-то число встречается в таблице не менее 17 раз. (*Ю. Лифшиц*)

71. Биссектрисы углов A и B выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P, а биссектрисы углов C и D — в точке Q, отличной от P. Прямая PQ проходит через середину стороны AB. Докажите, что $\angle ABC = \angle BAD$ или $\angle ABC + \angle BAD = 180°$.

72. Существуют ли такие квадратные трехчлены f и g с единичными старшими коэффициентами, что для любого целого n число $f(n)g(n)$ — целое, а числа $f(n)$, $g(n)$ и $f(n) + g(n)$ — нецелые? (*А. Храбров*)

73. На плоскости отмечены 10 точек, занумерованных числами от 1 до 10. Можно выбрать любую прямоугольную систему координат и выписать в ряд номера точек в порядке возрастания их первых координат (при условии, что все первые координаты различны). Какое наибольшее количество перестановок чисел от 1 до 10 может получиться таким способом из одного набора точек на плоскости? (*С. Иванов*)

74. На доске написано натуральное число. Два игрока ходят по очереди, и каждый своим ходом заменяет написанное на доске число n числом $n - 1$ или $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ (квадратные скобки обозначают целую часть). Выигрывает тот, кто первым напишет на доске число 1. Кто выиграет при правильной игре: начинающий или его партнер, если в начале игры число на доске равно 1 000 000? (*О. Ванюшина*)

75. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точка K такова, что описанные окружности треугольников BHK и CHK касаются прямой BC. Точка D — основание высоты, опущенной из вершины B на сторону AC. Докажите, что точка A равноудалена от прямых KB и KD. (*С. Берлов*)

76. Пусть n, m и k — натуральные числа, причем $n > 1$. Докажите, что $(\sigma(n))^k \neq n^m$, где $\sigma(n)$ — сумма всех натуральных делителей числа n. (*Н. Филонов*)

77. В шахматном клубе посетители могут играть в шахматы друг с другом или с компьютером. Вчера в клубе было n человек, каждый из них сыграл не более n партий, и любые двое, не игравшие друг с другом, сыграли в сумме не более n партий. Докажите, что всего было сыграно не более $\frac{n(n+1)}{2}$ партий. (*А. Федотов*)

11 класс

78. См. задачу 70.

79. См. задачу 72.

80. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что наибольший простой делитель числа $n^4 + 1$ больше $2n$.

81. Внутри остроугольного треугольника ABC выбираются произвольная точка M такая, что $\angle AMC + \angle ABC = 180°$. Прямые AM и CM пересекают стороны BC и BA соответственно в точках D и E. Докажите, что описанные окружности треугольника BDE проходит через некоторую фиксированную точку, не зависящую от выбора точки M (отличную от B). (*Ф. Петров*)

82. См. задачу 74.

83. Даны вещественные числа x_1, x_2, ... , x_{10} из отрезка $[0, \pi/2]$, сумма квадратов синусов которых равна 1. Докажите неравенство

$$3(\sin x_1 + \sin x_2 + \cdots + \sin x_{10}) \leqslant \cos x_1 + \cos x_2 + \cdots + \cos x_{10}.$$

(*А. Храбров*)

84. Дан выпуклый 2000-угольник M, наибольшее из расстояний между его вершинами равно 1. Известно, что площадь любого выпуклого 2000-угольника, наибольшее из расстояний между вершинами которого равно 1, не превосходит площади многоугольника M. Докажите, что у многоугольника M есть две перпендикулярные диагонали. (*Ф. Бахарев*)

85. Натуральные числа a и b не равны 1. Последовательность $\{x_n\}$ задана начальными условиями $x_0 = 0$ и $x_1 = 1$ и соотношениями ($n \in \mathbb{N}$)

$$x_{2n} = ax_{2n-1} - x_{2n-2}\,,$$
$$x_{2n+1} = bx_{2n} - x_{2n-1}\,.$$

Докажите, что при любых натуральных m и n произведение

$$x_{n+m} \cdot x_{n+m-1} \cdot \ldots \cdot x_{n+1} \quad \text{делится на } x_m \cdot x_{m-1} \cdot \ldots \cdot x_1.$$

(*Ю.Певцова*)