ЗАДАЧИ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОЙ ГОРОДСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

Первый тур

6 класс

1. Можно ли из полосок 1×1, 1×2, ... , 1×13 сложить прямоугольник со сторонами больше 1? (*Ф. Бахарев*)

2. В детский сад завезли карточки для обучения чтению: на некоторых написано "МА", на остальных — "НЯ". Каждый ребенок взял три карточки и стал составлять из них слова. Оказалось, что слово "МАМА" могут сложить из своих карточек 20 детей, слово "НЯНЯ" — 30 детей, а слово "МАНЯ" — 40 детей. У скольки ребят все три карточки одинаковы? (*Р. Семизаров*)

3. Найдите наименьшее пятизначное число, все цифры которого различны, и которое делится на 71 без остатка. (*Жюри 7 класса*)

4. На карте обозначены 4 деревни: A, B, C и D, соединенные тропинками (см. рисунок). В справочнике написано, что на маршрутах A–B–C и B–C–D по 10 колдобин, на маршруте A–B–D — 22 колдобины, а на маршруте A–D–B — 45 колдобин. Туристы хотят добраться из A в D так, чтобы на их пути было как можно меньше колдобин. По какому маршруту им надо идти? Не забудьте доказать, что на указанном Вами маршруте действительно меньше всего колдобин. (*Р. Семизаров*)

7 класс

5. См. задачу 1.

6. Костя задумал натуральное число, перемножил все его цифры и результат умножил на задуманное число. Получилось 1716. Какое число задумал Костя? Найдите все возможные ответы и докажите, что других ответов нет. (*О. Ванюшина и ост.*)

7. Дети гуляют во дворе детского сада. Тех из них, у кого на ногах надето поровну носков, в 5 раз меньше, чем тех, у кого не поровну. Воспитательница велела детям переодеться, и каждый ребенок снял с одной ноги носок и надел его на другую ногу. Теперь тех, у кого носков на ногах поровну, стало в 2 раза меньше, чем тех, у кого не поровну. Могло ли быть так, что в начале прогулки более чем у половины детей на одной ноге было ровно на один носок меньше, чем на другой? (*К. Кохась*)

8. Вдоль правой стороны дороги припарковано 100 машин. Среди них — 30 красных, 20 желтых и 20 розовых мерседесов. Известно, что никакие два мерседеса разного цвета не стоят рядом. Докажите, что тогда какие-то три мерседеса, стоящие подряд, — одного цвета. (*К. Кохась*)

8 класс

9. По кругу расставлены 14 положительных чисел (не обязательно целых). Сумма любых четырех чисел, стоящих подряд, равна 30. Докажите, что каждое из этих чисел меньше 15. (*С. Иванов*)

10. В лавке можно обменять шило на мыло, или 3 мыла на 1 шило, или 1 мыло на 4 шила (но не наоборот). После нескольких обменов у Сережи оказалось столько же шила и мыла, сколько было вначале. Докажите, что количество сделанных обменов делится на 16. (*С. Иванов*)

11. На сторонах AB и BC треугольника ABC с углом $\angle C = 40^\circ$ выбраны точки D и E такие, что $\angle BED = 20^\circ$. Докажите, что $AC + EC > AD$. (*А. Пастор*)

12. Можно ли клетчатый бумажный квадрат 14×14 клеток разрезать “по клеточкам” на несколько прямоугольников, каждый из которых имеет размеры 2×5 или 3×9 клеток? (*Д. Карпов*)

13. Найдите все тройки натуральных чисел x, y, z такие, что $xyz = 170170$ и $x^2y + y^2z + z^2x = xy^2 + yz^2 + zx^2$. (*Ф. Бахарев*)

9 класс

14. В клетках квадратной таблицы 10×10 стоят ненулевые цифры. В каждой строчке и в каждом столбце из всех стоящих там цифр составлено 10-значное число. Может ли оказаться, что из получившихся 20 чисел ровно одно не делится на 3?

(*А. Голованов, Г. Фубини*)

15. По кругу расставлены 120 положительных чисел (не обязательно целых). Сумма любых 35 чисел, стоящих подряд, равна 200. Докажите, что все расставленные числа не превосходят 30.

(*С. Иванов*)

16. Дан остроугольный равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$). E — точка пересечения перпендикуляра к стороне BC, восставленного в точке B, и перпендикуляра к основанию AC, восставленного в точке C. D — точка пересечения перпендикуляра к стороне AB, восставленного в точке A, с продолжением стороны BC. На продолжении основания AC (за точку C) отметили точку F так, что $CF = AD$. Докажите, что $EF = ED$. (*Ф. Бахарев*)

17. Решите систему уравнений в вещественных числах

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + x^2y + y^2x = 40 \\ x^2 + y^2 + x + y = 14 \end{cases}$$

(*А. Храбров*)

18. Федя и Наташа стартуют с одного и того же места и равномерно движутся по прямой линии в одном направлении. Федя спокойно идет, а Наташа бежит. Пробежав 400 своих шагов, Наташа поворачивает обратно. В этот момент Федя начинает считать свои шаги и насчитывает до встречи с Наташей 100 (своих) шагов. Чьи шаги длиннее: идущего Феди или бегущей Наташи? (*Ф. Назаров*)

10 класс

19. $f(x)$ и $g(x)$ — квадратные трехчлены, старшие коэффициенты которых равны единице. Известно, что трехчлен $f(x) + g(x)$ имеет два различных корня, и каждый из этих корней является также корнем уравнения $f(x) - g(x)^3 = 0$. Докажите, что трехчлены $f(x)$ и $g(x)$ равны. (*А. Храбров*)

20. См. задачу 15.

21. Федя и Наташа стартуют с одного и того же места и равномерно движутся по прямой линии в одном направлении. Федя спокойно идет, а Наташа бежит. Пробежав 400 своих шагов, Наташа поворачивает обратно. В этот момент Федя начинает считать свои шаги и насчитывает до встречи с Наташей 100 (своих) шагов. Докажите, что шаги идущего Феди короче шагов бегущей Наташи.

(*Ф. Назаров*)

22. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает серединный перпендикуляр стороны AB в точке X, серединный перпендикуляр стороны AC — в точке Y, а описанную окружность треугольника — в точке Z. Точки A, X, Y, Z лежат на биссектрисе в порядке перечисления. Докажите, что $AX = YZ$. (*С. Берлов*)

23. Можно ли бумажный прямоугольник размера 103×49 разрезать "по клеточкам" на несколько прямоугольников, каждый из которых имеет размеры 7×9, 7×14 или 9×14?

(*Ф. Бахарев, С. Иванов*)

11 класс

24. $\sin x$, $\sin y$, $\sin z$ — возрастающая арифметическая прогрессия. Докажите, что числа $\cos x$, $\cos y$, $\cos z$ не образуют (строго) убывающую арифметическую прогрессию.

(*Д. Ростовский, А. Храбров*)

25. Найдите наименьшее натуральное число, оканчивающееся на 34, делящееся на 34, сумма цифр которого равна 34. (*А. Храбров*)

26. Вещественные числа a_1, a_2, ... , a_{16} расставлены по кругу. При этом сумма любых трех стоящих подряд чисел не меньше 2, а сумма любых пяти стоящих подряд чисел не превосходит 4. Какое наибольшее значение может принимать разность $a_1 - a_2$? (Не забудьте привести пример, когда эта разность достигает наибольшего значения.)

27. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка D так, что $2AD = DC$. E — основание перпендикуляра, опущенного из точки D на отрезок BC, F — точка пересечения отрезков BD и AE. Найдите угол $\angle ADB$, если известно, что треугольник BEF равносторонний. (*Ф. Бахарев*)

28. Можно ли функцию $f(x) = x^3$ представить в виде суммы двух функций, одна из которых — четна, другая — периодическая? (*Ф. Петров*)