



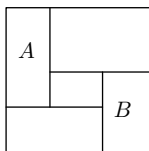
Комитет по образованию Санкт-Петербурга
Санкт-Петербургский государственный университет
Российский государственный педагогический университет
Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных
СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

4 ДЕКАБРЯ 2010 г. I ТУР 6 КЛАСС 1 ВАРИАНТ

1. Приведите пример трехзначного числа, которое не делится на 102, но если его запись повторить 15 раз, то полученное многозначное число будет делиться на 102. Поясните, почему вы считаете, что оно делится на 102.

2. Разрежьте по клеточкам квадрат размером 10×10 клеток на 5 прямоугольных частей по схеме, показанной на рисунке, так, чтобы площадь прямоугольника A была больше площади каждой из остальных частей, и при этом периметр прямоугольника B был больше периметра каждой из остальных частей.



3. На некоторых клетках доски 10×10 стоят шашки. Клетка называется красивой, если на горизонтали, проходящей через эту клетку, стоит нечетное число шашек, и на вертикали, проходящей через ту же клетку, тоже стоит нечетное число шашек. Может ли количество красивых клеток равняться 42?

4. Треть всех мусорных контейнеров города Москина установлена в магазинах, $1/9$ часть — в ресторанах, а остальные — в школах. $2/7$ от общего количества паштета лежит на прилавках магазинов, еще $2/7$ — на тарелках посетителей ресторанов, а остальной паштет поровну распределен по мусорным контейнерам. Во время стихийного нашествия дикие крысы съели 80% всего паштета. Возможно ли, что при этом крысы не притронулись к паштету в школах? Не забудьте обосновать ответ.

Этот листок Вы можете оставить себе на память.

В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:

Фамилия, имя;

Класс, школа, район школы;

Телефон или адрес электронной почты;

Фамилия, имя, отчество преподавателя математики в школе.

ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.

Хотите ли Вы заниматься в кружке математики?

А если уже занимаетесь — Фамилия, имя, отчество преподавателя кружка математики, место занятий.

Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах

www.pdmi.ras.ru/~olymp и www.anichkov.ru/olimpus/matem



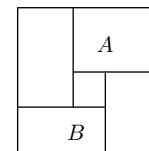
Комитет по образованию Санкт-Петербурга
Санкт-Петербургский государственный университет
Российский государственный педагогический университет
Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных
СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

4 ДЕКАБРЯ 2010 г. I ТУР 6 КЛАСС 2 ВАРИАНТ

1. Приведите пример трехзначного числа, которое не делится на 201, но если его запись повторить 12 раз, то полученное многозначное число будет делиться на 201. Поясните, почему вы считаете, что оно делится на 201.

2. Разрежьте по клеточкам квадрат размером 10×10 клеток на 5 прямоугольных частей по схеме, показанной на рисунке, так, чтобы площадь прямоугольника A была меньше площади каждой из остальных частей, и при этом периметр прямоугольника B был меньше периметра каждой из остальных частей.



3. На некоторых клетках доски 8×8 стоят шашки. Клетка называется красивой, если на горизонтали, проходящей через эту клетку, стоит нечетное число шашек, и на вертикали, проходящей через ту же клетку, тоже стоит нечетное число шашек. Может ли количество красивых клеток равняться 30?

4. Четверть всех мусорных контейнеров города Москина установлена в магазинах, $1/6$ часть — в ресторанах, а остальные — в школах. Треть от общего количества паштета лежит на прилавках магазинов, еще $2/9$ — на тарелках посетителей ресторанов, а остальной паштет поровну распределен по мусорным контейнерам. Во время стихийного нашествия дикие крысы съели 75% всего паштета. Возможно ли, что при этом крысы не притронулись к паштету в школах? Не забудьте обосновать ответ.

Этот листок Вы можете оставить себе на память.

В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:

Фамилия, имя;

Класс, школа, район школы;

Телефон или адрес электронной почты;

Фамилия, имя, отчество преподавателя математики в школе.

ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.

Хотите ли Вы заниматься в кружке математики?

А если уже занимаетесь — Фамилия, имя, отчество преподавателя кружка математики, место занятий.

Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах

www.pdmi.ras.ru/~olymp и www.anichkov.ru/olimpus/matem



Комитет по образованию Санкт-Петербурга
Санкт-Петербургский государственный университет
Российский государственный педагогический университет
Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных
СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

4 ДЕКАБРЯ 2010 г. I ТУР 7 КЛАСС 1 ВАРИАНТ

1. Найдите такое трехзначное число, не делящееся на 102, что если его записать повторить 2010 раз, то полученное многозначное число будет делиться на 102. Поясните, почему вы считаете, что оно делится на 102.

2. Пазл — это картинка, разрезанная на кусочки хитрой формы, среди которых нет одинаковых. Саша, Дима и Федя коллекционируют кусочки пазла “Растишка на Севере”. Если бы у Феде был желтый кусочек с носом Растишки, у Саши был зеленый кусочек с хвостом, а у Димы был синий кусочек с чёлкой, то оказалось бы, что любые два мальчика, собравшись вместе, могли бы из своих кусочков составить картинку целиком. Докажите, что уже сейчас втроем мальчики смогут целиком составить пазл.

3. В школе писали контрольную работу по математике. Одна треть всех школьников плюс еще 20 школьников получили тройки, одна пятая всех школьников плюс еще 15 школьников получили четверки, одна седьмая всех школьников плюс еще 10 школьников получили пятерки, а остальные школьники получили двойки. Сколько школьников получили четверки, если известно, что количество двоек меньше чем количество пятерок?

4. На некоторых клетках доски 10×10 стоят шашки. Клетка называется красивой, если на горизонтали, проходящей через эту клетку, стоит нечетное число шашек, и на вертикали, проходящей через ту же клетку, тоже стоит нечетное число шашек. Может ли количество красивых клеток равняться 42?

Этот листок Вы можете оставить себе на память.

В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:

Фамилия, имя;

Класс, школа, район школы;

Телефон или адрес электронной почты;

Фамилия, имя, отчество преподавателя математики в школе.

ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.

Хотите ли Вы заниматься в кружке математики?

А если уже занимаетесь — Фамилия, имя, отчество преподавателя кружка математики, место занятий.

Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах

www.pdmi.ras.ru/~olymp и www.anichkov.ru/olimpus/matem



Комитет по образованию Санкт-Петербурга
Санкт-Петербургский государственный университет
Российский государственный педагогический университет
Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных
СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

4 ДЕКАБРЯ 2010 г. I ТУР 7 КЛАСС 2 ВАРИАНТ

1. Найдите такое трехзначное число, не делящееся на 201, что если его записать повторить 2010 раз, то полученное многозначное число будет делиться на 201. Поясните, почему вы считаете, что оно делится на 201.

2. Пазл — это картинка, разрезанная на кусочки хитрой формы, среди которых нет одинаковых. Кирилл, Саша и Миша коллекционируют кусочки пазла “Растишка Косолапый”. Сегодня их коллекции пополнились в сумме на 10 кусочков, причем все эти кусочки разные. Теперь любые два мальчика, собравшись вместе, могут из своих кусочков составить картинку целиком. Докажите, что вчера мальчики тоже могли целиком составить пазл, если бы объединили все три свои коллекции.

3. В школе писали контрольную работу по математике. Одна треть всех школьников плюс еще 19 школьников получили тройки, одна пятая всех школьников плюс еще 20 школьников получили четверки, одна седьмая всех школьников плюс еще 8 школьников получили двойки, а остальные школьники получили пятерки. Сколько школьников получили четверки, если известно, что количество пятерок меньше чем количество двоек?

4. На некоторых клетках доски 8×8 стоят шашки. Клетка называется красивой, если на горизонтали, проходящей через эту клетку, стоит нечетное число шашек, и на вертикали, проходящей через ту же клетку, тоже стоит нечетное число шашек. Может ли количество красивых клеток равняться 30?

Этот листок Вы можете оставить себе на память.

В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:

Фамилия, имя;

Класс, школа, район школы;

Телефон или адрес электронной почты;

Фамилия, имя, отчество преподавателя математики в школе.

ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.

Хотите ли Вы заниматься в кружке математики?

А если уже занимаетесь — Фамилия, имя, отчество преподавателя кружка математики, место занятий.

Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах

www.pdmi.ras.ru/~olymp и www.anichkov.ru/olimpus/matem



Комитет по образованию Санкт-Петербурга
Санкт-Петербургский государственный университет
Российский государственный педагогический университет
Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных
СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

4 ДЕКАБРЯ 2010 г. I тур 8 КЛАСС 1 ВАРИАНТ

1. В школе была проведена контрольная работа по математике для всех восьмиклассников. Треть от числа участников и еще 20 учеников получили двойки, четверть от числа участников и ещё 30 учеников получили тройки, а некоторые умные ребята получили четверки. Кого оказалось больше: получивших двойку или получивших тройку?

2. На некоторых клетках доски 10×10 стоят шашки. Клетка называется красивой, если на горизонтали, проходящей через эту клетку, стоит нечетное число шашек, и на вертикали, проходящей через ту же клетку, тоже стоит нечетное число шашек. Может ли на доске оказаться ровно 42 красивые клетки?

3. Четыре человека написали поровну слов. Слово, встречающееся у всех четверых, оценивается в 0 баллов; за слово, которое присутствует у троих участников, каждый из них получает по $1/3$ балла; за слово, встречающееся у двоих, каждый из них получает по 1 баллу. Наконец, за слово, встречающееся лишь у одного участника, этот участник получает 3 балла. Могли ли все участники в сумме набрать ровно 2010 баллов?

4. Точка M — середина стороны AC остроугольного треугольника ABC , AD — его высота. На отрезке BD отмечена такая точка E , что $AM = DE$. На отрезке EM отмечена такая точка F , что $EF = FC$. Докажите, что CF — биссектриса угла C треугольника ABC .

5. Вдоль прямой аллеи растут, чередуясь, 36 берёз и 35 дубов. Расстояния от каждого некрайнего дерева до двух его соседей отличаются ровно в 8 раз. Докажите, что точно посередине аллеи не может расти дуб.

Этот листок Вы можете оставить себе на память.

В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:

ФАМИЛИЯ, ИМЯ;

КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ;

ТЕЛЕФОН ИЛИ АДРЕС ЭЛЕКТРОННОЙ ПОЧТЫ;

ФАМИЛИЯ, ИМЯ, ОТЧЕСТВО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ.

ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.

ХОТИТЕ ЛИ ВЫ ЗАНИМАТЬСЯ В КРУЖКЕ МАТЕМАТИКИ?

А если уже занимаетесь — ФАМИЛИЯ, ИМЯ, ОТЧЕСТВО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ КРУЖКА МАТЕМАТИКИ, МЕСТО ЗАНЯТИЙ.

Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах

www.pdmi.ras.ru/~olymp и www.anichkov.ru/olimpus/matem



Комитет по образованию Санкт-Петербурга
Санкт-Петербургский государственный университет
Российский государственный педагогический университет
Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных
СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

4 ДЕКАБРЯ 2010 г. I тур 8 КЛАСС 2 ВАРИАНТ

1. В школе была проведена контрольная работа по математике для всех восьмиклассников. Треть от числа участников и еще 12 учеников получили тройки, четверть от числа участников и ещё 18 учеников получили двойки, а некоторые умные ребята получили четверки. Кого оказалось больше: получивших двойку или получивших тройку?

2. На некоторых клетках доски 8×8 стоят шашки. Клетка называется красивой, если на горизонтали, проходящей через эту клетку, стоит нечетное число шашек, и на вертикали, проходящей через ту же клетку, тоже стоит нечетное число шашек. Может ли на доске оказаться ровно 30 красивых клеток?

3. Четыре человека написали поровну слов. Слово, встречающееся у всех четверых, оценивается в 0 баллов; за слово, которое присутствует у троих участников, каждый из них получает по $5/3$ балла; за слово, встречающееся у двоих, каждый из них получает по 3 балла. Наконец, за слово, встречающееся лишь у одного участника, этот участник получает 7 баллов. Могли ли все участники в сумме набрать ровно 2010 баллов?

4. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота CH и отмечена середина стороны BC , точка D . На отрезке AH отмечена такая точка E , что $BD = EH$. Биссектриса угла B пересекает отрезок DE в точке F . Докажите, что $BF = FE$.

5. Вдоль прямой аллеи растут, чередуясь, 26 ёлок и 25 сосен. Расстояния от каждого некрайнего дерева до двух его соседей отличаются ровно в 5 раз. Докажите, что точно посередине аллеи не может расти сосна.

Этот листок Вы можете оставить себе на память.

В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:

ФАМИЛИЯ, ИМЯ;

КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ;

ТЕЛЕФОН ИЛИ АДРЕС ЭЛЕКТРОННОЙ ПОЧТЫ;

ФАМИЛИЯ, ИМЯ, ОТЧЕСТВО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ.

ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.

ХОТИТЕ ЛИ ВЫ ЗАНИМАТЬСЯ В КРУЖКЕ МАТЕМАТИКИ?

А если уже занимаетесь — ФАМИЛИЯ, ИМЯ, ОТЧЕСТВО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ КРУЖКА МАТЕМАТИКИ, МЕСТО ЗАНЯТИЙ.

Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах

www.pdmi.ras.ru/~olymp и www.anichkov.ru/olimpus/matem



Комитет по образованию Санкт-Петербурга
Санкт-Петербургский государственный университет
Российский государственный педагогический университет
Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных
СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

4 ДЕКАБРЯ 2010 Г.

I ТУР

9 КЛАСС

1 ВАРИАНТ

1. Дима задумал три числа — a , b и c — и обнаружил, что квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет два различных ненулевых корня: 1 и s . Саша изменил значение одного из коэффициентов a , b или c . В результате получился трехчлен, у которого тоже два различных корня: 2 и $3s$. Чему может быть равно s ? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.

2. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD биссектриса угла B пересекает отрезок AD в точке M . Известно, что $AB = 4$, $BC = 9$ и $CD = 3$. В каком отношении точка M делит отрезок AD ?

3. Три школьника написали поровну слов. Слово, встречающееся у всех троих школьников, оценивается в 0 баллов; за слово, которое присутствует у двоих школьников, каждый из них получает по $7/2$ балла; наконец, слово, встречающееся лишь у одного школьника, стоит 5 баллов. Могли ли школьники в сумме набрать ровно 2011 баллов?

4. Произведение положительных чисел x и y равно 7. Докажите неравенство

$$x^{\lfloor x \rfloor} + y^{\lfloor y \rfloor} \geq 14.$$

(Запись $\lfloor x \rfloor$ обозначает целую часть числа, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x .)

5. На доске в ряд выписаны 10 натуральных чисел. Саша вычислил сумму каждой пары подряд стоящих чисел, затем он вычислил суммы каждых трех подряд стоящих чисел, потом — каждых четырех и т.д.; и наконец, сумму всех чисел на доске. Все найденные суммы, а также 10 исходных чисел с доски, Саша вперемешку записал в тетрадку. Могли у него получиться набор из 55 последовательных натуральных чисел?

Этот листок Вы можете оставить себе на память.
В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:

ФАМИЛИЯ, ИМЯ;
КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ;
ТЕЛЕФОН ИЛИ АДРЕС ЭЛЕКТРОННОЙ ПОЧТЫ;
ФАМИЛИЯ, ИМЯ, ОТЧЕСТВО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ.
ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.
Если Вы занимаетесь в кружке математики —
ФАМИЛИЯ, ИМЯ, ОТЧЕСТВО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ КРУЖКА, МЕСТО ЗАНЯТИЙ.
Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах www.pdmi.ras.ru/~olymp
и www.anichkov.ru/olimpus/matem



Комитет по образованию Санкт-Петербурга
Санкт-Петербургский государственный университет
Российский государственный педагогический университет
Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных
СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

4 ДЕКАБРЯ 2010 Г.

I ТУР

9 КЛАСС

2 ВАРИАНТ

1. Дима задумал три числа — a , b и c — и обнаружил, что квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет два различных ненулевых корня: 1 и t . Саша изменил значение одного из коэффициентов a , b или c . В результате получился трехчлен, у которого тоже два различных корня: 4 и $2t$. Чему может быть равно t ? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.

2. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC биссектриса угла D пересекает отрезок AB в точке M . Известно, что $BC = 5$, $CD = 7$ и $DA = 6$. В каком отношении точка M делит отрезок AB ?

3. Три школьника написали поровну слов. Слово, встречающееся у всех троих школьников, оценивается в 0 баллов; за слово, которое присутствует у двоих школьников, каждый из них получает по $1/2$ балла; наконец, слово, встречающееся лишь у одного школьника, стоит 2 балла. Могли ли школьники в сумме набрать ровно 2012 баллов?

4. Произведение положительных чисел x и y равно 8. Докажите неравенство

$$x^{\lfloor x \rfloor} + y^{\lfloor y \rfloor} \geq 16.$$

(Запись $\lfloor x \rfloor$ обозначает целую часть числа, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x .)

5. На доске в ряд выписаны 12 натуральных чисел. Дима вычислил сумму каждой пары подряд стоящих чисел, затем он вычислил суммы каждых трех подряд стоящих чисел, потом — каждых четырех и т.д.; и наконец, сумму всех чисел на доске. Все найденные суммы, а также 12 исходных чисел с доски, Дима вперемешку записал в тетрадку. Могли у него получиться набор из 78 последовательных натуральных чисел?

Этот листок Вы можете оставить себе на память.
В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:

ФАМИЛИЯ, ИМЯ;
КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ;
ТЕЛЕФОН ИЛИ АДРЕС ЭЛЕКТРОННОЙ ПОЧТЫ;
ФАМИЛИЯ, ИМЯ, ОТЧЕСТВО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ.
ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.
Если Вы занимаетесь в кружке математики —
ФАМИЛИЯ, ИМЯ, ОТЧЕСТВО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ КРУЖКА, МЕСТО ЗАНЯТИЙ.
Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах www.pdmi.ras.ru/~olymp
и www.anichkov.ru/olimpus/matem



Комитет по образованию Санкт-Петербурга
Санкт-Петербургский государственный университет
Российский государственный педагогический университет
Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных
СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

4 ДЕКАБРЯ 2010 г. I ТУР 10 КЛАСС 1 ВАРИАНТ

1. Квадратный трехчлен $f(x)$ имеет ровно один корень. Кроме того, уравнение

$$f(2x - 3) + f(3x + 1) = 0$$

имеет ровно один корень. Найдите корень трехчлена $f(x)$. (Приведите все варианты и докажите, что других нет.)

2. В некоторых клетках квадратной таблицы стоят звездочки. Клетка называется красивой, если и в содержащей ее строчке стоит нечетное число звездочек, и в содержащем ее столбце стоит нечетное число звездочек. (В красивой клетке может стоять звездочка, а может и не стоять.) Саша насчитал в таблице ровно 2010 красивых клеток. Докажите, что он не прав.

3. Докажите, что если $x \leq y$, то $\frac{2^x + 3^y}{2} \geq 6^{\frac{x+y}{4}}$.

4. Даны 46 различных натуральных чисел. Все их простые делители меньше 20. Докажите, что сумму каких-нибудь двух из них можно разложить в произведение трех натуральных чисел, больших 1.

5. Две окружности пересекаются в точках E и F . Прямая ℓ пересекает первую окружность в точках A и B , вторую — в точках C и D так, что точка E лежит внутри треугольника ADF , а точки B и C — на отрезке AD . Оказалось, что $AB = CD$. Докажите, что $BE \cdot DF = CE \cdot AF$.

Этот листок Вы можете оставить себе на память.
В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:

ФАМИЛИЯ, ИМЯ;
КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ;
ТЕЛЕФОН ИЛИ АДРЕС ЭЛЕКТРОННОЙ ПОЧТЫ;
ФАМИЛИЯ, ИМЯ, ОТЧЕСТВО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ.
ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.
Если Вы занимаетесь в кружке математики —
ФАМИЛИЯ, ИМЯ, ОТЧЕСТВО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ КРУЖКА, МЕСТО ЗАНЯТИЙ.
Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах
www.pdmi.ras.ru/~olymp и www.anichkov.ru/olimpus/matem



Комитет по образованию Санкт-Петербурга
Санкт-Петербургский государственный университет
Российский государственный педагогический университет
Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных
СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

4 ДЕКАБРЯ 2010 г. I ТУР 10 КЛАСС 2 ВАРИАНТ

1. Квадратный трехчлен $f(x)$ имеет ровно один корень. Кроме того, уравнение

$$f(2x + 1) + f(3x - 2) = 0$$

имеет ровно один корень. Найдите корень трехчлена $f(x)$. (Приведите все варианты и докажите, что других нет.)

2. В некоторых клетках прямоугольной таблицы стоят звездочки. Клетка называется красивой, если и в содержащей ее строчке стоит нечетное число звездочек, и в содержащем ее столбце стоит нечетное число звездочек. (В красивой клетке может стоять звездочка, а может и не стоять.) Саша насчитал в таблице ровно 1002 красивые клетки. Докажите, что он не прав.

3. Докажите, что если $a \leq b$, то $\frac{3^a + 5^b}{2} \geq 15^{\frac{a+b}{4}}$.

4. Даны 56 различных натуральных чисел, у которых все простые делители меньше 25. Докажите, что сумму каких-нибудь двух из них можно разложить в произведение трех натуральных чисел, больших 1.

5. Две окружности пересекаются в точках A и B . Прямая ℓ пересекает первую окружность в точках C и D , вторую — в точках E и F так, что точка A лежит внутри треугольника CFB , а точки D и E — на отрезке CF . Оказалось, что $DA \cdot FB = EA \cdot CB$. Докажите, что $CD = EF$.

Этот листок Вы можете оставить себе на память.
В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:

ФАМИЛИЯ, ИМЯ;
КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ;
ТЕЛЕФОН ИЛИ АДРЕС ЭЛЕКТРОННОЙ ПОЧТЫ;
ФАМИЛИЯ, ИМЯ, ОТЧЕСТВО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ.
ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.
Если Вы занимаетесь в кружке математики —
ФАМИЛИЯ, ИМЯ, ОТЧЕСТВО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ КРУЖКА, МЕСТО ЗАНЯТИЙ.
Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах
www.pdmi.ras.ru/~olymp и www.anichkov.ru/olimpus/matem



Комитет по образованию Санкт-Петербурга
Санкт-Петербургский государственный университет
Российский государственный педагогический университет
Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных
СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

4 ДЕКАБРЯ 2010 г.

I ТУР

11 КЛАСС

1 ВАРИАНТ

1. Квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + bx + c$ имеет ровно один корень. Кроме того, уравнение

$$f(2x - 3) + f(3x + 1) = 0$$

имеет ровно один корень. Найдите b и c .

2. Несколько девятиклассников, десятиклассников и одиннадцатиклассников встали в круг. Оказалось, что имеется ровно 20 десятиклассников и ровно 25 одиннадцатиклассников, рядом с каждым из которых стоит хотя бы один девятиклассник. Докажите, что рядом с кем-то стоит два девятиклассника.

3. Произведение положительных чисел x и y равно 7. Докажите неравенство

$$x^{[x]} + y^{[y]} \geq 14.$$

(Запись $[x]$ обозначает целую часть числа, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x .)

4. В окружность вписан пятиугольник $ABCDE$. Отрезки AC и BD пересекаются в точке K . Отрезок CE касается описанной окружности треугольника ABK в точке N . Найдите $\angle CNK$, если известно, что $\angle ECD = 40^\circ$.

5. Даны 46 различных натуральных чисел. Все их простые делители меньше 20. Докажите, что сумму каких-нибудь двух из них можно разложить в произведение трех натуральных чисел, больших 1.

Этот листок Вы можете оставить себе на память.

В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:

ФАМИЛИЯ, ИМЯ;

КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ;

ТЕЛЕФОН ИЛИ АДРЕС ЭЛЕКТРОННОЙ ПОЧТЫ;

ФАМИЛИЯ, ИМЯ, ОТЧЕСТВО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ.

ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.

Если Вы занимаетесь в кружке математики —

ФАМИЛИЯ, ИМЯ, ОТЧЕСТВО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ КРУЖКА, МЕСТО ЗАНЯТИЙ.

Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах

www.pdmi.ras.ru/~olymp и www.anichkov.ru/olimpus/matem



Комитет по образованию Санкт-Петербурга
Санкт-Петербургский государственный университет
Российский государственный педагогический университет
Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных
СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

4 ДЕКАБРЯ 2010 г.

I ТУР

11 КЛАСС

2 ВАРИАНТ

1. Квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + bx + c$ имеет ровно один корень. Кроме того, уравнение

$$f(2x + 1) + f(3x - 2) = 0$$

имеет ровно один корень. Найдите b и c .

2. Несколько девятиклассников, десятиклассников и одиннадцатиклассников встали в круг. Оказалось, что имеется ровно 15 девятиклассников и ровно 20 одиннадцатиклассников, рядом с каждым из которых стоит хотя бы один десятиклассник. Докажите, что рядом с кем-то стоит два десятиклассника.

3. Произведение положительных чисел x и y равно 8. Докажите неравенство

$$x^{[x]} + y^{[y]} \geq 16.$$

(Запись $[x]$ обозначает целую часть числа, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x .)

4. В окружность вписан пятиугольник $ABCDE$. Отрезки BD и CE пересекаются в точке F . Отрезок AC касается описанной окружности треугольника DEF в точке K . Найдите $\angle BCA$, если известно, что $\angle FKC = 25^\circ$.

5. Даны 56 различных натуральных чисел. Все их простые делители меньше 25. Докажите, что сумму каких-нибудь двух из них можно разложить в произведение трех натуральных чисел, больших 1.

Этот листок Вы можете оставить себе на память.

В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:

ФАМИЛИЯ, ИМЯ;

КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ;

ТЕЛЕФОН ИЛИ АДРЕС ЭЛЕКТРОННОЙ ПОЧТЫ;

ФАМИЛИЯ, ИМЯ, ОТЧЕСТВО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ.

ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.

Если Вы занимаетесь в кружке математики —

ФАМИЛИЯ, ИМЯ, ОТЧЕСТВО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ КРУЖКА, МЕСТО ЗАНЯТИЙ.

Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах

www.pdmi.ras.ru/~olymp и www.anichkov.ru/olimpus/matem