САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2013 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 6 класс.

---

1. 1 сентября на перемене учительница оставила на столе классный журнал и дети стали выставлять туда оценки. Каждая девочка поставила 18 пятерок, а каждый мальчик — 11 двоек. В результате у каждой девочки появилось 7 оценок, а у каждого мальчика — 21 оценка. Кого было больше — мальчиков или девочек? (*Жюри*)

2. 40 путешественников выехали из Петербурга: двое 1-го января, двое 2-го января, ..., двое 20-го января. Вернулись они в феврале: двое 1-го февраля, двое 2-го февраля, ..., двое 20-го февраля. Все путешественники уезжали в полдень и приезжали тоже в полдень. Докажите, что какие-то двое потратили на путешествие поровну дней. (*В. Самойлов*)

3. Маньяк Вася исследует, на сколько изменяется произведение цифр числа при увеличении числа на 12. С этой целью для каждого из чисел от 2013 до 20139999 он выписал в тетрадь это изменение (например, для числа 11 111 он выписал 5, а для числа 11 119 он выписал отрицательное изменение $-6 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 9$). Чему равна сумма всех Васиных чисел? (*К. Тыщук*)

4. У бизнесменов Васи, Пети и Коли в кошельках есть только монеты по X рублей и монеты по Y копеек (X и Y — натуральные числа, $Y < 100$). За свой новый BMW Вася отдал миллион монет и получил на сдачу коробóк спичек ценой 1 коп. Петя за такой же BMW тоже отдал миллион монет, но в качестве сдачи ему дали автомобиль «Запорожец». А счастливчику Коле за миллион монет дали BMW и два «Запорожца»! Найдите X и Y. (*М. Антипов*)

. . . .

5. Для изготовления ккколы нужно знать 20 химических формул. Каждый сотрудник компании знает 5 формул. При этом сотрудников так много, что любой возможный набор из пяти формул известен какому-то из сотрудников. Требуется разделить сотрудников на несколько отделов так, чтобы никакой отдел не смог сделать ккколу самостоятельно (то есть чтобы его сотрудники не знали всех формул). Каким наименьшим количеством отделов удастся обойтись? (*О. Иванова*)

6. Из квадрата 300×300 вырезано несколько клеток, не граничащих ни по стороне, ни по углу. Миша хочет вырезать из оставшегося куска один уголок из трех клеток. Миша посчитал все способы это сделать, и получил ровно 48 000 способов. Докажите, что он обсчитался. (*М. Иванов, К. Сухов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2013 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 7 класс.

1. Старательный мальчик Вася решил исследовать, на сколько меняется сумма цифр числа при его увеличении на 2. С этой целью для каждого из чисел от 1 до 1 000 000 000 он выписал в тетрадочку это изменение (например, для числа 15 он выписал 2, а для числа 38 он выписал отрицательное изменение -7). Чему равна сумма всех выписанных Васей чисел? (*К. Тыщук*)

2. У бизнесменов Васи, Пети и Коли в кошельках есть только монеты по X рублей и монеты по Y копеек (X и Y — натуральные числа, $Y < 100$). За свой новый BMW Вася отдал миллион монет и получил на сдачу коробо́к спичек ценой 1 коп. Петя за такой же BMW тоже отдал миллион монет, но в качестве сдачи ему дали автомобиль «Запорожец». А счастливчику Коле за миллион монет дали BMW и два «Запорожца»! Найдите X и Y. (*М. Антипов*)

3. В мешке лежат 300 шариков: 100 белых, 100 синих и 100 красных. Кучка из нескольких шариков называется *хорошей*, если в ней присутствуют лишь два цвета шариков, причем шариков этих цветов поровну, например, 3 белых и 3 красных шарика образуют хорошую кучку (два шарика — это тоже куча!). Вася каждую минуту вынимает из мешка наугад очередной шарик, и очень хочет, чтобы в какой-нибудь момент из всех уже вынутых шариков можно было сложить одну или две (непустых) хороших кучки. Докажите, что не позже, чем через 200 минут ему это удастся. (*С. Берлов*)

4. Докажите, что не существует трёх разных натуральных чисел, каждое из которых равно наименьшему общему кратному своих разностей с двумя другими. (*А. Голованов*)

. . . .

5. Из прямоугольника 2011×2012 вырезаны несколько клеток, не граничащих ни по стороне, ни по углу. Из оставшегося куска нужно вырезать один уголок из трех клеток. Миша подсчитал все способы, которыми это можно сделать, и получил ровно 12 341 234 способа. Докажите, что он обсчитался. (*М. Иванов, К. Сухов*)

6. Точки P и Q расположены внутри равностороннего треугольника ABC так, что четырёхугольник $APQC$ — выпуклый, $AP = PQ = QC$ и $\angle PBQ = 30^\circ$. Докажите, что $AQ = BP$. (*С. Берлов*)

7. Пятьдесят единиц и пятьдесят чисел -1 расставлены по кругу так, что одинаковые числа не стоят рядом. Каждую минуту Вася стирает какое-нибудь из этих чисел и записывает в тетрадку сумму этого числа и двух соседних. Докажите, что через 98 минут произведение чисел, записанных в тетрадку, будет положительным. (*М. Антипов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2013 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 8 класс.

---

1. Старательный мальчик Вася решил исследовать, на сколько меняется сумма цифр числа при его увеличении на 2. С этой целью для каждого из чисел от 1 до $1\,000\,000\,000$ он выписал в тетрадочку это изменение (например, для числа 15 он выписал 2, а для числа 38 он выписал отрицательное изменение -7). Чему равна сумма всех выписанных Васей чисел? (*К. Тыщук*)

2. Даны числа $x > y > 0$. Известно, что $xy \geq 1$. Докажите, что $\frac{x^3+y^3}{x-y} > 4$. (*А. Храбров*)

3. В мешке лежат 10 000 шариков ста цветов: по 100 шариков каждого цвета. Сережа каждую минуту вынимает из мешка очередной шарик. Он очень хочет в какой-нибудь момент разбить все уже вынутые шарики на тройки, в каждой из которых три разноцветных шарика. Более того, Сережа хочет, чтобы какой-нибудь цвет присутствовал во всех тройках. Докажите, что не позже чем через 300 минут ему это удастся. (*С. Берлов*)

4. Точки P и Q расположены внутри равностороннего треугольника ABC так, что четырёхугольник $APQC$ — выпуклый, $AP = PQ = QC$ и $\angle PBQ = 30^\circ$. Докажите, что $AQ = BP$. (*С. Берлов*)

. . . .

Олимпиада 2013 года. II тур. 8 класс. Выводная аудитория.

5. В стране несколько городов, некоторые из которых соединены дорогами с односторонним движением так, что из столицы можно добраться до любого города, не нарушая правил дорожного движения (при этом, возможно, проезжая через другие города). Назовем два нестоличных города *близкими*, если до них нельзя добраться из столицы по непересекающимися (то есть не проходящими через общие города) путям. Президент приказал соединить каждые два близких города прямой авиалинией. Оказалось, что теперь между любыми двумя нестоличными городами можно добраться, пользуясь только открытыми авиалиниями. Докажите, что тогда между любыми двумя нестоличными городами есть прямая авиалиния. (*К. Тыщук, С. Берлов*)

6. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC выбраны точки P, Q, R соответственно таким образом, что $AR = PR$, $CR = QR$ и BR — биссектриса угла PRQ. Докажите, что прямые PQ и AC параллельны. (*С. Берлов*)

7. Последовательность $a_1, \ldots, a_n$ состоит из различных натуральных чисел. Известно, что для любых двух различных номеров k и m выполнено неравенство

$$\text{НОД}(|a_k - a_m|, |k - m|) < 2013.$$

Найдите наибольшее возможное значение n. (*А. Голованов*)