САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2013 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 9 класс.

---

1. Натуральное число A называется интересным, если оно делится на любое число, которое остается после зачеркивания в A нескольких последних цифр. Найдите наибольшее интересное число, состоящее из различных цифр. (*С. Берлов*)

2. Сумма квадратов вещественных чисел a, b, c и d равна 1. Докажите, что $(1-a)(1-b) \geq cd$. (*А. Храбров*)

3. Биссектриса угла B треугольника ABC пересекает прямую, проходящую через A параллельно BC, в точке X; она же пересекает прямую, проходящую через C параллельно AB, в точке Y. Известно, что $XY = AC$. На сколько могут отличаться углы A и C? (*С. Берлов*)

4. На столе стоят 100 стаканов, в которых лежат 101, 102, …, 200 вишневых косточек. Двое играют в следующую игру. За один ход разрешается вынуть из любого стакана любое количество косточек (даже все), но после хода все стаканы попрежнему должны содержать различное число косточек. Проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре? (*С. Берлов*)

. . . .

5. На доске написаны 100 чисел из интервала $(0, 1)$. Разрешается выбрать два числа a и b и заменить их на два корня квадратного трехчлена $x^2 - ax + b$ (если этот трехчлен имеет два корня). Докажите, что этот процесс не может продолжаться бесконечно долго. (*В. Франк*)

6. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Точки X и Y симметричны точке O относительно середин сторон BC и AD соответственно. Известно, что $AB = BC = CD$. Докажите, что точка пересечения серединных перпендикуляров к диагоналям четырехугольника лежит на прямой XY. (*А. Смирнов*)

7. Дано 54-значное число из единиц и нулей. Докажите, что остаток от его деления на число $33 \cdot 34 \cdot \ldots \cdot 39$ больше, чем $100\,000$. (*М. Антипов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2013 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 10 класс.

1. Натуральное число A называется интересным, если оно делится на любое число, которое остается после зачеркивания в A нескольких последних цифр. Найдите наибольшее интересное число, состоящее из различных цифр. (*С. Берлов*)

2. Будем называть четырехугольник *равнодиагональным*, если у него равны диагонали. Отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$, делит его на два равнодиагональных четырехугольника. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ сам равнодиагональный. (*С. Берлов*)

3. По кругу стоят черные и белые точки (не меньше 12 штук), так что у каждой точки среди 10 её соседей (5 слева и 5 справа) поровну черных и белых. Докажите, что количество точек делится на 4. (*М. Антипов*)

4. На доске написаны 100 чисел из интервала $(0, 1)$. Разрешается выбрать два числа a и b и заменить их на два корня квадратного трехчлена $x^2 - ax + b$ (если этот трехчлен имеет два корня). Докажите, что этот процесс не может продолжаться бесконечно долго. (*В. Франк*)

. . . .

Олимпиада 2013 года. II тур. 10 класс. Выводная аудитория.

5. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Точки X и Y симметричны точке O относительно середин сторон BC и AD соответственно. Известно, что $AB = BC = CD$. Докажите, что точка пересечения серединных перпендикуляров к диагоналям четырехугольника лежит на прямой XY.

(*А. Смирнов*)

6. В роте 85 солдат. Каждый день старшина выбирает одного солдата и отправляет в поле красить траву его, а также либо всех тех, кто и выше, и старше выбранного, либо всех тех, которые и ниже, и младше выбранного. Докажите, что через 10 дней можно будет найти пару солдат, которые красили траву в одни те же дни. Рост и возраст у всех солдат различны. (*М. Антипов*)

7. Пусть a_1 и a_2 — натуральные числа, b_1 — собственный делитель числа a_1, b_2 — собственный делитель числа a_2. (Собственным делителем числа называется любой натуральный делитель, отличный от единицы и самого числа.) Докажите, что $a_1b_1 + a_2b_2 - 1$ не делится на a_1a_2. (*А. Храбров*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2013 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 11 класс.

---

1. Найдите наименьший положительный нецелый корень уравнения $\sin x = \sin[x]$. Здесь $[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x. Напомним, что $\pi = 3,1415\ldots$ (*Ф. Петров*)

2. На математическом факультете учатся 40 юношей и 10 девушек. Каждая девушка дружит либо в точности со всеми теми юношами, кто старше её, либо в точности с теми, кто выше её. Докажите, что у каких-то двух юношей множества подруг совпадают. (*М. Антипов*)

3. Точки M и N — середины ребер AB и CD тетраэдра $ABCD$. Оказалось, что $AN = DM$ и $CM = BN$. Докажите, что $AC = BD$. (*По мотивам задачи 10.2*)

4. Найдите все пары простых чисел p и q (не обязательно различных), для которых числа $2p - 1$, $2q - 1$ и $2pq - 1$ являются квадратами натуральных чисел. (*Ф. Петров, А. Смирнов*)

. . . .

Олимпиада 2013 года. II тур. 11 класс. Выводная аудитория.

5. Даны числа $x_1, \ldots, x_{n+1} \in [0,1]$, причем $x_{n+1} = x_1$. Докажите, что

$$\prod_{i=1}^{n}(1 - x_i x_{i+1} + x_i^2) \geq 1.$$

(*А. Храбров, Ф. Петров*)

6. Пусть S_c и S_a — вневписанные окружности треугольника ABC (S_c касается отрезка AB, S_a — отрезка BC). Окружность S проходит через точку B, касается внешним образом окружностей S_a и S_c и пересекает отрезок AC в точках M и N. Докажите, что $\angle ABM = \angle NBC$. (*А. Смирнов*)

7. В языке волков две буквы: Ф и П, любая конечная последовательность которых образует слово. Слово Y называется *потомком* слова X, если Y получается из X вычеркиванием некоторых букв (например, слово ФФПФ имеет 8 потомков: Ф, П, ФФ, ФП, ПФ, ФФП, ФПФ, ФФФ). При данном n определите, какое наибольшее число потомков может иметь n-буквенное слово языка волков. (*Ф. Петров, В. Волков*)