САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2013 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ

I тур. 6 класс.

1. В первую строку таблицы 5×5 вписывают числа от 1 до 5, во вторую строку — тоже числа от 1 до 5, в третью — числа от 3 до 7, в четвертую — тоже от 3 до 7, в пятую — от 4 до 8. Как следует вписывать числа, чтобы суммы чисел во всех столбцах таблицы оказались одинаковыми? (*К. Кохась*)

2. На доске выписаны числа от 1 до 2150. Каждую минуту каждое число подвергается следующей операции: если число делится на 100, то его делят на 100; если же не делится, то из него вычитают 1. Найдите наибольшее среди чисел на доске через 87 минут. Не забудьте обосновать ответ. (*К. Кохась, Д. Максимов*)

3. Гарри Поттер ведет машину со скоростью 60 км/ч. Проезжая мимо елки, он мгновенно телепортируется до ближайшего по ходу движения дуба. В пунктах A и B, расстояние между которыми равно 120 км, растут дубы, а на дороге между ними растет еще 10 дубов и ни одной елки. Докажите, что можно посадить на этой дороге 6 елок так, чтобы путь туда и обратно занимал у Поттера меньше 3 часов. (*О. Иванова*)

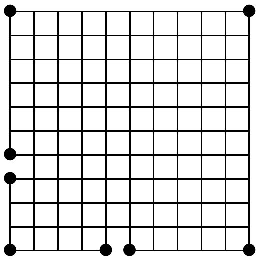
4. Два слова называются *похожими*, если в них присутствует общая буква, которая встречается в них одинаковое число раз. Например, слова «клюква» и «какао» — похожие (из-за буквы «к»). Влад задумал три ключевых слова: КАРАБАС, БАРКАС и БАРС. Затем он взял большой словарь и выписал из него все слова, которые похожи на все три его ключевых слова. Костя проделал с таким же словарем аналогичную операцию, используя другие ключевые слова: БАРАБАС, РАБ и КАРА. Докажите, что у Влада выписано не меньше слов, чем у Кости.
(*В. Волков, К. Кохась*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2013 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 7 класс.

1. На доске выписаны числа от 1 до 2150. Каждую минуту каждое число подвергается следующей операции: если число делится на 100, то его делят на 100; если же не делится, то из него вычитают 1. Найдите наибольшее среди чисел на доске через 87 минут. Не забудьте обосновать ответ. (*К. Кохась, Д. Максимов*)

2. Между городами A и B ездят автобусы с одинаковой постоянной скоростью. Автобус, выехавший из A в полдень, и автобус, выехавший из B в 15.00, встретились на расстоянии 500 км от A. Автобус, выехавший из A в 14.00, и автобус, выехавший из B в 11.00, встретились на расстоянии 300 км от A. На каком расстоянии от A встретятся автобусы, выехавшие из A и из B в 13.00? (*А. Голованов, М. Иванов*)

3. На рисунке изображен план города Альфинска. Каждый единичный отрезок — это улица. На некоторых улицах движение одностороннее, но при этом с каждого перекрёстка можно уехать по крайней мере в три стороны (кроме перекрестков, отмеченных точками, — с них можно уехать в две стороны). Докажите, что из левого нижнего угла города можно проехать в правый верхний, не нарушая правил дорожного движения. (*А. Голованов*)



4. Таня выписала в строчку 120 последовательных натуральных чисел в некотором порядке. Серёжа выписал под ними еще какие-то 120 последовательных чисел в некотором порядке. Под каждым числом второй строчки Саша написал произведение этого числа и числа, стоящего над ним. Оказалось, что в третьей строчке тоже стоят 120 последовательных натуральных чисел. Докажите, что Саша где-то обсчитался. (*С. Берлов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2013 года ПО МАТЕМАТИКЕ

I тур. 8 класс.

1. На доске выписаны числа от 1 до 2150. Каждую минуту каждое число подвергается следующей операции: если число делится на 100, то его делят на 100; если же не делится, то из него вычитают 1. Найдите наибольшее среди чисел на доске через 87 минут. Не забудьте обосновать ответ. (*К. Кохась, Д. Максимов*)

2. Навигатор на «Лексусе» бизнесмена Бориса Михайловича сообщает, сколько осталось ехать до пункта назначения, если двигаться со скоростью, равной средней скорости на промежутке от начала пути до настоящего момента. Борис Михайлович выехал из дома на дачу. В середине пути навигатор сообщил, что осталось ехать 1 час. В этот момент прямо перед «Лексусом» на дорогу выехал тракторист Вася, обогнать которого не было никакой возможности. После того как Б.М. проехал половину оставшегося пути, навигатор сообщил, что осталось ехать 2 часа. Через сколько часов после этого приедет на дачу бизнесмен, если так и не обгонит тракториста? (Скорость трактора постоянна.) (*С. Берлов*)

3. Точка E — середина основания AD трапеции $ABCD$. Отрезки BD и CE пересекаются в точке F. Известно, что $AF \perp BD$. Докажите, что $BC = FC$. (*А. Пастор*)

4. Квадрат 20×20 разбит на единичные квадратики. Несколько сторон единичных квадратиков стёрты, причем стёртые отрезки не имеют общих концов, а на верхней и правой сторонах квадрата стёртых отрезков нет. Докажите, что из левого нижнего угла квадрата можно добраться в правый верхний по нестёртым отрезкам. (*С. Берлов*)

5. Вася вычислил суммы цифр у 200 последовательных натуральных чисел и выписал эти суммы в строку в некотором порядке. Петя выписал под ними суммы цифр еще каких-то 200 последовательных натуральных чисел (также в произвольном порядке). После чего Таня умножила каждое из Васиных чисел на число, написанное под ним, и получила в результате 200 последовательных натуральных чисел. Докажите, что кто-то из них ошибся. (*С. Берлов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2013 года ПО МАТЕМАТИКЕ

I тур. 9 класс.

1. Расставьте по кругу натуральные числа от 1 до 8 так, чтобы любое число делилось на разность соседних с ним чисел. (*С. Берлов*)

2. Даны квадратные трехчлены $f(x)$ и $g(x)$. Известно, что уравнение $f(x)g(x) = 0$ имеет ровно один корень, а уравнение $f(x) + g(x) = 0$ — ровно два корня. Докажите, что уравнение $f(x) - g(x) = 0$ не имеет корней. (*О. Иванова*)

3. Дмитрий Валерьевич ездит на машине со скоростью 120 км/ч. Однако, проезжая мимо поста ДПС (в любом из двух направлений), он замедляется и до ближайшего перекрестка едет со скоростью 60 км/ч. Расстояние между перекрестками A и B равно 60 км, и на пути между ними расположено еще 11 перекрестков. Докажите, что можно расставить на этом пути 6 постов ДПС так, чтобы дорога от A до B и обратно заняла у Дмитрия Валерьевича не менее 1 часа 15 минут. Располагать пост на перекрестке не разрешается. (*О. Иванова*)

4. В треугольнике ABC с тупым углом B проведены биссектриса угла BAC и биссектриса внешнего угла при вершине A. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Расстояния от O до обеих биссектрис, а также до прямой BC равны 3. Найдите $\angle ABC$. (*С. Берлов*)

5. В школе учатся 360 девочек. Каждый мальчик в школе дружит ровно с тремя девочками, а каждая девочка дружит ровно с пятью девочками. При этом для любых двух дружащих друг с другом девочек есть хотя бы один мальчик, который дружит с ними обеими. Какое наименьшее количество мальчиков может учиться в этой школе? (*С. Берлов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2013 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 10 класс.

---

1. В клетках таблицы 3×3 стоят положительные числа. При этом произведение чисел в любых двух соседних клетках равно 2. (Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.) Докажите, что сумма всех чисел в таблице не меньше $4\sqrt{10}$. (*Н. Агаханов*)

2. Вася написал в строку некотором порядке 200 последовательных натуральных чисел. А Петя выписал под ними еще какие-то 200 последовательных натуральных чисел в некотором порядке. После чего Таня умножила каждое из Васиных чисел на число, написанное под ним, и получила в результате 200 последовательных натуральных чисел. Докажите, что кто-то из них ошибся. (*С. Берлов*)

3. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D. Описанная окружность треугольника ABD проходит через центр вписанной окружности треугольника BCD. Найдите $\angle ACB$, если известно, что $\angle ABC = 40^\circ$. (*С. Берлов*)

4. Дана функция $f(x) = 2|x-a| + |x-b| + c$, где a, b, c — некоторые числа, $a < b$. Известно, что множество решений неравенства $f(x) \leqslant 3$ является интервалом длины 2. Докажите, что $f(x) > 0$ при всех x.

5. На танцы пришли 30 девочек и несколько мальчиков. Оказалось, что каждый мальчик знаком ровно с тремя девочками, и каждая девочка знакома ровно с тремя другими девочками. При этом для любых двух знакомых друг с другом девочек есть хотя бы один мальчик, который знаком с ними обеими. При каком наименьшем количестве мальчиков такое может быть? (*С. Берлов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2013 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 11 класс.

1. Решите в положительных числах систему уравнений

$$x^y = y^x, \qquad x^5 = y^7.$$

(*олимпиада г. Переславль-Залесский, 1992 г.*)

2. Докажите, что при u, $v \geqslant 1/2$ выполняется неравенство

$$u^2v^2 + 2(u+v) \geqslant 4uv + 1\,.$$

(*Ф. Петров*)

3. На танцы пришли 30 девочек и несколько мальчиков. Оказалось, что каждый мальчик знаком ровно с тремя девочками, а каждая девочка знакома ровно с четырьмя другими девочками. При этом для любых двух знакомых друг с другом девочек есть хотя бы один мальчик, который знаком с ними обеими. При каком наименьшем количестве мальчиков такое может быть? (*С. Берлов*)

4. Внутри тетраэдра $ABCD$ выбрана точка P, такая что равны углы $\angle PAD = \angle PBC$, $\angle PDA = \angle PCB$, $\angle APC = \angle BPD$. Докажите, что если $AC = BD$, то либо $AP = BP$, либо $AP = DP$. (*А. Смирнов*)

5. Вася написал в строку в некотором порядке 100 последовательных натуральных чисел. А Петя выписал под ними еще какие-то 100 последовательных натуральных чисел в некотором порядке. После чего Тоня умножила каждое из Васиных чисел на число, написанное под ним, и получила в результате 100 последовательных членов арифметической прогрессии натуральных чисел. Докажите, что кто-то из них ошибся.

(*С. Берлов*)