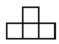
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2015 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ

II тур. 9 класс.

1. Существует ли такой квадратный трехчлен $f(x)$ с целыми коэффициентами, что $f(f(\sqrt{2})) = 0$? *(А. Храбров)*

2. Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Известно, что $AD > BC$. На ее описанной окружности отмечена точка E, такая, что $BE \perp AD$. Докажите, что $AE + BC > DE$. *(А. Пастор)*

3. Клетки квадрата 2015×2015 раскрашены в 4 цвета. Рассматриваются все способы размещения внутри этого квадрата четырехклеточной фигурки вида  (фигурку можно поворачивать). Докажите, что фигурка содержит клетки четырех разных цветов менее чем в 51 % из этих способов. *(Д. Карпов)*

4. Положительные числа x, y, z удовлетворяют условию

$$xy + yz + zx + 2xyz = 1.$$

Докажите, что $4x + y + z \geq 2$. *(А. Храбров)*

. . . .

Олимпиада 2015 года. II тур. 9 класс. Выводная аудитория.

5. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Описанная окружность треугольника ABC пересекает стороны AD и DC в точках P и Q соответственно. Описанная окружность треугольника ADC пересекает стороны AB и BC в точках S и R соответственно. Оказалось, что четырёхугольник $PQRS$ — параллелограмм. Докажите, что и четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм. *(С. Берлов)*

6. В межгалактической империи 10^{2015} планет, любые две из которых соединены двусторонней прямой космической линией. Этими линиями владеют 2015 транспортных компаний. Император хочет закрыть k компаний так, чтобы, пользуясь только рейсами оставшихся, можно было бы с любой планеты добраться до любой другой. При каком наибольшем k он гарантированно сможет осуществить свой план? *(Д. Карпов)*

7. Последовательность натуральных чисел определена следующим образом: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, a_n — наименьшее натуральное число, не встречавшееся раньше, взаимно простое с a_{n-1} и не взаимно простое с a_{n-2}. Докажите, что в этой последовательности встречаются ровно по одному разу все натуральные числа. *(М. Иванов)*

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2015 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 10 класс.

---

1. Не менее половины всех палат в лагере — четырёхместные, остальные — трёхместные. Не менее двух третей всех девочек в лагере живут в трёхместных палатах. Докажите, что более 35 % личного состава составляют мальчики. (Все палаты заполнены, мальчики и девочки в одной палате не живут.) (*А. Солынин*)

2. Шахматная фигура бобёр ходит на две клетки по вертикали или по горизонтали в любом направлении. В какое наименьшее число цветов можно раскрасить доску 100×100 так, чтобы любые две клетки, отстоящие на ход коня или на ход бобра, были разного цвета? (*А. Голованов*)

3. Биссектрисы углов A и D выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке K; биссектрисы углов B и C — в точке L. Докажите, что

$$2KL \geq |AB - BC + CD - DA|.$$

(*А. Смирнов, Ф. Петров*)

4. Назовем натуральное число n олимпиадным, если найдется такой квадратный трехчлен $f(x)$ с целыми коэффициентами, что $f\big(f(\sqrt{n}\,)\big) = 0$. Найдите наибольшее олимпиадное число, не превосходящее 2015. (*А. Храбров*)

. . . .

Олимпиада 2015 года. II тур. 10 класс. Выводная аудитория.

5. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ выполнены равенства $\angle BCA = \angle BEA = \frac{1}{2}\angle BDA$, $\angle BDC = \angle EDA$. Докажите, что $\angle DEB = \angle DAC$.

(*Ф. Петров, по мотивам задачи 11.7*)

6. Последовательность натуральных чисел определена следующим образом: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, a_n — наименьшее натуральное число, не встречавшееся раньше, взаимно простое с a_{n-1} и не взаимно простое с a_{n-2}. Докажите, что в этой последовательности встречаются ровно по одному разу все натуральные числа.

(*М. Иванов*)

7. В выпуклом n-угольнике провели все стороны, а также все диагонали из одной вершины. На полученных $2n - 3$ отрезках написали положительные числа. Разрешается взять четырехугольник $ABCD$ такой, что все его стороны и диагональ AC — проведенные отрезки, стереть диагональ AC, провести диагональ BD и написать на ней число $(xz + yt)/w$, где x, y, z, t, w — числа на отрезках AB, BC, CD, DA, AC соответственно. Докажите, что если в какой-то момент проведенными окажутся те же $2n - 3$ отрезка, что в начале, то на них будут написаны те же числа, что и в начале. (*фольклор*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2015 года ПО МАТЕМАТИКЕ

II тур. 11 класс.

1. Числа x и y удовлетворяют условиям $x^2+y^2=1$ и $20x^3-15x=3$. Найдите $|20y^3-15y|$. (*К. Тыщук*)

2. Натуральные числа a и b больше 1. Известно, что числа a^2+b и $a+b^2$ простые. Докажите, что числа $ab+1$ и $a+b$ взаимно простые. (*С. Берлов*)

3. Набор разновесов содержит по одной гире каждого из весов 1, 3, 5, 7, 9, ... граммов. Для натурального $n>1$ докажите, что количество способов набрать этими гирями n граммов не больше, чем количество способов набрать $n+1$ грамм. (*Ф. Петров*)

4. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Описанная окружность треугольника ABC пересекает стороны AD и DC в точках P и Q соответственно. Описанная окружность треугольника ADC пересекает стороны AB и BC в точках S и R соответственно. Оказалось, что четырёхугольник $PQRS$ — параллелограмм. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — также параллелограмм. (*С. Берлов*)

....

Олимпиада 2015 года. II тур. 11 класс. Выводная аудитория.

5. Бумажный квадрат со стороной 100 разрезали 99 вертикальными и 99 горизонтальными прямыми, получив таким образом 10 000 прямоугольников (необязательно с целыми сторонами). У какого наименьшего количества прямоугольников площадь может оказаться меньшей или равной 1? (*Н. Филонов, Д. Ростовский*)

6. В стране Центумии некоторые пары городов соединены дорогами, причем из каждого города выходит ровно 100 дорог. *Пучком* называется набор из 10 дорог, выходящих из одного города. Докажите, что все дороги можно разбить на несколько пучков. (*С. Берлов*)

7. На биссектрисе BL остроугольного треугольника ABC выбрали такую точку K, что $\angle AKC - \angle ABC = 90^\circ$. На продолжении биссектрисы BL за точку L выбрали такую точку S, что $\angle ASC = 90^\circ$. Точка T диаметрально противоположна точке K на описанной окружности треугольника AKC. Докажите, что прямая ST проходит через середину дуги ABC. (*С. Берлов*)