



Комитет по образованию Санкт-Петербурга  
Санкт-Петербургский государственный университет  
Российский государственный педагогический университет  
Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных  
СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

13 ДЕКАБРЯ 2014 г.

I тур

9 класс

1 ВАРИАНТ

1. В сидячем вагоне поезда стоят трехместные скамейки для пассажиров: 20 рядов по 2 скамейки. Костя заметил, что на каждом ряду сидит 3 или 5 человек. Потом Костя подсчитал, на скольких скамейках сидит 3 человека и на скольких — один человек. Найдите сумму Костиных чисел.

2. Даны 100 различных натуральных чисел. Они разбиты на 50 пар так, что сумма в каждой паре больше 1000. Докажите, что если выписать все 100 чисел в порядке возрастания, то сумма 40-го и 61-го чисел тоже больше 1000.

3. Натуральные числа  $a, b$  таковы, что  $p = 8a + 19b$  — простое число. Докажите, что число  $n = ab - 7a - 18b + 1$  не делится на  $p$ .

4. В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $BL$ . Известно, что  $\angle ABC = 2\angle ACB$ . Точка  $X$  — середина стороны  $AB$ , а точка  $Y$  на стороне  $BC$  такова, что  $CY = AX$ . Докажите, что прямая  $XY$  касается описанной окружности треугольника  $LCY$ .

5. Дан квадратный трехчлен  $f(x) = x^2 + px + q$ , где  $p, q \geq 0$ , имеющий два различных вещественных корня. Натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что  $f(a) < f(b) < 1,001f(a)$ . Докажите, что  $f(b) - f(a) > 4001$ .

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:

ФАМИЛИЯ, ИМЯ;

КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ;

ТЕЛЕФОН;

ФАМИЛИЯ, ИМЯ, ОТЧЕСТВО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ.

ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.

Если Вы занимаетесь в кружке математики —

ФИО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ КРУЖКА, МЕСТО ЗАНЯТИЙ.

Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах

[www.pdmi.ras.ru/~olymp](http://www.pdmi.ras.ru/~olymp) и [www.anichkov.ru/olimpus/matem](http://www.anichkov.ru/olimpus/matem)



Комитет по образованию Санкт-Петербурга  
Санкт-Петербургский государственный университет  
Российский государственный педагогический университет  
Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных  
СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

13 ДЕКАБРЯ 2014 г.

I тур

9 класс

2 ВАРИАНТ

1. В сидячем вагоне поезда стоят трехместные скамейки для пассажиров: 20 рядов по две скамейки. Вася заметил, что на каждом ряду сидит 3 или 5 человек. Потом Вася подсчитал, на скольких скамейках сидит 2 человека и на скольких не сидит никто. Найдите сумму Васиных чисел.

2. Даны 100 различных натуральных чисел. Они разбиты на 50 пар так, что сумма в каждой паре больше 2000. Докажите, что если выписать все 100 чисел в порядке возрастания, то сумма 30-го и 71-го чисел тоже больше 2000.

3. Натуральные числа  $m, n$  таковы, что  $p = 11m + 17n$  — простое число. Докажите, что число  $k = mn + 12m + 18n + 1$  не делится на  $p$ .

4. На основании  $BC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  отмечена точка  $D$ , а на продолжении стороны  $CA$  за точку  $A$  — точка  $E$  так, что  $BE = 2DC$  и  $\angle EBC = 2\angle ABC$ . Точка  $F$  — середина отрезка  $BE$ . Докажите, что прямая  $DF$  касается описанной окружности треугольника  $ADC$ .

5. Дан квадратный трехчлен  $f(x) = x^2 + ax + b$ , где  $a, b \geq 0$ , имеющий два различных вещественных корня. Натуральные числа  $m$  и  $n$  таковы, что  $f(m) < f(n) < 1,002f(m)$ . Докажите, что  $f(n) - f(m) > 2001$ .

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:

ФАМИЛИЯ, ИМЯ;

КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ;

ТЕЛЕФОН;

ФАМИЛИЯ, ИМЯ, ОТЧЕСТВО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ.

ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.

Если Вы занимаетесь в кружке математики —

ФИО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ КРУЖКА, МЕСТО ЗАНЯТИЙ.

Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах

[www.pdmi.ras.ru/~olymp](http://www.pdmi.ras.ru/~olymp) и [www.anichkov.ru/olimpus/matem](http://www.anichkov.ru/olimpus/matem)