САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2016 года ПО МАТЕМАТИКЕ

II тур. 6 класс.

1. На экране кривого калькулятора написано число 20. Время от времени калькулятор умножает число на экране на 2 и тут же вычитает из результата какое-нибудь число от 1 до 10. Может ли на экране получиться число 2016? (*К. Сухов*)

2. Числа 1, 2, 3, …, 200 расставлены вдоль окружности в некотором порядке. Для каждого числа n среди 99 чисел, стоящих после него по часовой стрелке, и среди 99 чисел, стоящих до него, имеется поровну чисел, меньших n. Найдите, какое число стоит напротив числа 111. (*А. Голованов*)

3. Натуральное число можно представить как сумму 18 его делителей (не обязательно различных) и как сумму 19 его делителей (не обязательно различных). Докажите, что это число можно представить и как сумму 20 его делителей (не обязательно различных). (*В. Франк*)

4. На полке в камере хранения стоят 10 чемоданов, занумерованных в некотором порядке числами от 1 до 10. Чемоданы имеют разную ширину и стоят не обязательно вплотную друг к другу и к краям полки. Кладовщик снимает с полки чемодан №1, а затем ставит его обратно на полку в самое левое из возможных положений, не сдвигая другие чемоданы. Затем он берет чемодан №2 и ставит его в самое левое положение и т.д. После перестановки чемодана №10 кладовщик снова переходит к чемодану №1 и т.д. Докажите, что после 100 операций кладовщик будет ставить каждый чемодан на то место, откуда его только что взял. (Если очередной чемодан пришлось поставить на место, откуда его взяли, это все равно засчитывается как выполненная операция). (*А. Храбров*)

. . . .

Олимпиада 2016 года. II тур. 6 класс. Выводная аудитория.

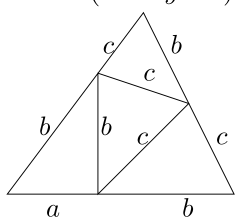
5. На острове Невезения мужчины по средам всегда говорят правду, а по четвергам всегда лгут, а женщины — наоборот. В среду каждый из них сказал: "У меня знакомых мужчин на 1 больше, чем знакомых женщин", а в четверг — "Среди незнакомых мне жителей деревни мужчин на 1 больше, чем женщин". Могло ли на острове быть ровно 2015 жителей? (*А. Солынин*)

6. Клетчатый квадрат 60×60 разбит на плиточки 2×5. Докажите, что можно задать такое разбиение квадрата на прямоугольники 1×3, что каждая плиточка 2×5 будет содержать целиком хотя бы один прямоугольник. (*О. Иванова*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2016 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 7 класс.

1. На экране своенравного калькулятора написано двузначное число. Калькулятор может умножить число на экране на 2 и вычесть из результата какое-нибудь натуральное число от 1 до 10 (при следующей операции он может вычесть другое число от 1 до 10). Известно, что такими операциями калькулятор может из исходного числа получить 2015. Докажите, что он может получить и 2016. (*К. Сухов*)

2. На сторонах треугольника отметили по точке и соединили их так, как показано на рисунке. При этом образовались равные отрезки. Докажите, что $a = c$. (*К. Кохась*)



3. На острове Невезения мужчины по средам всегда говорят правду, а по четвергам всегда лгут, а женщины — наоборот. В среду каждый из них сказал: “У меня знакомых мужчин на 1 больше, чем знакомых женщин”, а в четверг — “Среди незнакомых мне жителей деревни мужчин на 1 больше, чем женщин”. Могло ли на острове быть ровно 2015 жителей? (*А. Солынин*)

4. Доска 8×8 красится в два цвета. Раскраска называется *ладейной*, если ладья может пройти от верхней стороны доски до нижней по белым клеткам, переходя каждым шагом с клетки на соседнюю по стороне клетку. Докажите, что количество ладейных раскрасок меньше половины общего числа раскрасок. (*фольклор*)

. . . .

Олимпиада 2016 года. II тур. 7 класс. Выводная аудитория.

5. На доске написано несколько степеней четверки (не обязательно различных). Андрей задумал еще одну степень четверки, которая больше каждого числа, написанного на доске, но не превосходит их суммы. Докажите, что Андрей может подчеркнуть несколько чисел на доске так, чтобы их сумма равнялась задуманному числу. (*А. Храбров в обработке К. Сухова*)

6. В остроугольном треугольнике провели три высоты. Докажите, что из получившихся шести отрезков (трёх сторон и трёх высот) можно составить два треугольника. (*С. Берлов*)

7. На плацу нарисован квадрат 9×9, в каждой клетке стоит по солдату. Демократичный старшина за один ход указывает на двух солдат, стоящих в соседних по стороне клетках, и один из них (на выбор солдат) уходит чистить картошку. Как только оказывается, что у кого-то из стоящих солдат ушли два соседа по стороне, процесс прекращается. Какое наибольшее количество солдат старшина может отправить на чистку картошки, независимо от действий солдат?

(*А. Солынин, А. Кузнецов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2016 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 8 класс.

---

1. На острове Невезения мужчины по средам всегда говорят правду, а по четвергам всегда лгут, а женщины — наоборот. В среду каждый из них сказал: "У меня знакомых мужчин на 1 больше, чем знакомых женщин", а в четверг — "У меня знакомых женщин на 1 больше, чем мужчин". Могло ли на острове быть ровно 2015 жителей? (*А. Солынин*)

2. Даны числа $x, y \geq 0$. Докажите, что

$$x^2 + xy + y^2 \leq 3(x - \sqrt{xy} + y)^2.$$

(*А. Храбров*)

3. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена биссектриса AD. На основании AC отмечена точка E, такая что $AE = DC$. Биссектриса угла AED пересекает сторону AB в точке F. Докажите, что $\angle AFE = \angle DFE$.

(*А. Кузнецов, А. Пастор*)

4. Клетчатый квадрат 60×60 разбит на плиточки 2×5. Докажите, что можно задать такое разбиение квадрата на прямоугольники 1×3, что каждая плиточка 2×5 будет содержать целиком хотя бы один прямоугольник. (*О. Иванова*)

. . . .

Олимпиада 2016 года. II тур. 8 класс. Выводная аудитория.

5. Вася выписал в строку 100 последовательных чисел. Во второй строке под каждым числом он написал его собственный делитель. В третьей строке он под каждым числом из второй строки написал его собственный делитель и т.д., пока не получилось 1000 строк. Могло ли так быть, что в каждой строке написаны последовательные числа? (*В. Франк*)

6. На полке в камере хранения стоят 13 чемоданов, занумерованных в некотором порядке числами от 1 до 13. Чемоданы имеют разную ширину и стоят не обязательно вплотную друг к другу и к краям полки. Кладовщик вынимает с полки чемодан № 1 и ставит его в самое левое из возможных положений, не сдвигая другие чемоданы. Затем он берет чемодан № 2 и ставит его в самое левое положение, не сдвигая другие и т. д. После перестановки чемодана № 13 кладовщик снова переходит к чемодану № 1 и т. д. Найдите наименьшее натуральное n такое, что для любой начальной расстановки чемоданов после n операций каждый чемодан кладовщик заведомо будет ставить на то место, откуда его взял. (Если чемодан ставят на место, откуда его взяли, это все равно засчитывается как выполненная операция). (*А. Храбров*)

7. Внутри треугольника ABC отмечена точка T, из которой все стороны видны под углом $120°$. Докажите, что

$$2AB + 2BC + 2CA \geq 4AT + 3BT + 2CT.$$

(*А. Кузнецов*)