САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2016 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 9 класс.

---

1. Даны три квадратных трехчлена f, g, h, не имеющие корней. Их старшие коэффициенты одинаковы, а все их коэффициенты при x различны. Докажите, что существует такое число c, что уравнения

$$f(x)+cg(x)=0 \qquad \text{и} \qquad f(x)+ch(x)=0$$

имеют общий корень. (*А. Храбров*)

2. На доске 300×300 расставлено несколько ладей, которые бьют всю доску. При этом каждая ладья бьёт не более чем одну другую ладью. При каком наименьшем k можно заведомо утверждать, что в каждом квадрате $k\times k$ стоит хотя бы одна ладья? (*С. Берлов*)

3. На стороне AB неравнобедренного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AC=AP$ и $BC=BQ$. Серединный перпендикуляр к отрезку PQ пересекает биссектрису угла C в точке R (внутри треугольника). Докажите, что

$$\angle ACB+\angle PRQ=180^\circ.$$

(*А. Кузнецов*)

4. Два различных простых числа p и q отличаются менее чем в два раза. Докажите, что существуют такие два последовательных натуральных числа, что у одного из них наибольший простой делитель равен p, а у другого — q. (*А. Голованов*)

. . . .

Олимпиада 2016 года. II тур. 9 класс. Выводная аудитория.

5. Костя и Сергей играют в игру на белой полоске длины 2016. Костя (он ходит первым) за один ход должен закрасить черным две соседних белых клетки. Сергей своим ходом должен закрасить либо одну белую клетку, либо три соседних белых клетки. Запрещается делать ход, после которого образуется белая клетка, не имеющая белых соседей. Проигрывает не имеющий хода. Однако, если все клетки закрашены, то выигрывает Костя. Кто выиграет при правильной игре? (*К. Тыщук*)

6. Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны AC в точке D. Отрезок BD повторно пересекает окружность в точке E. Точки F и G на окружности таковы, что $FE \parallel BC$ и $GE \parallel BA$. Докажите, что отрезок, соединяющий центры вписанных окружностей треугольников DEF и DEG, делится пополам биссектрисой угла GDF. (*Ф. Бахарев*)

7. Блок из N подряд идущих натуральных чисел называется хорошим, если произведение каких-то двух из них делится на сумму остальных. Для каких N существует бесконечно много хороших блоков? (*С. Берлов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2016 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 10 класс.

1. Саша перемножил все делители натурального числа n. Федя увеличил каждый делитель на 1, а потом перемножил результаты. Федино произведение нацело делится на Сашино. Чему может быть равно n? (*Ф. Петров*)

2. Даны положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, такие что $x_i \leqslant 2x_j$ при $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Докажите, что найдутся такие положительные числа $y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_n$, что $x_k \leqslant y_k \leqslant 2x_k$ при всех $k = 1, 2, \ldots, n$. (*П. Затицкий, Ф. Петров*)

3. Вписанная в треугольник ABC окружность касается стороны AC в точке B_1, а стороны BC в точке A_1. На стороне AB нашлась такая точка K, что $AK = KB_1$, $BK = KA_1$. Докажите, что $\angle ACB \geqslant 60°$. (*А. Кузнецов, Ф. Петров*)

4. Раскраска клеток таблицы 100×100 в чёрный и белый цвета называется *допустимой*, если в каждой строке и каждом столбце от 50 до 60 чёрных клеток. Разрешается изменить цвет одной из клеток допустимой раскраски, если она остаётся допустимой. Докажите, что такими операциями можно получить из любой допустимой раскраски любую другую. (*О. Иванова*)

. . . .

Олимпиада 2016 года. II тур. 10 класс. Выводная аудитория.

5. Точки A и P лежат вне прямой ℓ. Рассматриваются всевозможные прямоугольные треугольники ABC с гипотенузой, лежащей на ℓ. Докажите, что окружности, описанные около треугольников PBC, имеют общую точку, отличную от P. (*Ф. Бахарев*)

6. В окружность вписана замкнутая 100-звенная ломаная, никакие три звена которой не проходят через одну точку. Все ее углы тупые, и их сумма в градусах делится на 720. Докажите, что у этой ломаной нечетное число точек самопересечения. (*С. Иванов*)

7. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами и натуральное число $a > 1$ таковы, что для любого целого x найдётся целое z, для которого

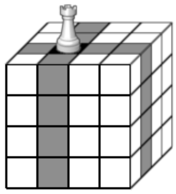
$$aP(x) = P(z).$$

Найдите все такие пары $(P(x), a)$. (*А. Голованов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2016 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 11 класс.

1. В последовательности целых чисел (a_n) сумма $a_m + a_n$ делится на $m + n$ при любых различных m и n. Докажите, что a_n кратно n при любом n. (*О. Иванова*)

2. Ладья, стоящая на поверхности клетчатого куба, бьёт клетки, находящиеся с той клеткой, где она стоит, в одном ряду, а также на продолжениях этого ряда через одно или даже несколько ребёр. (На картинке показан пример для куба $4 \times 4 \times 4$; видимые клетки, которые бьёт ладья, закрашены серым.) Какое наибольшее количество не бьющих друг друга ладей можно расставить на поверхности куба $50 \times 50 \times 50$? (*А. Чухнов*)



3. В тетраэдре середины всех ребер лежат на одной сфере. Докажите, что его высоты пересекаются в одной точке. (*Д. Максимов*)

4. По окружности движутся $n > 4$ точек, каждая — с постоянной скоростью. Для любых четырех из них есть момент времени, когда они все встречаются. Докажите, что есть момент, когда все точки встречаются. (*С. Иванов*)

. . . .

Олимпиада 2016 года. II тур. 11 класс. Выводная аудитория.

5. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AC в точке D. Отрезок BD повторно пересекает окружность в точке E. Точки F и G на окружности таковы, что $FE \parallel BC$ и $GE \parallel BA$. Докажите, что прямая, соединяющая центры вписанных окружностей треугольников DEF и DEG, перпендикулярна биссектрисе угла B. (*Ф. Бахарев*)

6. В стране 50 городов, каждые два города соединены (двусторонними) авиалиниями, цены всех перелетов попарно различны (для любой пары городов цена перелета «туда» равна цене «обратно»). В каждом городе находится турист. Каждый вечер все туристы переезжают: богатые туристы — по самой дорогой, бедные — по самой дешевой линии, ведущей из соответствующего города. Через k дней оказалось, что в каждом городе снова по одному туристу. За это время ни один турист не посетил никакой город дважды. При каком наибольшем k такое возможно? (*К. Кохась*)

7. Для многочлена $P(x)$ с вещественными коэффициентами можно указать вещественное число $a > 1$ такое, что при каждом целом x существует целое z, для которого $aP(x) = P(z)$. Найдите все такие многочлены $P(x)$. (*А. Голованов*)