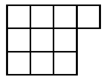
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2016 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 6 класс.

1. Расставьте в клетках указанной фигурки числа от 5 до 14 так, чтобы суммы чисел во всех доминошках были разными (доминошка — это прямоугольник, состоящий из двух клеток, соседних по стороне). (*А. Чухнов*)



2. Приходя в школу, Вася здоровается со всеми одноклассниками (кроме, разумеется, самого себя). К началу уроков Вася не успел поздороваться ровно с одной четвертью от общего числа учеников своего класса, в том числе, с Колей. А Коля к этому времени поздоровался ровно с одной седьмой из тех одноклассников, с которыми поздоровался Вася. Какое наименьшее число учеников может быть в классе? Не забудьте обосновать ответ. (*С. Берлов*)

3. Надя задумала число n, делящееся на 500, и выписала на доску все его натуральные делители, кроме самого числа n. Докажите, что сумма нечетных чисел на доске меньше, чем сумма четных. (*А. Голованов*)

4. Дети в классе угощали друг друга конфетами. Каждый мальчик дал по конфете всем, кто выше его, а каждая девочка — всем, кто ниже ее (все дети разного роста). Оказалось, что Саша, Женя и Валя получили поровну конфет, а все остальные — меньше, чем они. Докажите, что кто-то из этих троих — девочка. (*О. Иванова*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2016 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 7 класс.

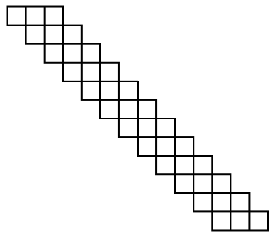
1. На круговом шоссе длиной 13 км находятся пять различных населённых пунктов A, B, C, D, E. Может ли быть так, что кратчайшее расстояние по шоссе от A до B равно 3 км, от B до C — 6 км, от C до D — 4 км, от D до E — 5 км, а от E до A — 6 км? (*В. Франк*)

2. В клетках квадрата 7×7 стоит 100 крестиков. Нашлось три горизонтали, в клетках которых в сумме содержится не менее 70 крестиков, и три аналогичные вертикали. Докажите, что либо в какой-то клетке нет ни одного крестика, либо найдется клетка, в которой стоит не меньше семи крестиков (либо и то, и другое). (*А. Солынин*)

3. На доске написано 10 последовательных целых чисел (среди них могут быть и отрицательные). Школьнику, указавшему число, после вычёркивания которого сумма оставшихся девяти чисел на доске является квадратом целого числа, Мария Ивановна ставит пятёрку (если это число еще не было никем названо ранее). Какое наибольшее количество пятёрок могли получить ученики Марии Ивановны? Не забудьте объяснить, почему невозможно получить большее количество пятёрок.

(*А. Голованов*)

4. Дана «лесенка» из 12 строчек (см. рисунок). Костя расставляет в её клетках числа от 1 до 36 так, чтобы в каждой горизонтали и в каждой вертикали числа возрастали (слева направо и сверху вниз). Сколькими способами он сможет это сделать? (*К. Кохась*)



САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2016 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 8 класс.

---

1. Вдоль кругового шоссе построено 30 домов высотой 1, 2, 3, ..., 30 этажей (ровно по одному дому каждой высоты). Назовем дом *интересным*, если он выше одного из соседних с ним домов, но ниже другого. Оказалось, что среди этих домов ровно 10 интересных. Докажите, что суммарная высота интересных домов не может быть равна 64 этажам.

(*В. Самойлов*)

2. На доске написано 10 последовательных целых чисел (среди них могут быть и отрицательные). Школьнику, указавшему число, после вычёркивания которого сумма оставшихся девяти чисел на доске является квадратом целого числа, Мария Ивановна ставит пятёрку (если это число еще не было никем названо ранее). Какое наибольшее количество пятёрок могли получить ученики Марии Ивановны? Не забудьте объяснить, почему невозможно получить большее количество пятёрок.

(*А. Голованов*)

3. Районную олимпиаду писало 9000 школьников. Каждый из них получил *оценку* от 0 до 15 баллов. При занесении в компьютер оценки 12, 13 или 14 баллов были заменены на 15 баллов, а оценки 1, 2 или 3 балла — на 0 баллов (остальные оценки не менялись). В результате средний балл всех участников уменьшился на 0,1 балла. Докажите, что до исправления можно было указать две такие оценки a и b, что число школьников с оценкой a баллов и число школьников с оценкой b баллов отличались не менее чем на 150. (*А. Кузнецов*)

4. Точки P и Q лежат в выпуклом четырехугольнике $ABCD$, в котором две наибольшие стороны противоположны и равны. Для каждой из этих двух точек посчитали сумму расстояний до вершин четырехугольника. Докажите, что эти суммы отличаются не больше чем в 2 раза.

(*С. Берлов*)

5. В школе учится 100 мальчиков и 100 девочек. Каждая девочка знакома хотя бы с одним мальчиком, а каждый мальчик — хотя бы с одной девочкой. Однажды каждая девочка сказала: *Среди знакомых мне мальчиков не менее двух третей — двоечники*, а каждый мальчик сказал: *Среди знакомых мне девочек не менее половины — троечницы.* Известно, что все дети сказали правду, но при этом в школе всего 10 мальчиков — двоечники. Какое наименьшее число девочек может быть троечницами? (*А. Солынин*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2016 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 9 класс.

1. Можно ли так разбить целые числа от 0 до 301 на пары, числа в парах сложить, и эти суммы перемножить, чтобы полученное произведение оказалось 15-й степенью натурального числа? (*А. Храбров*)

2. В городе Глупове 6000 школьников писали Единый Глуповский Экзамен, за который можно было получить от 0 до 8 баллов. После проверки всем участникам, набравшим 1, 2 или 3 балла, результат был исправлен на 0 баллов, а всем, у кого было 5, 6 или 7 баллов, поставили 8 баллов (остальные результаты не исправлялись). В результате этих махинаций средний балл всех участников вырос на 0,1 балла. Докажите, что существуют такие целые числа a и b ($0 \leq a, b \leq 8$), что количество школьников, у которых до махинаций был результат a баллов, и количество школьников, имевших до махинаций результат b баллов, отличаются не меньше чем на 100. (*А. Кузнецов*)

3. В ряд выписано несколько нулей и единиц. Среди любых 200 цифр подряд нулей и единиц поровну, а среди любых 202 цифр подряд — не поровну. Какое наибольшее количество цифр может располагаться в этом ряду? (*С. Берлов*)

4. Квадратный трехчлен $2ax^2 + bx + c$ с положительным старшим коэффициентом таков, что каждая из прямых

$$y = ax + b, \qquad y = bx + c, \qquad y = ax + c,$$
$$y = bx + a, \qquad y = cx + b, \qquad y = cx + a$$

пересекает его график не более чем в одной точке. Какое максимальное значение может принимать величина c/a? (*А. Солынин*)

5. В треугольнике ABC продолжения медиан из вершин A и B пересекают описанную окружность в точках A_1 и B_1 соответственно. На стороне AC выбрана точка P, а на стороне BC — точка Q так, что $AP = 2PC$, $BQ = 2QC$. Докажите, что $\angle APB_1 = \angle BQA_1$. (*А. Кузнецов*)

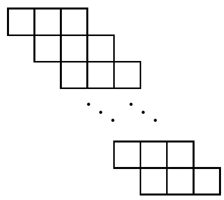
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2016 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 10 класс.

---

1. По кругу выписано 29 ненулевых цифр. Любые две соседние цифры можно прочесть по часовой стрелке как двузначное число. Рассмотрим эти 29 двузначных чисел, образованных соседними цифрами. Может ли их произведение быть точным квадратом? (*А. Кузнецов*)

2. Биссектриса угла A равнобедренной трапеции $ABCD$ пересекает основание BC в точке K. Описанная окружность треугольника AKD пересекает сторону AB в точке L. Докажите, что $BL = KC$. (*С. Берлов*)

3. Дана «лесенка» 100×3 (в каждой строчке 3 клетки, каждая следующая строчка сдвинута по сравнению с предыдущей на одну клетку вправо). Сколькими способами можно расставить в ней числа от 1 до 300 так, чтобы в каждой горизонтали и в каждой вертикали числа возрастали (слева направо и сверху вниз)? (*К. Кохась*)



4. Существует ли такой квадратный трёхчлен $f(x)$ с вещественными коэффициентами, что каждое из уравнений

$$f(x) = f(6x-1), \qquad f(t) = f(3-15t)$$

имеет (хотя бы одно) целочисленное решение? (*Ф. Петров*)

5. Положительные числа $a \leqslant b \leqslant c$ и натуральное число n удовлетворяют условию $a^n + b^n = c^n$. Докажите неравенство $c - b \leqslant (\sqrt[n]{2} - 1)a$. (*А. Храбров*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2016 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 11 класс.

1. Уравнение $ax + \frac{c}{x} = b$, в котором коэффициенты a, b и c отличны от нуля, имеет решение. Докажите, что тогда имеет решение и одно из уравнений $ax + \frac{c}{x} = b + 1$ и $ax + \frac{c}{x} = b - 1$. (*А. Голованов*)

2. По кругу расставили числа от 1 до 40. Число называется *хорошим*, если оно делится на число, стоящее справа от него. Какое наибольшее количество чисел могут оказаться хорошими? (*С. Берлов*)

3. Биссектриса угла A равнобедренной трапеции $ABCD$ пересекает основание BC в точке K. Описанная окружность треугольника AKD пересекает сторону AB в точке L. Докажите, что $BL = KC$. (*С. Берлов*)

4. Функция f при всех $x, y \in \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству

$$f(x^2 + 2y) \geq f(x^2 + 3y).$$

Известно, что $f(100) = 100$. Найдите $f(200)$. (*А. Голованов*)

5. На доске написаны два числа: 10^6 и 10^9. Разрешается дописать на доску среднее арифметическое двух уже написанных чисел, если это число целое и ещё не было написано ранее. Сколько чисел можно таким образом написать? (*А. Солынин*)