



Комитет по образованию Санкт-Петербурга  
Санкт-Петербургский государственный университет  
Российский государственный педагогический университет  
Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных  
СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

12 ДЕКАБРЯ 2015 Г.

I ТУР

9 КЛАСС

1 ВАРИАНТ

1. Можно ли так разбить целые числа от 0 до 301 на пары, числа в парах сложить, и эти суммы перемножить, чтобы полученное произведение оказалось 15-й степенью натурального числа?

2. В городе Глупове 6000 школьников писали Единый Глуповский Экзамен, за который можно было получить от 0 до 8 баллов. После проверки всем участникам, набравшим 1, 2 или 3 балла, результат был исправлен на 0 баллов, а всем, у кого было 5, 6 или 7 баллов, поставили 8 баллов (остальные результаты не исправлялись). В результате этих махинаций средний балл всех участников вырос на 0,1 балла. Докажите, что существуют такие целые числа  $a$  и  $b$  ( $0 \leq a, b \leq 8$ ), что количество школьников, у которых до махинаций был результат  $a$  баллов, и количество школьников, имевших до махинаций результат  $b$  баллов, отличаются не меньше чем на 100.

3. В ряд выписано несколько нулей и единиц. Среди любых 200 цифр подряд нулей и единиц поровну, а среди любых 202 цифр подряд — не поровну. Какое наибольшее количество цифр может располагаться в этом ряду?

4. Квадратный трехчлен  $2ax^2 + bx + c$  с положительным старшим коэффициентом таков, что каждая из прямых

$$y = ax + b, \quad y = bx + a, \quad y = bx + c, \quad y = cx + b, \quad y = ax + c, \quad y = cx + a$$

пересекает его график не более чем в одной точке. Какое максимальное значение может принимать величина  $c/a$ ?

5. В треугольнике  $ABC$  продолжения медиан из вершин  $A$  и  $B$  пересекают описанную окружность в точках  $A_1$  и  $B_1$  соответственно. На стороне  $AC$  выбрана точка  $P$ , а на стороне  $BC$  — точка  $Q$  так, что  $AP = 2PC$ ,  $BQ = 2QC$ . Докажите, что  $\angle APB_1 = \angle BQA_1$ .

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:

ФАМИЛИЯ, ИМЯ; ТЕЛЕФОН.

КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ;

ФИО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ.

ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.

Если Вы занимаетесь в кружке математики —

ФИО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ КРУЖКА, МЕСТО ЗАНЯТИЙ.

Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах

[www.pdmi.ras.ru/~olymp](http://www.pdmi.ras.ru/~olymp) и [www.anichkov.ru/olimpus/matem](http://www.anichkov.ru/olimpus/matem)

13 декабря жюри проведет онлайн-разбор олимпиады. Подробности на сайте

[foxford.ru/spb](http://foxford.ru/spb)



Комитет по образованию Санкт-Петербурга  
Санкт-Петербургский государственный университет  
Российский государственный педагогический университет  
Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных  
СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

12 ДЕКАБРЯ 2015 Г.

I ТУР

9 КЛАСС

2 ВАРИАНТ

1. Можно ли так разбить целые числа от 0 до 201 на пары, числа в парах сложить, и эти суммы перемножить, чтобы полученное произведение оказалось 10-й степенью натурального числа?

2. В деревне Гадюкино жило 8000 пенсионеров. Каждый из них получал пенсию в размере от 1000 до 8000 рублей (целое число тысяч). После пенсионной реформы гадюкинцы, получавшие пенсию 4000 руб. или менее, стали получать 2000 руб., а те кто получал 5000 руб. или более, стали получать 7000 руб. В результате средний размер пенсии уменьшился на 100 руб. Докажите, что существуют такие натуральные числа  $a$  и  $b$  ( $1 \leq a, b \leq 8$ ), что количество пенсионеров, получавших до реформы пенсию  $a$  тысяч рублей, хотя бы на 200 больше количества пенсионеров, получавших до реформы пенсию  $b$  тысяч рублей.

3. В ряд выстроилось несколько мальчиков и девочек. Среди любых 300 детей подряд мальчиков и девочек поровну, а среди любых 302 детей подряд — не поровну. Какое наибольшее количество детей может стоять в этом ряду?

4. Квадратный трехчлен  $3ax^2 + bx + c$  с положительным старшим коэффициентом таков, что каждая из прямых

$$y = ax + b, \quad y = bx + a, \quad y = bx + c, \quad y = cx + b, \quad y = ax + c, \quad y = cx + a$$

пересекает его график не более чем в одной точке. Какое минимальное значение может принимать величина  $a/c$ ?

5. В треугольнике  $ABC$  продолжения медиан из вершин  $B$  и  $C$  пересекают описанную окружность в точках  $B_1$  и  $C_1$  соответственно. На стороне  $AC$  выбрана точка  $P$ , а на стороне  $AB$  — точка  $Q$  так, что  $CP = 2PA$ ,  $BQ = 2QA$ . Докажите, что  $\angle AQC_1 = \angle APB_1$ .

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:

ФАМИЛИЯ, ИМЯ; ТЕЛЕФОН.

КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ;

ФИО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ.

ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.

Если Вы занимаетесь в кружке математики —

ФИО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ КРУЖКА, МЕСТО ЗАНЯТИЙ.

Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах

[www.pdmi.ras.ru/~olymp](http://www.pdmi.ras.ru/~olymp) и [www.anichkov.ru/olimpus/matem](http://www.anichkov.ru/olimpus/matem)

13 декабря жюри проведет онлайн-разбор олимпиады. Подробности на сайте

[foxford.ru/spb](http://foxford.ru/spb)