САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2017 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 9 класс.

---

1. Сашин компьютер умеет делать две операции. Если в него загрузить карточку с числом a, то он вернет ее назад и напечатает еще карточку с числом $a+1$. Если же в него последовательно загрузить карточки с числами a и b, то он вернет их назад и напечатает карточки со всеми корнями квадратного трехчлена $x^2 + ax + b$ (одну, две, или ни одной). Изначально у Саши была лишь карточка с числом s. Верно ли, что при любом $s > 0$ Саша сможет в какой-то момент получить карточку с числом $\sqrt{s}$? (*А. Храбров*)

2. В треугольнике ABC на стороне AB нашлась такая точка X, что $2BX = BA+BC$. Точка Y симметрична центру I вписанной окружности треугольника ABC относительно точки X. Докажите, что YI_B перпендикулярно AB, где I_B — центр вневписанной со стороны AC окружности треугольника ABC. (*Ф. Бахарев*)

3. Петя, Вася и Толя играют на доске 100×100 в следующую игру. Они по очереди (начинает Петя, потом Вася, потом Толя, затем Петя и т. д.) закрашивают граничные клетки доски (т. е. имеющие общую сторону с границей доски). Запрещается закрашивать клетку, соседнюю по стороне с уже закрашенной. Кроме того, нельзя закрашивать клетку, симметричную уже закрашенной относительно центра доски. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Могут ли Вася и Толя, договорившись, играть так, чтобы Петя проиграл? (*С. Берлов*)

4. В клетках таблицы $3 \times n$ записаны натуральные числа. В каждой из трёх строчек встречается по одному разу числа $1, 2, \ldots, n$. Для каждого столбца сумма попарных произведений стоящих в нём трех чисел кратна n. При каких n это возможно? (*Н. Филонов*)

. . . .

Олимпиада 2017 года. II тур. 9 класс. Выводная аудитория.

5. В неравнобедренном треугольнике ABC угол B равен $130°$. Точка H — основание высоты из вершины B. На сторонах AB и BC нашлись точки D и E соответственно, такие что $DH = EH$ и четырехугольник $ADEC$ — вписанный. Найдите угол DHE. (*Д. Ширяев, С. Берлов*)

6. Числа a, b и c лежат в промежутке $[0, 1)$ и удовлетворяют соотношению $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Какое наименьшее значение может принимать величина

$$\frac{a}{\sqrt{1-a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1-b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1-c^2}}?$$

(*А. Храбров*)

7. Назовем *клетчатым квадрантом* четверть плоскости, расположенную выше оси X и правее оси Y, разбитую на клеточки со стороной 1. В клетчатом квадранте закрашены n^2 клеток. Докажите, что в этом квадранте найдется не менее $n^2 + n$ клеток (в том числе, закрашенных), соседних по стороне с хотя бы одной закрашенной. (*С. Берлов, Д. Ширяев*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2017 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 10 класс.

1. У квадратного трехчлена разрешается заменить любой из трех его коэффициентов на его дискриминант. Верно ли, что из любого квадратного трехчлена, не имеющего корней, можно за несколько таких операций получить квадратный трехчлен, имеющий корень? (*А. Кузнецов*)

2. Последовательность (a_n) удовлетворяет соотношениям $a_1 > 10$ и

$$a_n = a_{n-1} + \text{НОД}(n, a_{n-1}) \quad \text{при } n > 1.$$

Известно, что в этой последовательности есть член, в два раза больший своего номера. Докажите, что таких членов бесконечно много. (*А. Храбров*)

3. В остроугольном треугольнике ABC провели медиану AM, высоту AH и биссектрису AL. Оказалось, что точки B, H, L, M, C лежат на прямой BC именно в таком порядке, причем $LH < LM$. Докажите, что $BC > 2AL$. (*А. Кузнецов*)

4. На доске написаны числа от 1 до 2000^2. Вася выбрал из них 2000 чисел, сумма которых в 2000 раз меньше суммы всех чисел на доске, и покрасил их в красный цвет. Докажите, что его друг Петя сможет покрасить остальные числа в другие 1999 цветов (в каждый цвет по 2000 чисел) так, чтобы суммы чисел каждого цвета были одинаковы. (*А. Голованов*)

. . . .

Олимпиада 2017 года. II тур. 10 класс. Выводная аудитория.

5. Даны положительные числа x, y, z, удовлетворяющие соотношению $\sqrt{xyz} = xy + xz + yz$. Докажите, что $x + y + z \le 1/3$. (*А. Храбров*)

6. В остроугольном треугольнике ABC проведены высота AH и медиана BM. На описанной окружности треугольника BHM отмечена такая точка D, что $AD \parallel BM$ и точки B и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AC. Докажите, что $BC = BD$. (*А. Кузнецов*)

7. В стране некоторые пары городов соединены дорогами с односторонним движением, причем из любого города можно проехать в любой другой. Из каждого города выходит хотя бы две дороги и в каждый город входит хотя бы две дороги. Докажите, что можно найти циклический маршрут и удалить все его дороги так, что по-прежнему из любого города можно будет проехать в любой другой.

(*Д. Карпов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2017 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 11 класс.

1. Ученики школы посещают m кружков. В каждый кружок ходит ровно mk детей. Докажите, что можно рассадить всех учеников школы по k кабинетам так, чтобы в каждом кабинете был хотя бы один представитель каждого кружка (m и k — натуральные числа). (*Д. Черкашин*)

2. Окружность, проходящая через вершины A и B треугольника ABC, пересекает стороны AC и BC в точках P и Q соответственно. Медиана из вершины C делит дугу PQ этой окружности пополам. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный. (*Д. Максимов*)

3. Числа x, y, z, $t \in (0, \pi/2]$ удовлетворяют условию

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z + \cos^2 t = 1\,.$$

Какое наименьшее значение может принимать величина

$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} z + \operatorname{ctg} t?$$

(*А. Храбров*)

4. Натуральное число n назовём *почти квадратом*, если n можно представить в виде $n = ab$, где a и b — натуральные числа, причем $a \le b \le 1{,}01a$. Докажите, что для бесконечно многих натуральных m среди чисел m, $m+1$, $m+2$, …, $m+198$ нет почти квадратов. (*А. Голованов*)

. . . .

Олимпиада 2017 года. II тур. 11 класс. Выводная аудитория.

5. В тетраэдре $PABC$ проведена высота PH. Из точки H на прямые PA, PB и PC опущены перпендикуляры HA', HB' и HC'. Плоскости ABC и $A'B'C'$ пересекаются по прямой ℓ. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Докажите, что прямые OH и ℓ перпендикулярны. (*А. Кузнецов*)

6. В стране некоторые математики знакомы между собой и при любом разбиении математиков на две непустые группы найдутся двое знакомых из разных групп. Известно, что если посадить за круглый стол любой набор из 4 или более математиков так, чтобы любые два соседа были знакомы, то за столом найдутся двое знакомых, не сидящих рядом. Обозначим через c_i количество наборов из i попарно знакомых математиков. Докажите, что $c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \ldots = 1$. (*Ф. Петров*)

7. На плоскости дан выпуклый многоугольник с вершинами в целых точках, содержащий внутри начало координат O. Пусть V_1 — множество векторов, идущих из O в вершины многоугольника, а V_2 — множество векторов, идущих из O во все целые точки, содержащиеся внутри и на границе многоугольника (таким образом, V_1 содержится в V_2). Два кузнечика прыгают по целым точкам: каждый прыжок первого кузнечика смещает его на вектор из множества V_1, а второго — из V_2. Докажите, что для некоторого числа c верно следующее утверждение: если оба кузнечика могут допрыгать из O до некоторой точки A, причем второму понадобится для этого n прыжков, то первый сможет сделать это не более чем за $n + c$ прыжков.

(*А. Акопян*)