САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2018 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 6 класс.

1. В тетрадь записали все натуральные делители натурального числа a, а затем — все натуральные делители натурального числа b. В результате в тетради оказалось записано четное количество чисел. Катя разбила все эти числа на пары и посчитала произведение чисел в каждой паре. (Например, при $a = 2, b = 6$ в тетради окажется 6 чисел — $1, 2, 1, 2, 3, 6$; они будут разбиты на 3 пары.) Все Катины произведения оказались равными. Докажите, что $a = b$. (*С. Берлов*)

2. В какое наименьшее количество цветов можно покрасить клетки квадрата 5×5 так, чтобы среди любых трех клеток, идущих подряд по вертикали, горизонтали или диагонали, не было одноцветных? (*М. Антипов*)

3. За круглым столом сидят 300 человек: некоторые из них рыцари, а остальные — лжецы. Антон спросил у каждого из них: «Сколько лжецов среди твоих соседей?» и сложил полученные числа. Затем Аня сделала то же самое. Отвечая на вопрос, рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут, но называют лишь числа 0, 1 или 2. Оказалось, что сумма чисел у Антона оказалась на 400 больше, чем у Ани. Сколько за столом лжецов? Найдите все возможные варианты ответа и докажите, что других нет. (*А. Чухнов*)

4. На доске написано число 2018. За один ход Саша может приписать справа к числу на доске одну цифру, а Андрей — две. Если после хода Андрея число на доске станет делиться на 112, он побеждает. Если этого не произойдет, и на доске окажется выписано 2018-значное число, выигрывает Саша. Кто из игроков может обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника? (*А. Кузнецов*)

. . . .

Олимпиада 2018 года. II тур. 6 класс. Выводная аудитория.

5. В турнире по крестикам-ноликам каждые два участника сыграли между собой по две партии (ничьих не бывает, играющий крестиками перед каждой партией определяется жребием). За победу начислялось одно очко. В результате все участники набрали разное количество очков. Потом организаторы посчитали такую схему несправедливой и добавили по одному очку за каждую победу ноликами. Могли ли после этого все участники набрать поровну очков? (*А. Солынин*)

6. На прямой дороге, идущей с севера на юг, стоит воз, которым управляет Лебедь. Ровно в полночь Рак и Щука выбрали натуральные числа $m > n$. Каждые n минут (т. е. через n, $2n$, $3n\ldots$ минут после полуночи) Щука командует «На юг!», а каждые m минут (через m, $2m$, $3m\ldots$ минут после полуночи) Рак командует «На север!». Услышав любую команду, Лебедь немедленно начинает (или продолжает) тащить воз в указанную сторону со скоростью 1 м/мин. До первой команды воз был неподвижен. Через mn минут после полуночи Рак и Щука впервые дали Лебедю одновременно две разные команды, и уставший Лебедь остановил воз. На каком расстоянии от исходного места он оказался в этот момент? (*К. Тыщук*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2018 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 7 класс.

---

1. В клетках квадрата 9×9 стоят неотрицательные числа. Сумма чисел в любых двух соседних строках не меньше 20, а сумма чисел в любых двух соседних столбцах не превосходит 16. Чему может быть равна сумма чисел во всей таблице?

(*А. Чухнов*)

2. Многие жители города занимаются танцами, многие — математикой, а хотя бы один — и тем, и другим. Тех, кто занимается только танцами, ровно в $p+1$ раз больше чем тех, кто занимается только математикой, где p — некоторое простое число. Если возвести в квадрат количество всех математиков, получится количество всех танцоров. Сколько жителей увлекается и математикой, и танцами одновременно?

(*Д. Ширяев*)

3. Вася написал 100-значное число. Потом всеми возможными способами выбрал пару цифр, сложил цифры в каждой паре и получившиеся 4950 чисел перемножил. Мог ли Вася в результате получить исходное число? (*С. Берлов*)

4. Вася расставил во всех клетках доски 99×99 числа от 1 до 99^2 по одному разу. Петя выбирает клетку доски, ставит на нее шахматного короля и хочет сделать как можно больше ходов королем так, чтобы число под ним постоянно увеличивалось. Какое наибольшее число ходов Петя заведомо сможет сделать, как бы Вася ни расставлял числа? (*С. Берлов*)

. . . .

Олимпиада 2018 года. II тур. 7 класс. Выводная аудитория.

5. На доске написано число 2018. За один ход Саша приписывает справа к числу на доске одну цифру, а Андрей — две. Игроки ходят по-очереди, начинает Саша. Если после хода Андрея число на доске будет делиться на 111, он побеждает. Если этого не произойдет, и на доске окажется выписано 2018-значное число, выигрывает Саша. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию? (*А. Кузнецов*)

6. В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $\angle B > 30^\circ$. Точки D и E лежат на сторонах AB и AC соответственно, причем $AD < AE$. Точка F симметрична точке D относительно прямой BC. Докажите, что $AF > BE$. (*Д. Ширяев*)

7. В стране некоторые города соединены прямыми автобусными рейсами. Жители этой страны считают некоторое нечетное натуральное число n несчастливым, поэтому не существует циклического маршрута, состоящего ровно из n рейсов (и не заходящего ни в один город дважды). Тем не менее, из любого города до любого другого существует путь, содержащий ровно 100 рейсов (и не проходящий ни через один город дважды). При каких нечетных n это возможно?

(*А. Солынин, А. Чухнов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2018 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 8 класс.

---

1. По кругу сидят 300 человек: некоторые из них рыцари, а остальные — лжецы. Антон спросил у каждого из них: «Сколько лжецов среди твоих соседей?» и сложил полученные числа. Затем Аня сделала то же самое. Отвечая на вопрос, рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут, но называют лишь числа 0, 1 или 2. Могла ли сумма чисел у Антона оказаться на 410 больше, чем у Ани? (*А. Чухнов*)

2. Внутри угла ABC, равного $105°$, отмечена точка X такая, что $\angle CBX = 70°$ и $BX = BC$. На отрезке BX выбрана точка Y так, что $BY = BA$. Докажите, что $AX + AY \geq CY$. (*А. Кузнецов*)

3. Вася расставил во всех клетках доски 101×101 числа от 1 до 101^2 по одному разу. Петя выбирает клетку доски, ставит на нее фишку и хочет сделать как можно больше ходов так, чтобы число под фишкой постоянно увеличивалось. За один ход Петя может передвинуть фишку в любую клетку квадрата 5×5 с центром в клетке, где сейчас стоит фишка (фишка должна при этом остаться в пределах доски). Какое наибольшее число ходов Петя заведомо сможет сделать, как бы Вася ни расставлял числа? (*С. Берлов*)

4. На доске написано натуральное число. Каждую минуту к числу на доске прибавляется сумма его первых 100 цифр. Докажите, что через некоторое время три раза подряд получится число, не делящееся на 3. (*С. Берлов*)

. . . .

Олимпиада 2018 года. II тур. 8 класс. Выводная аудитория.

5. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ точка M — середина стороны AD, $CM \| AB$, $AD = BD$ и $3\angle BAC = \angle ACD$. Найдите угол ACB. (*С. Берлов*)

6. Сумма положительных чисел a, b, c и d равна 1. Докажите, что

$$\frac{a^2+b^2+c^2+d}{(a+b+c)^3} + \frac{b^2+c^2+d^2+a}{(b+c+d)^3} + \frac{c^2+d^2+a^2+b}{(c+d+a)^3} + \frac{d^2+a^2+b^2+c}{(d+a+b)^3} > 4.$$

(*К. Сухов*)

7. В стране 600 городов, некоторые пары городов соединены дорогами, причем из любого города можно добраться по дорогам в любой другой. Для любых двух соединенных дорогой городов A и B найдутся еще два таких города C и D, что любые два из этих четырёх городов соединены дорогой. Докажите, что можно закрыть на ремонт несколько дорог так, чтобы количество городов, из которых выходит ровно две дороги, стало меньше 100, и при этом между любыми двумя городами остался единственный путь, не проходящий два раза по одной и той же дороге. (*Д. Карпов*)