САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2018 года ПО МАТЕМАТИКЕ

I тур. 6 класс.

1. Саша лег спать в 10 вечера и завел будильник (со стрелками и циферблатом на 12 делений) на 7 утра. Ночью в некоторый момент будильник, до этого работавший исправно, сломался, и его стрелки пошли в обратную сторону (с прежней скоростью). Тем не менее, утром будильник прозвенел точно в положенное время. Во сколько сломался будильник? Обоснуйте свой ответ. (*А. Кузнецов, Д. Ширяев*)

2. Андрюша разделил прямоугольник четырьмя прямыми разрезами на 9 прямоугольничков и в каждой части написал, чему равен её периметр. Получилось 9 чисел, как на картинке. Известно, что ровно в одном прямоугольничке Андрюша ошибся. Найдите этот прямоугольничек. Не забудьте обосновать, почему ошибка находится именно в том прямоугольничке, который вы выбрали, а не в каком-то другом. (*А. Солынин*)

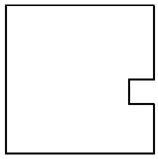
14	16	12
18	14	10
16	18	14

3. Наступила осень. На дереве висят зеленые, желтые и красные листья. Зеленый лист может пожелтеть или покраснеть. Жёлтые и красные листья, повисев немного, опадают. Вчера на дереве зелёных листьев было столько же, сколько и красных, а жёлтых — в 7 раз больше, чем красных. Сегодня же на дереве поровну зелёных и жёлтых листьев, а красных — в 7 раз больше, чем жёлтых. Докажите, что за ночь количество листьев на дереве уменьшилось хотя бы в 4 раза. (*А. Солынин*)

4. За большим круглым столом сидят 100 человек: рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут, причем известно, что среди присутствующих имеется хотя бы один рыцарь и хотя бы один лжец. Каждый человек видит только 10 ближайших соседей справа и 10 ближайших соседей слева от себя. Каждого спросили: *Ты видишь больше рыцарей, чем лжецов?* Докажите, что кто-то ответит: *Нет*!

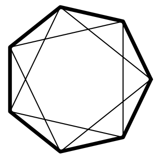
(*О. Иванова*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2018 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I ТУР. 7 КЛАСС.



1. От края большого квадратного листа отрезали маленький квадратик, как показано на рисунке, и в результате периметр листа увеличился на 10%. На сколько процентов уменьшилась площадь листа? (*фольклор*)

2. В семиугольнике провели несколько диагоналей как показано на рисунке, а в вершинах семиугольника расставили целые числа. Для каждой стороны семиугольника оказалось, что одно из чисел, стоящих на концах стороны, делится на другое. Может ли при этом так быть, что для любых двух чисел, стоящих на концах проведенной диагонали, ни одно из них не делится на другое? (*О. Иванова, С. Иванов*)

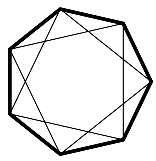


3. Клетки доски 2017×100 (2017 горизонталей, 100 вертикалей) покрашены в шахматном порядке. Стоящая на доске фигура *кузнечик* держит под боем все клетки своей горизонтали, имеющие тот же цвет, что и клетка, на которой она стоит, а также все клетки своей вертикали, имеющие противоположный цвет. (Чтобы побить какую-то клетку, кузнечик может перепрыгивать через другие фигуры.) Какое наибольшее число не бьющих друг друга кузнечиков можно расставить на этой доске? (*Н. Власова*)

4. За большим круглым столом сидят 100 человек: рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут, причем известно, что среди присутствующих имеется хотя бы один рыцарь и хотя бы один лжец. Каждый человек видит только 10 ближайших соседей справа и 10 ближайших соседей слева от себя. Каждого спросили: *Ты видишь больше рыцарей, чем лжецов?* Докажите, что кто-то ответит: *Нет*!
(*О. Иванова*)

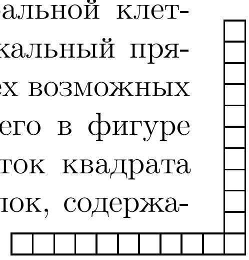
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2018 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 8 класс.

1. В семиугольнике провели несколько диагоналей как показано на рисунке. Дима расставил в вершинах семиугольника целые числа. Он утверждает, что на концах любой стороны семиугольника стоят два числа, одно из которых делится на другое; а кроме того, на концах любой из проведенных диагоналей стоят числа, ни одно из которых не делится на другое. Может ли это быть правдой? (*О. Иванова, С. Иванов*)



2. Наступила осень. Некоторые зелёные листья на дереве желтеют, а некоторые зелёные листья — краснеют. Жёлтые и красные листья, повисев немного, опадают. Вчера $1/9$ всех листьев на дереве были зелеными, еще $1/9$ — красными, а остальные — жёлтыми. А сегодня $1/9$ всех листьев на дереве — зелёные, еще $1/9$ — жёлтые, а остальные — красные. Докажите, что не менее $3/4$ листьев, висевших вчера на дереве, опали за эту ночь. (*А. Солынин*)

3. Клетчатая фигура «уголок» состоит из центральной клетки, к которой присоединены горизонтальный и вертикальный прямоугольники 1×10 (на рисунке показан один из четырех возможных видов уголков, сторона каждой клетки равна 1, а всего в фигуре 21 клетка). Докажите, что при любой раскраске клеток квадрата 2017×2017 в 120 цветов из него можно вырезать уголок, содержащий две клетки одинакового цвета. (*Д. Карпов*)



4. В треугольнике ABC $\angle B = 2\angle C$. На луче BA выбрана точка D так, что $AC = BD$. Докажите, что $AB + BC > CD$. (*А. Кузнецов*)

5. Леша выписал на доску в порядке возрастания все натуральные делители натурального числа n, а Дима стер несколько первых и несколько последних чисел получившегося ряда так, что осталось 151 число. Какое наибольшее количество из этих 151 делителей могло являться пятыми степенями натуральных чисел? (*М. Антипов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2018 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 9 класс.

1. Старшие коэффициенты квадратных трехчленов $f(x)$ и $g(x)$ равны 1. Найдите $f(6)$, если известно, что $g(6) = 5$ и

$$\frac{f(-1)}{g(-1)} = \frac{f(1)}{g(1)} = \frac{3}{2}.$$

(*А. Голованов*)

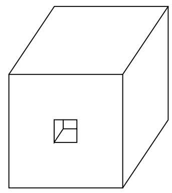
2. Клетки доски 20×20 покрашены в шахматном порядке. Стоящая на доске фигура *кузнечик* держит под боем все клетки своей горизонтали, имеющие тот же цвет, что и клетка, на которой она стоит, а также все клетки своей вертикали, имеющие противоположный цвет. (Чтобы побить какую-то клетку, кузнечик может перепрыгивать через другие фигуры.) Какое наибольшее число не бьющих друг друга кузнечиков можно расставить на этой доске? (*Н. Власова*)

3. Окружность, проходящая через вершины B и C трапеции $ABCD$, пересекает боковые стороны AB и CD в точках X и Y соответственно и касается основания AD в точке K. Оказалось, что $\angle BKC = 50°$, а $\angle ABK = \angle KDC$. Найдите $\angle XKY$. (*С. Берлов*)

4. На доске были выписаны 4000 различных натуральных чисел, меньших 30 000. Если на доске выписаны числа a и b, разрешается дописать на доску число НОД(a, b). Докажите, что такими операциями нельзя добиться того, что все числа от 1 до 10 000 будут выписаны на доске. (*С. Берлов, А. Храбров*)

5. На плоскости отмечено 179 точек. Докажите, что найдётся такая отмеченная точка, что расстояния от неё до двух ближайших к ней отмеченных точек отличаются не более чем в 1,79 раза. (*О. Иванова*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2018 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 10 класс.



1. Из большого кубического куска сыра вырезали и съели кубический кусок поменьше (одна из граней вырезанного куска лежит на грани большого куска, как на рисунке). В результате площадь поверхности сыра увеличилась на 24%. На сколько процентов уменьшился его объём? (*Д. Максимов*)

2. Продолжение биссектрисы BL треугольника ABC пересекает его описанную окружность в точке K. Биссектриса внешнего угла B пересекает продолжение отрезка CA за точку A в точке N. Докажите, что если $BK = BN$, то отрезок LN равен диаметру описанной окружности треугольника. (*А. Кузнецов*)

3. Федя выписал все натуральные делители числа n, лежащие в отрезке $[2^{100}, 3^{100}]$. Может ли оказаться, что он выписал ровно 100 чисел, и ровно 35 из них — кубы натуральных чисел? (*М. Антипов*)

4. Квадратные трёхчлены $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что

$$\frac{f(2)}{g(2)} = \frac{f(3)}{g(3)} = 2.$$

Найдите $f(1)$, если известно, что $g(1) = 2$, $f(5) = 7$ и $g(5) = 2$. (*А. Голованов*)

5. Дано положительное число c. В пространстве отмечено 99 точек таким образом, что для каждой из отмеченных точек расстояния до двух ближайших к ней отмеченных точек отличаются хотя бы в c раз. При каком наибольшем c это возможно? (*О. Иванова*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2018 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 11 класс.

1. Числа a, b, c удовлетворяют уравнениям

$$ab + a + b = c, \qquad bc + b + c = a, \qquad ca + c + a = b.$$

Найдите все возможные значения a.

2. Последовательность (x_n) задана условиями: $x_1 = 1$, и при каждом натуральном n число x_{n+1} равно наибольшему числу, которое можно получить перестановкой цифр числа $x_n + 1$. Найдите наименьшее n, для которого в десятичной записи числа x_n ровно 2017 знаков.

(*А. Голованов*)

3. В тетраэдре $ABCD$ медиана AE грани ABC перпендикулярна ребру BD, а медиана AF грани ABD перпендикулярна ребру BC. Докажите, что ребро AB перпендикулярно ребру CD. (*А. Голованов*)

4. Квадратные трёхчлены $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что

$$\frac{f(2)}{g(2)} = \frac{f(3)}{g(3)} = 2.$$

Найдите $f(1)$, если известно, что $g(1) = 3$, $f(4) = 7$ и $g(4) = 4$.

(*А. Голованов*)

5. При составлении варианта районной олимпиады каждый член жюри принял участие не более чем в 10 обсуждениях. Обсуждения бывают большие и малые. В малом обсуждении участвуют 7 членов жюри, каждый из которых шлёт ровно по одному электронному письму каждому из 6 остальных. В большом обсуждении участвуют 15 членов жюри, каждый из которых шлёт ровно по одному электронному письму каждому из 14 остальных. Всего было послано 1994 письма, не считая писем, которые послал секретарь жюри. В скольких обсуждениях участвовал секретарь?

(*А. Голованов*)