



САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
РАЙОННЫЙ ЭТАП
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
4 ДЕКАБРЯ 2021 г. I тур 10 класс 1 ВАРИАНТ

1. Витя Перестукин при опросах всегда неправильно считает проценты: он делит количество ответивших определенным образом на количество всех остальных. Например, при опросе «Как тебя зовут?», проведенном среди 7 Ань, 9 Оль, 8 Юль, Витя насчитал 50 % Юль.

Витя провёл в своей школе опрос: каким является треугольник со сторонами 3, 4, 5? По его подсчётам, по 5 % ответили «остроугольным», «тупоугольным» и «такого треугольника не бывает», 50 % — «прямоугольным», остальные $a\%$ — «смотря в какой геометрии». Чему равно a ?

2. Пусть $f(x) = 2x^2 + ax + b$ — квадратный трехчлен, причем число a не целое. Докажите, что ровно одно из уравнений

$$f(x) = f(\lceil x \rceil), \quad f(x) = f(\lfloor x \rfloor)$$

имеет нецелый корень. (Через $\lfloor x \rfloor$ обозначается округление до ближайшего целого числа в меньшую сторону, а через $\lceil x \rceil$ — в большую. Например $\lceil 2,4 \rceil = 3$, $\lfloor 2,4 \rfloor = 2$.)

3. На полуокружности с диаметром AB выбраны точки C и D так, что хорды AD и BC пересекаются. Известно, что $BC = 1$, $AD = 2$. Докажите, что $\angle ABC > 2\angle BAD$.

4. Назовем число *антитреугольным*, если его можно записать в виде $\frac{2}{n(n+1)}$ для некоторого натурального n . Для какого количества чисел k ($1000 \leq k \leq 2000$) число 1 можно записать в виде суммы k антитреугольных чисел (не обязательно различных)?

5. В школе 505 учеников. Каждый ученик посещает ровно одну из восьми спортивных секций, ровно один из восьми научных кружков и ровно одну из восьми студий художественной самодеятельности. Два ученика дружат, если они посещают вместе *ровно два* разных занятия (а иначе не дружат). Докажите, что найдутся 64 ученика, никакие двое из которых не дружат.

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы укажите ФАМИЛИЯ, ИМЯ, ОТЧЕСТВО; ДАТА РОЖДЕНИЯ; ТЕЛЕФОН; КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ; ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние. Списки прошедших на городской и региональный тур будут опубликованы на сайтах www.pdmi.ras.ru/~olymp и olymp.academtaland.ru



САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
РАЙОННЫЙ ЭТАП
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
4 ДЕКАБРЯ 2021 г. I тур 10 класс 2 ВАРИАНТ

1. Коля Сорокин при опросах всегда неправильно считает проценты: он делит количество ответивших определенным образом на количество всех остальных. Например, при опросе «Как тебя зовут?», проведенном среди 10 Юр, 8 Ян, 9 Ир, Коля насчитал 50 % Ир.

Коля провёл в своей школе опрос: кто написал повесть «Детство»? По его подсчётам, по 2 % ответили «Пушкин», «Гоголь», «Достоевский» и «такой повести нет», 70 % — «Горький», остальные $a\%$ — «Толстой». Чему равно a ?

2. Пусть $g(x) = 3x^2 + px + q$ — квадратный трехчлен, причем число p не целое. Докажите, что ровно одно из уравнений

$$g(x) = g(\lceil x \rceil), \quad g(x) = g(\lfloor x \rfloor)$$

имеет нецелый корень. (Через $\lfloor x \rfloor$ обозначается округление до ближайшего целого числа в меньшую сторону, а через $\lceil x \rceil$ — в большую. Например $\lceil 2,4 \rceil = 3$, $\lfloor 2,4 \rfloor = 2$.)

3. На полуокружности с диаметром AB выбраны точки C и D так, что хорды AC и BD пересекаются. Известно, что $BD = 2$, $AC = 4$. Докажите, что $\angle ABD > 2\angle BAC$.

4. Назовем число *антитреугольным*, если его можно записать в виде $\frac{2}{n(n-1)}$ для некоторого натурального n . Для какого количества чисел m ($2000 \leq m \leq 3000$) число 1 можно записать в виде суммы m антитреугольных чисел (не обязательно различных)?

5. В городке 991 житель. Каждый из них посещает ровно одну из десяти парикмахерских, ровно один из десяти продуктовых магазинов и ровно один из десяти спортивных клубов. Два жителя дружат, если они посещают вместе *ровно два* разных заведения (а иначе не дружат). Докажите, что найдутся 100 жителей, никакие двое из которых не дружат.

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы укажите ФАМИЛИЯ, ИМЯ, ОТЧЕСТВО; ДАТА РОЖДЕНИЯ; ТЕЛЕФОН; КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ; ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние. Списки прошедших на городской и региональный тур будут опубликованы на сайтах www.pdmi.ras.ru/~olymp и olymp.academtaland.ru