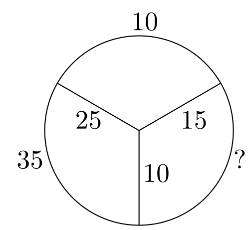
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2022 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 6 класс.

---

1. Число 100 представили в виде суммы нескольких двузначных чисел, не делящихся на 10, и в каждом слагаемом поменяли цифры местами. Может ли сумма полученных чисел оказаться больше 400?

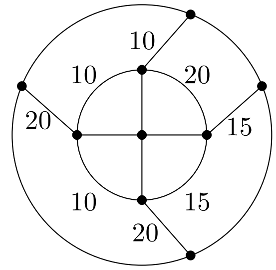
2. Костя очень долго гулял по парку: он вышел из центральной точки парка и, пройдя по дорожкам, вернулся в центральную точку. Приходя на развилку где встречаются три дорожки, Костя каждый раз продолжал движение, не разворачиваясь, по одной из двух других дорожек. На рисунке отмечено, сколько раз Костя прошел по каждой дорожке. Какое число должно стоять на месте вопросительного знака? Не забудьте объяснить, почему другие ответы невозможны.



3. У Медведя имеется веревка длиной 150 см, из которой он собирается вырезать восемь кусков длиной 1, 2, 3, 5, 12, 26, 39 и 60 см. Сможет ли Маша так разрезать веревку на две части (не обязательно целой длины), чтобы Медведь не смог вырезать из них нужные ему восемь кусков? Не забудьте обосновать свой ответ.

4. В классе 25 мальчиков и 5 девочек, все они разного роста. Каждый день всех учеников рассаживают по 5 человек за 6 столов, и за каждым столом самого высокого назначают дежурным. Могло ли через 31 день оказаться, что все мальчики отдежурили поровну раз?

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2022 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 7 класс.



1. Костя долго гулял по парку: он вышел из центральной точки парка и, пройдя по дорожкам, вернулся в центральную точку (возможно, пройдя по центральной точке несколько раз). На рисунке развилки выделены жирными точками. Приходя на развилку, Костя продолжал движение, не разворачиваясь, — по одной из других дорожек. После прогулки Костя по памяти записал на схеме возле некоторых дорожек, сколько раз он по ним проходил. Не ошибся ли Костя — возможен ли такой маршрут? Не забудьте обосновать свой ответ.

2. Аркадий, Борис и Виктор катались на электросамокатах, не зная про ограничение скорости. Весь путь был разделён на два участка. Аркадий проехал первый участок со скоростью 48 км/ч, а второй — со скоростью 24 км/ч. Борис проехал первый участок со скоростью 24 км/ч, второй — с постоянной скоростью не меньше 48 км/ч. Виктор оба участка проехал с одной и той же скоростью. Стартовали все одновременно и к финишу приехали тоже одновременно. Докажите, что Виктор ехал со скоростью не меньшей, чем 32 км/ч.

3. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка D, а на стороне BC — точка E. Точка F отмечена так, что отрезки EF и BD пересекаются. Оказалось, что

$$AB = BC, \qquad BD = CD = CE = EF, \qquad AC = BF.$$

Докажите, что точки C, D, F лежат на одной прямой.

4. Из клетчатой доски 360×360 вырезали по клеточкам дырку в форме прямоугольника, не выходящего на границы доски. Докажите, что на оставшиеся клетки доски нельзя поставить более 480 не бьющих друг друга ладей (считается, что ладьи не бьют сквозь дырку).

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2022 года ПО МАТЕМАТИКЕ

I тур. 8 класс.

1. Аркадий, Борис и Виктор катались на электросамокатах, не зная про ограничение скорости. Весь путь был разделён на два участка. Аркадий проехал первый участок со скоростью 48 км/ч, а второй — со скоростью 24 км/ч. Борис проехал первый участок со скоростью 24 км/ч, второй — с постоянной скоростью не меньше 48 км/ч. Виктор оба участка проехал с одной и той же скоростью. Стартовали все одновременно и к финишу приехали тоже одновременно. Докажите, что Виктор ехал со скоростью не меньшей, чем 32 км/ч.

2. По кругу стоят различные числа y_1, y_2, $\ldots$, y_{2021}. Может ли случиться так, что

$$y_1+|y_2|=3, \quad y_2+|y_3|=3, \quad \ldots, \quad y_{2020}+|y_{2021}|=3 \quad \text{и} \quad y_{2021}+|y_1|=3\,?$$

3. Прямоугольник с целыми сторонами разрезали на 10 000 прямоугольников (не обязательно с целыми сторонами), проведя 99 горизонтальных и 99 вертикальных линий. Прямоугольники разбиения покрасили в черный и белый цвета так, что никакие два прямоугольника одного цвета не имеют общей стороны. Оказалось, что периметр каждого черного прямоугольника — натуральное число, оканчивающееся на 17 или на 19. Докажите, что количество черных прямоугольников, периметр которых оканчивается на 19, делится на 50.

4. На стороне BC треугольника ABC отмечены точки D и E так, что $BD = DE$ и $AD = AC$. На отрезке AD отмечена точка X, а на отрезке AC — точка Y так, что $DX = AY$. Докажите, что $EX + DY \geqslant AB$.

5. Дано 17 восемнадцатизначных чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_{17}. Могло ли так случиться, что если у всех этих чисел вычеркнуть последнюю цифру, то их сумма будет равна $2a_1$, если предпоследнюю — то $2a_2$, $\ldots$, если вторую — то $2a_{17}$?

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2022 года ПО МАТЕМАТИКЕ

I тур. 9 класс.

1. Даны положительные числа $x > y$. Пусть $z = \frac{x+y}{2}$ и $t = \sqrt{xy}$. Оказалось, что $(x - y) = 3(z - t)$. Найдите x/y.

2. В олимпиаде участвуют школьники с 6 по 11 класс. Председатель жюри знает, что придёт ровно 1000 школьников, но не знает их распределения по классам. У него есть ровно 500 листов бумаги. На одном листе печатаются два экземпляра условий (слева одно, справа другое); можно печатать условия разных классов, а можно одного и того же.

При помощи одной команды для принтера можно распечатать любое количество *одинаковых* листов. Например, можно скомандовать принтеру: напечатать 142 листа вида «7 класс + 10 класс». Председатель уверен, что когда он узнает распределение участников по классам, ему хватит 6 команд для принтера, чтобы напечатать все 1000 нужных условий. Прав ли он?

3. Саша записывает 30 различных натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{30}$. Оля вычисляет НОД или НОК чисел a_1 и a_2, потом НОД или НОК полученного результата и числа a_3 и т. д., в конце она вычисляет НОД или НОК предыдущего результата и числа a_{30}. При этом из всех 29 операций она должна вычислить НОК ровно 2 раза. Может ли Саша записать такие числа, что при любых действиях Оли итоговый результат будет равен 300?

4. В правильном 20-угольнике отмечены четыре последовательные вершины A, B, C и D. Внутри него выбрана точка E так, что $AE = DE$ и $\angle BEC = 2\angle CED$. Найдите угол AEB.

5. Фирма специализируется на изготовлении «досок с дыркой»: это клетчатая доска 300×300, в которой вырезана по клеточкам дырка в виде прямоугольника, не выходящего на границу доски. К каждой такой доске прикреплена бирка с указанием максимального количества не бьющих друг друга ладей, которое можно расставить на этой доске. (Считается, что ладьи не бьют сквозь дырку.) К юбилею фирмы было решено изготовить доску с самым большим числом на бирке. Чему равно это число?

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2022 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ

I тур. 10 класс.

1. Витя Перестукин при опросах всегда неправильно считает проценты: он делит количество ответивших определенным образом на количество всех остальных. Например, при опросе «Как тебя зовут?», проведенном среди 7 Ань, 9 Оль, 8 Юль, Витя насчитал 50 % Юль.

Витя провёл в своей школе опрос: каким является треугольник со сторонами 3, 4, 5? По его подсчётам, по 5 % ответили «остроугольным», «тупоугольным» и «такого треугольника не бывает», 50 % — «прямоугольный», остальные a % — «смотря в какой геометрии». Чему равно a?

2. Пусть $f(x) = 2x^2 + ax + b$ — квадратный трехчлен, причем число a не целое. Докажите, что ровно одно из уравнений

$$f(x) = f(\lceil x \rceil), \qquad f(x) = f(\lfloor x \rfloor)$$

имеет нецелый корень. (Через $\lfloor x \rfloor$ обозначается округление до ближайшего целого числа в меньшую сторону, а через $\lceil x \rceil$ — в большую. Например $\lceil 2{,}4 \rceil = 3$, $\lfloor 2{,}4 \rfloor = 2$.)

3. На полуокружности с диаметром AB выбраны точки C и D так, что хорды AD и BC пересекаются. Известно, что $BC = 1$, $AD = 2$. Докажите, что $\angle ABC > 2\angle BAD$.

4. Назовем число *антитреугольным*, если его можно записать в виде $\frac{2}{n(n+1)}$ для некоторого натурального n. Для какого количества чисел k ($1000 \leq k \leq 2000$) число 1 можно записать в виде суммы k антитреугольных чисел (не обязательно различных)?

5. В школе 505 учеников. Каждый ученик посещает ровно одну из восьми спортивных секций, ровно один из восьми научных кружков и ровно одну из восьми студий художественной самодеятельности. Два ученика дружат, если они посещают вместе *ровно два* разных занятия (а иначе не дружат). Докажите, что найдутся 64 ученика, никакие двое из которых не дружат.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2022 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ

I тур. 11 класс.

---

1. Дима едет по прямому шоссе из пункта А в пункт Б. Из пункта Б по направлению к Диме тянется пробка, длина которой увеличивается со скоростью v км/ч. Скорость движения машины в пробке равна 10 км/ч, а вне пробки — 60 км/ч. Навигатор в машине в каждый момент времени показывает, сколько времени осталось Диме ехать до пункта Б, исходя из длины пробки в этот момент. В некоторый момент (еще не доехав до пробки) Дима обнаружил, что навигатор показывает то же время, что и несколько минут назад. Найдите v.

2. Сергей выписал числа от 500 до 1499 в строчку в некотором порядке. Под каждым числом, кроме самого левого, он написал НОД этого числа и его левого соседа, получив вторую строчку из 999 чисел. Далее он по тому же правилу получил из неё третью строчку из 998 чисел, из неё — четвертую из 997 чисел и т. д. Остановился он, когда впервые все числа в очередной строчке оказались равны единице. Какое наибольшее количество строчек он мог выписать к этому моменту?

3. В правильном 20-угольнике отмечены четыре последовательные вершины A, B, C и D. Внутри него выбрана точка E так, что $AE = DE$ и $\angle BEC = 2\angle CED$. Найдите угол AEB.

4. Даны различные многочлены $f(x)$ и $g(x)$ степени 3. Оказалось, что многочлены $f(f(x))$ и $(g(x))^3$ равны, а также равны многочлены $f(g(x))$ и $(f(x))^3$. При этом $f(0) = 1$. Найдите все такие пары многочленов f, g.

5. Экзамен состоит из $N \geq 3000$ вопросов. Каждый из 31 ученика выучил ровно 3000 из них, причем любой вопрос знает хотя бы 29 учеников. Перед экзаменом учитель открыто выложил все карточки с вопросами по кругу. Он велел ученикам указать один из вопросов, и объяснил, что он выдаст этот вопрос первому по алфавиту ученику, следующий по часовой стрелке вопрос — второму ученику, следующий — третьему и т. д. (каждому ученику по одному вопросу). Однако, ученики не смогли указать такую карточку, чтобы каждый из них получил известный ему вопрос. При каком наименьшем N такое могло произойти?