II Математическая олимпиада имени Леонарда Эйлера
3 (заключительный) этап, 24–27 марта 2010 г.

Первый день.

1. Занумеруем все простые числа в порядке возрастания: $p_1 = 2, p_2 = 3, \ldots$. Может ли среднее арифметическое $\frac{p_1+\ldots+p_n}{n}$ при каком-нибудь $n \geq 2$ быть простым числом?

2. В Швамбрании некоторые города связаны двусторонними беспосадочными авиарейсами. Рейсы разделены между тремя авиакомпаниями, причём если какая-то авиакомпания обслуживает линию между городами А и Б, то самолёты других компаний между этими городами не летают. Известно, что из каждого города летают самолёты всех трёх компаний. Докажите, что можно, вылетев из некоторого города, вернуться в него, воспользовавшись по пути рейсами всех трёх компаний и не побывав ни в одном из промежуточных городов дважды.

3. В четырехугольнике $ABCD$ сторона AB равна диагонали AC и перпендикулярна стороне AD, а диагональ AC перпендикулярна стороне CD. На стороне AD взята точка K такая, что $AC = AK$. Биссектриса угла ADC пересекает BK в точке M. Найдите угол ACM.

4. В вершинах куба расставили числа $1^2, 2^2, \ldots, 8^2$ (в каждую из вершин — по одному числу). Для каждого ребра посчитали произведение чисел в его концах. Найдите наибольшую возможную сумму всех этих произведений.

II Математическая олимпиада имени Леонарда Эйлера
3 (заключительный) этап, 24–27 марта 2010 г.

Первый день.

1. Занумеруем все простые числа в порядке возрастания: $p_1 = 2, p_2 = 3, \ldots$. Может ли среднее арифметическое $\frac{p_1+\ldots+p_n}{n}$ при каком-нибудь $n \geq 2$ быть простым числом?

2. В Швамбрании некоторые города связаны двусторонними беспосадочными авиарейсами. Рейсы разделены между тремя авиакомпаниями, причём если какая-то авиакомпания обслуживает линию между городами А и Б, то самолёты других компаний между этими городами не летают. Известно, что из каждого города летают самолёты всех трёх компаний. Докажите, что можно, вылетев из некоторого города, вернуться в него, воспользовавшись по пути рейсами всех трёх компаний и не побывав ни в одном из промежуточных городов дважды.

3. В четырехугольнике $ABCD$ сторона AB равна диагонали AC и перпендикулярна стороне AD, а диагональ AC перпендикулярна стороне CD. На стороне AD взята точка K такая, что $AC = AK$. Биссектриса угла ADC пересекает BK в точке M. Найдите угол ACM.

4. В вершинах куба расставили числа $1^2, 2^2, \ldots, 8^2$ (в каждую из вершин — по одному числу). Для каждого ребра посчитали произведение чисел в его концах. Найдите наибольшую возможную сумму всех этих произведений.

II Математическая олимпиада имени Леонарда Эйлера
3 (заключительный) этап, 24–27 марта 2010 г.

Второй день.

5. На полке в произвольном порядке стоят десять томов энциклопедии, пронумерованных от 1 до 10. Разрешается менять местами любые два тома, между которыми стоит не меньше четырёх других томов. Всегда ли можно расставить все тома по возрастанию номеров?

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы B и D равны, $CD = 4BC$, а биссектриса угла A проходит через середину стороны CD. Чему может быть равно отношение AD/AB?

7. Докажите, что для произвольных a, b, c равенство

$$\frac{a(b-c)}{b+c} + \frac{b(c-a)}{c+a} + \frac{c(a-b)}{a+b} = 0$$

выполнено тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$\frac{a^2(b-c)}{b+c} + \frac{b^2(c-a)}{c+a} + \frac{c^2(a-b)}{a+b} = 0.$$

8. Среди 100 монет есть 4 фальшивых. Все настоящие монеты весят одинаково, фальшивые — тоже, фальшивая монета легче настоящей. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь найти хотя бы одну настоящую монету?

II Математическая олимпиада имени Леонарда Эйлера
3 (заключительный) этап, 24–27 марта 2010 г.

Второй день.

5. На полке в произвольном порядке стоят десять томов энциклопедии, пронумерованных от 1 до 10. Разрешается менять местами любые два тома, между которыми стоит не меньше четырёх других томов. Всегда ли можно расставить все тома по возрастанию номеров?

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы B и D равны, $CD = 4BC$, а биссектриса угла A проходит через середину стороны CD. Чему может быть равно отношение AD/AB?

7. Докажите, что для произвольных a, b, c равенство

$$\frac{a(b-c)}{b+c} + \frac{b(c-a)}{c+a} + \frac{c(a-b)}{a+b} = 0$$

выполнено тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$\frac{a^2(b-c)}{b+c} + \frac{b^2(c-a)}{c+a} + \frac{c^2(a-b)}{a+b} = 0.$$

8. Среди 100 монет есть 4 фальшивых. Все настоящие монеты весят одинаково, фальшивые — тоже, фальшивая монета легче настоящей. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь найти хотя бы одну настоящую монету?