III МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА имени ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА
3 (заключительный) этап, 28-31 марта 2011 г.

Первый день.

1. Докажите, что для любого натурального числа $n > 1$ найдутся такие натуральные числа a, b, c, d, что $a+b = c+d = ab–cd = 4n$.

2. За круглым столом сидят 40 человек. Может ли случиться, что у любых двух из них, между которыми сидит четное число человек, есть за столом общий знакомый, а у любых двух, между которыми сидит нечетное число человек, общего знакомого нет?

3. Имеются три литровых банки и мерка объемом 100 мл. Первая банка пуста, во второй — 700 мл сладкого чая, в третьей — 800 мл сладкого чая. При этом во второй банке растворено 50 г сахара, а в третьей — 60 г сахара. Разрешается набрать из любой банки полную мерку чая и перелить весь этот чай в любую другую банку. Можно ли несколькими такими переливаниями добиться, чтобы первая банка была пуста, а количество сахара во второй банке равнялось количеству сахара в третьей банке?

4. Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$, в котором $AB = CD$, выбрана точка P таким образом, что сумма углов PBA и PCD равна 180 градусам. Докажите, что $PB+PC < AD$.

III МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА имени ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА
3 (заключительный) этап, 28-31 марта 2011 г.

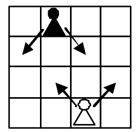
Второй день.

5. 100 идущих подряд натуральных чисел отсортировали по возрастанию суммы цифр, а числа с одинаковой суммой цифр — просто по возрастанию. Могли ли числа 2010 и 2011 оказаться рядом?

6. Выпуклый пятиугольник $ABCDE$ таков, что $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$, $AC \parallel DE$, $CE \perp BC$. Докажите, что EC — биссектриса угла BED.

7. По окружности записали красным пять несократимых дробей с нечетными знаменателями, большими 10^{10}. Между каждыми двумя соседними красными дробями вписали синим несократимую запись их суммы. Могло ли случиться, что у синих дробей все знаменатели меньше 100?

8. Какое наибольшее количество белых и чёрных пешек можно расставить на клетчатой доске 9x9 (пешку, независимо от её цвета, можно ставить на любую клетку доски) так, чтобы никакая не била никакую (в том числе и своего цвета)? Белая пешка бьет две соседние по диагонали клетки на соседней горизонтали с бóльшим номером, а чёрная — две соседние по диагонали клетки на соседней горизонтали с меньшим номером (см. рисунок).



Первый день.

1. Докажите, что для любого натурального числа $n > 1$ найдутся такие натуральные числа a, b, c, d, что $a+b = c+d = ab-cd = 4n$.

2. За круглым столом сидят 40 человек. Может ли случиться, что у любых двух из них, между которыми сидит четное число человек, есть за столом общий знакомый, а у любых двух, между которыми сидит нечетное число человек, общего знакомого нет?

3. Имеются три литровых банки и мерка объемом 100 мл. Первая банка пуста, во второй — 700 мл сладкого чая, в третьей — 800 мл сладкого чая. При этом во второй банке растворено 50 г сахара, а в третьей — 60 г сахара. Разрешается набрать из любой банки полную мерку чая и перелить весь этот чай в любую другую банку. Можно ли несколькими такими переливаниями добиться, чтобы первая банка была пуста, а количество сахара во второй банке равнялось количеству сахара в третьей банке?

4. Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$, в котором $AB = CD$, выбрана точка P таким образом, что сумма углов PBA и PCD равна 180 градусам. Докажите, что $PB+PC < AD$.

III МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА имени ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА
3 (заключительный) этап, 28-31 марта 2011 г.

Второй день.

5. 100 идущих подряд натуральных чисел отсортировали по возрастанию суммы цифр, а числа с одинаковой суммой цифр — просто по возрастанию. Могли ли числа 2010 и 2011 оказаться рядом?

6. Выпуклый пятиугольник $ABCDE$ таков, что $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$, $AC \parallel DE$, $CE \perp BC$. Докажите, что EC — биссектриса угла BED.

7. По окружности записали красным пять несократимых дробей с нечетными знаменателями, большими 10^{10}. Между каждыми двумя соседними красными дробями вписали синим несократимую запись их суммы. Могло ли случиться, что у синих дробей все знаменатели меньше 100?

8. Какое наибольшее количество белых и чёрных пешек можно расставить на клетчатой доске 9x9 (пешку, независимо от её цвета, можно ставить на любую клетку доски) так, чтобы никакая не била никакую (в том числе и своего цвета)? Белая пешка бьет две соседние по диагонали клетки на соседней горизонтали с бóльшим номером, а чёрная — две соседние по диагонали клетки на соседней горизонтали с меньшим номером (см. рисунок).