

Первый день.

1. Докажите, что в разложение произведения десяти последовательных трёхзначных чисел на простые множители входит не больше 23 различных простых чисел.
2. На стороне AB треугольника ABC с углом в 100° при вершине C взяты точки P и Q такие, что $AP = BC$ и $BQ = AC$. Пусть M, N, K — середины отрезков AB, CP, CQ соответственно. Найдите угол NMK .
3. На сотом году правления Казначей Бессмертный решил начать выпускать новые монеты. В этом году он выпустил в обращение неограниченный запас монет достоинством $2^{100}-1$, на следующий год — достоинством $2^{101}-1$, и т.д. Как только достоинство очередной новой монеты можно будет без сдачи набрать выпущенными ранее новыми монетами, Казначей сместят. На каком году его правления это случится?
4. Среди 49 одинаковых на вид монет — 25 настоящих и 24 фальшивых. Для определения фальшивых монет имеется тестер. В него можно положить любое количество монет, и если среди этих монет больше половины — фальшивые, тестер подает сигнал. Как за пять тестов найти две фальшивых монеты?

Второй день.

5. Петя и Вася одновременно ввели в свои калькуляторы одно и то же не равное 0 целое число. После этого каждую минуту Петя либо прибавлял к своему числу 10, либо умножал его на 2014; одновременно Вася в первом случае вычитал из своего числа 10, а во втором — делил его на 2014. Могло ли оказаться, что через некоторое время числа у Пети и Васи снова стали равными?
6. Назовём натуральное число *гористым*, если в его записи есть не стоящая с краю цифра (называемая *вершиной*), которая больше всех остальных, а все остальные цифры ненулевые и сначала нестрого возрастают (то есть каждая следующая цифра больше предыдущей или равна ей) до вершины, а потом нестрого убывают (то есть каждая следующая цифра меньше предыдущей или равна ей). Например, число 12243 — гористое, а числа 3456 и 1312 — нет. Докажите, что сумма всех *стозначных* гористых чисел — составное число.
7. Десятичная запись натурального числа N составлена только из единиц и двоек. Известно, что вычёркиванием цифр из этого числа можно получить любое из 10000 чисел, состоящих из 9999 единиц и одной двойки. Найдите наименьшее возможное количество цифр в записи числа N .
8. Диагональ выпуклого 101-угольника будем называть *главной*, если по одну сторону от неё лежит 50, а по другую — 49 вершин. Выбрано несколько главных диагоналей, не имеющих общих концов. Докажите, что сумма длин этих диагоналей меньше суммы длин остальных главных диагоналей.