XI олимпиада имени Леонарда Эйлера, заключительный этап

Решения заданий первого дня.

1. *Даны два числа (не обязательно целые), не равные 0. Если каждое из них увеличить на единицу, их произведение увеличится вдвое. А во сколько раз увеличится их произведение, если каждое из исходных чисел возвести в квадрат и затем уменьшить на единицу?* (Д. Ширяев, И. Рубанов)

Ответ. В 4 раза. **Решение**. Обозначим данные числа через a и b. По условию $(a+1)(b+1) = ab+a+b+1 = 2ab$. Приведя в последнем равенстве подобные члены, получаем $ab–a–b–1 = 0$, откуда $(a–1)(b–1) = ab–a–b+1 = 2$ и $(a^2–1)(b^2–1) = (a–1)(b–1)(a+1)(b+1) = 2\cdot2ab = 4ab$.

2. *Устройство КК42 работает так: если положить в него четыре шарика, то в первый лоток вывалится второй по весу шарик (т. е. шарик веса* b*, если* $a > b > c > d$*), а во второй лоток вывалятся остальные. С другим числом шариков устройство не работает. Имеются 100 одинаковых на вид шариков попарно различных весов. Их пронумеровали числами 1, 2, ..., 100. Как, использовав прибор не более 100 раз, найти самый тяжелый шарик?*(К. Кноп)

Решение. Сначала каждый раз кладем в прибор 4 не отложенных ранее шарика и откладываем тот, который выпал в первый лоток. После 97 проб у нас остались не отложенными самый тяжелый и два самых легких шарика, так как ни один из них выпасть в первый лоток не может. Пусть их номера — x, y, z. Выберем из отложенных любые три шарика a, b, c и проделаем последние три пробы: (x, a, b, c), (y, a, b, c), (z, a, b, c). В результате два раза в первый лоток выпадет второй по весу шарик из a, b, c и один — когда вместе с a, b, c в пробе участвует самый тяжёлый шарик из всех ста — самый тяжелый шарик из a, b, c. Таким образом, самый тяжёлый шарик из всех — это шарик из x, y, z, участвовавший в той из трёх последних проб, в которой в первый лоток выпал не тот шарик, что в двух других.

3. *Дано 1000-значное число без нулей в записи. Докажите, что из этого числа можно вычеркнуть несколько (возможно, ни одной) последних цифр так, чтобы получившееся число не было натуральной степенью числа, меньшего 500.* (С. Берлов)

Решение. Будем вычеркивать в конце ноль, одну, две, три, ..., 499 цифр. Если всё время получаются степени чисел, меньших 500, то основания каких-то двух из них совпали. Пусть это будут a^x и a^y $(x < y)$. Умножим число a^x на степень десятки так, чтобы в его записи стало столько же знаков, сколько в записи a^y, и вычтем результат из a^y. Разность будет натуральным числом, делящимся на a^x. Но в нём будет не более 499 цифр, а в a^x — не менее 501 цифры. Противоречие.

4. *Дан выпуклый четырёхугольник ABSC. На диагонали BC выбрана точка P так, что* $AP = CP > BP$*. Точка Q симметрична точке P относительно середины диагонали BC, а точка R симметрична точке Q относительно прямой AC. Оказалось, что* $\angle SAB = \angle QAC$ *и* $\angle SBC = \angle BAC$*. Докажите, что* $SA = SR$. (С. Берлов)

Решение. Отметим на отрезке AC такую точку L, что $QL \parallel AP$. Тогда треугольники APC и LQC подобны и $LQ = QC = BP$. Кроме того, $BQ = PC = AP$ и $\angle APB = \angle LQB$, поэтому треугольники ABP и BLQ равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $BA = BL$. Далее,

$$\angle ALR = \angle ALQ = 180°–\angle CLQ = 180°–\angle ACB = \angle CAB+\angle ABC = \angle ABC+\angle SBC = \angle ABS$$

и $\angle BAS = \angle QAC = \angle LAR$, поэтому треугольники ABS и ALR подобны по двум углам, откуда $AB/AL = AS/AR$. Значит, треугольники ABL и ASR подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними ($\angle SAR = \angle BAC$, поскольку $\angle SAB = \angle QAC = \angle RAL$), но так как $AB = BL$, то $AS = SR$.

XI олимпиада имени Леонарда Эйлера, заключительный этап

Решения заданий второго дня.

5. *Графики линейных функций $y = ax+c$, $y = ax+d$, $y = bx+e$, $y = bx+f$ пересекаются в вершинах квадрата P. Могут ли точки K(a, c), L(a, d), M(b, e), N(b, f) располагаться в вершинах квадрата, равного квадрату P?* (И. Рубанов)

Ответ. Не могут. **Решение**. Пусть такое возможно. Заметим, что прямые *KL* и *MN* параллельны оси ординат. Значит, они параллельны между собой, и потому отрезки *KL* и *MN* — противоположные стороны квадрата *Q* с вершинами *K*(*a*, *c*), *L*(*a*, *d*), *M*(*b*, *e*), *N*(*b*, *f*). Следовательно, сторона этого квадрата равна $|c–d|$. С другой стороны, графики функций $y = ax+c$ и $y = ax+d$ параллельны и пересекают ось ординат в точках *C*(0, *c*) и *D*(0, *d*). Значит, они содержат противоположные стороны квадрата *P*, и длина стороны квадрата *P* равна расстоянию между этими прямыми. Заметим, что это расстояние не превосходит $CD = |c–d|$, и равно $|c–d|$ только тогда, когда прямые $y = ax+c$ и $y = ax+d$ перпендикулярны оси ординат. Но в этом случае графики $y = bx+e$ и $y = bx+f$ должны быть параллельны оси ординат, что невозможно.

6. *Точки M и N — середины сторон AB и BC соответственно треугольника ABC. На продолжении отрезка CM за точку M отмечена точка D. Оказалось, что BC = BD = 2 и AN = 3. Докажите, что $\angle ADC = 90°$.* (А. Кузнецов)

Решение. Обозначим через *K* точку пересечения медиан *AN* и *CM*. По свойству медиан $KC = 2KM$ и $AK = 2KN$. Поскольку к тому же $AN = 3$, то $KN = 1$. Таким образом в треугольнике *BKC* медиана к стороне *BC* равна $1 = BC/2$, поэтому $\angle BKC = 90°$. Это означает, что *BK* — высота треугольника *BCD*, в котором $BD = BC$. Следовательно, *BK* — его медиана. Поэтому $DK = KC = 2KM$, откуда $KM = DK/2 = DM$. Получается, что диагонали четырехугольника делятся точкой пересечения пополам, то есть *ADBK* — параллелограмм. Значит, $BK \parallel AD$, откуда $\angle ADC = \angle BKD = 90°$, что и требовалось доказать.

7. *На доске написаны числа 1, 2, ..., 1000. Разрешается стереть любые два числа a и b и записать вместо них числа ab и a^2+b^2. Можно ли такими операциями добиться, чтобы среди чисел, написанных на доске, было хотя бы 700 одинаковых?* (М. Антипов)

Ответ. Нельзя. **Решение**. Проследим за количеством чисел на доске, кратных трём. Заметим, что если оба числа *a*, *b* делились на 3, то и оба новых числа — тоже, если ровно одно из чисел *a*, *b* было кратно трём, то *ab* кратно трём, а a^2+b^2 — нет. Наконец, если оба числа *a*, *b* не делились на 3, то и a^2+b^2 даёт остаток 2 при делении на 3, т. е. чисел, кратных трём, и не появляется. Таким образом, общее количество чисел, кратных трём, не меняется. Теперь заметим, что исходно таких чисел было 333 (3, 6, …, 999), а если бы после нескольких операций на доске оказалось хотя бы 700 равных чисел, то чисел, кратных трём, было бы либо не менее 700, либо не более 300. Противоречие.

8. *Дано натуральное число k. В городе несколько детей, они ходят в несколько кружков. Известно, что в каждый кружок ходит не более 3k детей, любой ребёнок ходит ровно в три кружка, и для любых двух детей есть кружок, в которой оба они ходят. Какое наибольшее количество детей может быть в городе?* (И. Богданов, Г. Челноков)

Ответ. $7k$. **Решение**. *Пример*. Разобьём $7k$ детей на 7 групп (пронумерованных от 1 до 7) по k детей в каждой и составим 7 кружков из детей групп (1, 2, 3); (1, 4, 5); (1, 6, 7); (2, 4, 6); (2, 5, 7); (3, 4, 7); (3, 5, 6). Нетрудно проверить, что все условия выполнены.

Оценка. Если все кружки состоят из не более, чем $3(k–1)$ детей, можно заменить k на $k–1$ (и доказать, что число детей не превосходит $7(k–1)$). Таким образом, можно считать, что в одном кружке *A* есть хотя бы $3k–2$ ребёнка. Можно считать также, что есть ребёнок *s* вне *A*, иначе число детей не больше $3k$. Три кружка, в которые ходит *s*, покрывают *A* (так как у *s* есть общий кружок с любым ребёнком из *A*). Значит, есть кружок, отличный от *A* и пересекающийся с *A* хотя бы по k детям.

Пусть d — наибольшее количество детей в пересечении двух различных кружков; по доказанному выше, $d \geq k$. Рассмотрим кружки *B* и *C*, пересекающиеся по d детям. Пусть *X* — пересечение кружков *B* и *C*, а *Y* — множество всех детей, не ходящих ни в *B*, ни в *C*.

Пусть x — ребёнок из *X*. Он ходит в *B*, *C* и в какой-то третий кружок D_x, в который по условию должны ходить все дети из *Y*. Если для какого-то ребёнка z из *X* его третий кружок D_z отличен от D_x, то D_z и D_x пересекаются хотя бы по *Y*, откуда $|Y| \leq d$; значит, общее число детей $|B|+|C|–|X|+|Y|$ не превосходит $3k+3k–d+d = 6k$. Иначе кружок D_x содержит всех детей из *X* и *Y*, то есть $|X|+|Y| \leq 3k$, откуда общее число детей не больше $3k+3k–2|X|+(|X|+|Y|) \leq 9k–2d \leq 7k$.

Замечание. При ограничении на размер кружка $3k+1$ или $3k+2$ в задаче будут получаться ответы $7k+1$ и $7k+4$, соответственно.