XII МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА имени ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА
3 (заключительный) этап, 24-27 марта 2020 г.

Первый день.

1. На доске написано четыре положительных числа. Докажите, что какие-то два из них отличаются меньше, чем на треть суммы двух остальных.

2. В лагерь приехали 99 школьников, причём все приехавшие имеют одно и то же ненулевое количество знакомых среди остальных. Группу ребят, обладающую тем свойством, что любой из приехавших, не входящий в эту группу, знаком с кем-то из этой группы, будем называть *популярной*. Докажите, что из любой популярной группы, содержащей более 49 ребят, можно выбрать популярную группу, содержащую ровно 49 ребят.

3. Дан треугольник ABC, в котором $2\angle B - \angle A = 180°$. Внутри него выбрана точка K, а на его стороне AB — точка $L \neq B$ так, что $\angle ACK = 2\angle BCK$ и $BK = KL$. Докажите, что $CK+AL = AC$.

4. Натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ($k < 2020$) удовлетворяют такому условию: для любого из них можно выбрать из остальных чисел одно или несколько так, чтобы сумма их 1024-ых степеней делилась на его 1024-ую степень. Докажите, что среди этих чисел есть два равных.

XII МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА имени ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА
3 (заключительный) этап, 24-27 марта 2020 г.

Второй день.

5. Сумма дробных частей нескольких положительных чисел равна целой части их произведения. Докажите, что дробная часть суммы этих чисел равна произведению их целых частей. Напомним, что *целая часть* $[x]$ числа x — это наибольшее целое число, не превосходящее x (например, $[1{,}3] = 1$), а *дробная часть* $\{x\}$ числа x задается формулой $\{x\} = x-[x]$.

6. На каждой стороне выпуклого 100-угольника отметили по две точки, делящие эту сторону на три равные части. После этого всё, кроме отмеченных точек, стерли. Докажите, что по отмеченным точкам можно однозначно восстановить исходный 100-угольник.

7. Дано натуральное число n. Множество A, составленное из натуральных чисел, таково, что для любого натурального числа m, не превосходящего n, во множестве A есть число, делящееся на m. Какое наименьшее значение может принимать сумма всех элементов множества A?

8. В языке племени УЫ всего две буквы: «У» и «Ы». *Словом* считается любая последовательность из $2n$ букв У и $2n$ букв Ы (число n дано и фиксировано). Языковеды называют слова *похожими*, если одно можно получить из другого **одной** перестановкой двух соседних букв У и Ы. Какое наибольшее количество слов можно выписать на доску так, чтобы любые два из выписанных слов не были похожи?

В записи ответа допустимы только четыре арифметические операции, возведение в степень, взятие факториала и стандартных комбинаторных величин, там не должно содержаться многоточий и число использованных операций не должно зависеть от n.