

ХII олимпиада имени Леонарда Эйлера, заключительный этап

Решения заданий первого дня.

1. На доске написано четыре положительных числа. Докажите, что какие-то два из них отличаются меньше, чем на треть суммы двух остальных. (С. Берлов)

Решение. Пронумеруем написанные числа по возрастанию: $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$. Если $a_2 - a_1 < (a_3 + a_4)/3$, то все доказано. В противном случае $a_2 > a_2 - a_1 \geq (a_3 + a_4)/3 \geq 2a_3/3$, откуда $a_3 - a_2 < a_3/3 \leq a_4/3 < (a_4 + a_1)/3$.

2. В лагерь приехали 99 школьников, причём все приехавшие имеют одно и то же ненулевое количество знакомых среди остальных. Группу ребят, обладающую тем свойством, что любой из приехавших, не входящий в эту группу, знаком с кем-то из этой группы, будем называть популярной. Докажите, что из любой популярной группы, содержащей более 49 ребят, можно выбрать популярную группу, содержащую ровно 49 ребят. (С. Берлов)

Решение. Докажем, что из любой популярной группы, состоящей более, чем из 49 ребят, можно кого-то удалить так, что группа останется популярной. Пусть все приехавшие имеют ровно по k знакомых. Рассмотрим какую-то популярную группу A , в которую входит не менее 50 школьников. Будем считать, что все остальные школьники входят в группу B . Предположим, что при удалении из A любого школьника она перестаёт быть популярной. Тогда школьники из этой группы делятся на тех, для каждого из которых найдётся кто-то из B , знакомый только с ним — назовём эту группу A_1 — и остальных, которые знакомы только со школьниками из B (и потому, попав после удаления из группы A в группу B , оказываются незнакомы ни с кем из A) — назовём эту группу A_2 . Каждому школьнику из группы A_1 сопоставим одного школьника из B , который знаком только с этим школьником из A_1 . Они образуют группу B_1 . Пусть остальные школьники из B образуют группу B_2 . Пусть $|X|$ означает число элементов во множестве X . Все школьники из A суммарно имеют не менее $|A_1| + k|A_2|$ знакомств в B . С другой стороны, школьники из B суммарно имеют не более $|B_1| + k|B_2|$ знакомств в A . Значит, $|A_1| + k|A_2| \leq |B_1| + k|B_2|$. Но поскольку $|A_1| = |B_1|$, а $|A_2| \geq 50 - |A_1| > 49 - |B_1| = |B_2|$, получаем, что $|A_1| + k|A_2| > |B_1| + k|B_2|$ — противоречие.

3. Дан треугольник ABC , в котором $2\angle B - \angle A = 180^\circ$. Внутри него выбрана точка K , а на его стороне AB — точка $L \neq B$ так, что $\angle ACK = 2\angle BCK$ и $BK = KL$. Докажите, что $CK + AL = AC$. (И. Богданов)

Решение. Обозначим $\angle A = 2\alpha$, $\angle C = 3\gamma$, $\angle B = \pi - \beta$. Тогда из условия вытекает, что $\beta = 2\alpha + 3\gamma = 90^\circ - \alpha$, откуда $\alpha + \gamma = 30^\circ$, $\beta - \gamma = 60^\circ$ и $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Отложим на луче AB такой отрезок AP , что $AP = AC$. Достаточно доказать, что $CK = PL$. Опустим перпендикуляры: CH — на AP , KT — на CH , KM — на AB . Заметим, что $\angle CPB = 90^\circ - \alpha = \beta = \angle PBC$, откуда $PH = BH$. Кроме того, из равенства $BK = KL$ следует, что $LM = MB$. Поэтому $KT = MH = LP/2$. Заметим теперь, что $\angle KCB = \angle C/3 = \gamma$, и потому $\angle KCT = \gamma + \alpha = 30^\circ$, откуда $CK = 2KT = PL$, что и требовалось доказать.

4. Натуральные числа a_1, a_2, \dots, a_k ($k < 2020$) удовлетворяют такому условию: для любого из них можно выбрать из остальных чисел одно или несколько так, чтобы сумма их 1024-ых степеней делилась на его 1024-ую степень. Докажите, что среди этих чисел есть два равных. (С. Кудря)

Решение. Заметим прежде всего, что чисел, меньших числа $2^{11} = 2048$ и взаимно простых с ним ровно 1024, поэтому по теореме Эйлера 1024-ая степень нечетного числа при делении на 2048 дает остаток 1. Пусть среди наших чисел есть четное число a_i . Тогда его 1024-ая степень делится на 2^{11} . Поскольку единицами в количестве, не большем $k < 2020 < 2^{11}$, число, делящееся на 2^{11} , не набрать, числа, сумма 1024-ых степеней которых делится на 1024-ую степень числа a_i , все четны. Тогда мы можем удалить из нашего набора все нечетные числа, а все четные разделить на 2. Получится новый набор менее чем из 2020 чисел, удовлетворяющий условию, причем максимальное число набора при этом уменьшилось. После нескольких таких операций придем к набору, где все числа нечетны.

Пусть сумма 1024-ых степеней m нечетных чисел делится на 1024-ую степень еще одного нечетного числа. Обозначим частное через n . Поскольку все 1024-ые степени дают остаток 1 при делении 2^{11} , получаем, что $m - n$ должно делиться на 2^{11} . Поскольку $m < 2^{11}$, имеем $n \geq m$. Тогда выберем из наших чисел наибольшее, и если оно не равно никакому из остальных, получим противоречие, ибо частное n будет меньше числа слагаемых m .

ХII олимпиада имени Леонарда Эйлера, заключительный этап

Решения заданий второго дня.

5. Сумма дробных частей нескольких положительных чисел равна целой части произведения. Докажите, что дробная часть суммы этих чисел равна произведению их целых частей. Напомним, что целая часть $[x]$ числа x — это наибольшее целое число, не превосходящее x (например $[1,3] = 1$), а дробная часть $\{x\}$ числа x задается формулой $\{x\} = x - [x]$. (М. Дидин)

Решение. Если дробная часть числа равна целому числу, то это 0. Значит, надо доказать, что сумма наших чисел — целое число и произведение их целых частей равно 0. Первое очевидно, так как по условию сумма дробных частей наших чисел — целое число. Допустим, второе неверно. Тогда у всех наших чисел x_1, \dots, x_n целые части не меньше 1, и мы имеем

$x_1 \dots x_n = ([x_1] + \{x_1\}) \dots ([x_n] + \{x_n\}) \geq [x_1] \dots [x_n] + \{x_1\}[x_2] \dots [x_n] + \dots + [x_1][x_2] \dots \{x_n\} + \dots \geq 1 + \{x_1\} + \dots + \{x_n\}$,
откуда $x_1 \dots x_n \geq 1 + [x_1 \dots x_n]$, что невозможно.

6. На каждой стороне выпуклого 100-угольника отметили по две точки, делящие эту сторону на три равные части. После этого всё, кроме отмеченных точек, стерли. Докажите, что по отмеченным точкам можно однозначно восстановить исходный 100-угольник. (С. Берлов)

Решение. Допустим, есть выпуклый 100-угольник M , отличный от стертого 100-угольника N , у которого набор отмеченных точек такой же. Пусть на сторонах AB, BC и CD многоугольника N отмечены точки $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$, идущие от A к D в указанном порядке. Тогда на стороне UV 100-угольника M , на которой лежит точка A_2 , должна лежать и точка B_1 — иначе отмеченные точки будут находиться по обе стороны от прямой UV , что противоречит выпуклости 100-угольника M . Таким образом, стороны 100-угольника M лежат на прямых, соединяющих отмеченные точки 100-угольника N , соседние с его вершинами.

Пусть VW — следующая за UV сторона 100-угольника M . На ней лежат отмеченные точки B_2 и C_1 . Так как точка пересечения B_1 диагоналей четырехугольника A_2BVB_2 делит их пополам, прямые A_2B и VB_2 , то есть AB и VW , параллельны. Аналогично, прямая VW параллельна стороне DE 100-угольника N , идущей после CD . Получается, что $AB \parallel DE$, то есть каждая сторона 100-угольника N параллельна двум сторонам, располагающимся через две от нее. Но у выпуклого многоугольника не может быть трех параллельных сторон. Противоречие.

7. Дано натуральное число n . Множество A , составленное из натуральных чисел, таково, что для любого натурального числа t , не превосходящего n , во множестве A есть число, делящееся на t . Какое наименьшее значение может принимать сумма всех элементов множества A ? (А. Кузнецов)

Ответ. $(k+1)+(k+2)+\dots+(2k+1) = (k+1)(3k+2)/2$ при $n = 2k+1$ и $(k+1)+\dots+2k = k(3k+1)/2$ при $n = 2k$.

Решение. Пример. Искомое множество образуют слагаемые, указанные в ответе.

Оценка. Лемма. Пусть $a_1 < a_2 < \dots < a_k < 2a_1$. Тогда НОК чисел a_1, a_2, \dots, a_k не меньше их суммы. **Доказательство.** Пусть НОК чисел a_1, \dots, a_k есть $M = a_1n_1 = a_2n_2 = \dots = a_kn_k$. Тогда $2n_k > n_1 > n_2 > \dots > n_k$. Следовательно, $2n_k - n_k \geq k$ и $M \geq ka_k \geq a_1 + \dots + a_k$.

Пусть теперь A — множество, удовлетворяющее условиям задачи. Каждому натуральному числу из указанных в ответе сопоставим одно из делящихся на него чисел множества A . Тогда каждое число из A делится на НОК всех сопоставленных ему чисел, и, стало быть, не меньше суммы этих чисел, а сумма всех чисел из A — не меньше суммы, указанной в ответе.

8. В языке племени УБI всего две буквы: «У» и «И». Словом считается любая последовательность из $2n$ букв У и $2n$ букв И (число n дано и фиксировано). Языковеды называют слова похожими, если одно можно получить из другого **одной** перестановкой двух соседних букв У и И. Какое наибольшее количество слов можно выписать на доску так, чтобы любые два из выписанных слов не были похожи? В записи ответа допустимы только четыре арифметические операции, возведение в степень, взятие факториала и стандартных комбинаторных величин, там не должно содержаться многоточий и число использованных операций не должно зависеть от n . (Д. Белов, И. Богданов)

Ответ. $\frac{C_{4n}^{2n} - C_{2n}^n}{2} + C_{2n}^n = \frac{C_{4n}^{2n} + C_{2n}^n}{2}$. **Решение.** Оценка. Всего имеется C_{4n}^{2n} слов: по числу размещений

$2n$ букв «У» по $4n$ местам. Разобьём каждое слово на блоки по 2 символа. Если есть хотя бы один блок из разных букв, назовём самый левый такой блок *вариативным*. Назовём два слова *идентичными*, если они совпадают везде, кроме общего вариативного блока. В наборе попарно непохожих слов не может быть двух идентичных. Все слова разбиваются на пары идентичных, кроме слов, в которых каждый блок состоит из двух одинаковых букв (назовём их *уникальными* и заметим, что их C_{2n}^n). Отсюда и следует оценка.

Пример. Выберем все слова, где сумма мест, на которых стоит буква «У», имеет ту же чётность, что и n . Они, очевидно, попарно непохожи. С другой стороны, в любой паре идентичных слов ровно одно выбрано, и все уникальные тоже выбраны. Поэтому на этом наборе оценка достигается.