Эйлер, финал, черновик, версия 3, решения

1. Прямые $y = ax+b$, $y = bx+c$, $y = cx+d$, $y = dx+a$ ограничивают квадрат. Чему может равняться площадь этого квадрата (укажите все возможности)? (И. Рубанов)

Ответ. 2. **Решение**. Данные в условии прямые разбиваются на две пары параллельных. Поэтому либо 1) $a = b$ и $c = d$, либо 2) $a = c$ и $b = d$, либо 3) $a = d$ и $b = c$.

В первом случае квадрат ограничен прямыми $y = ax+a$, $y = ax+c$, $y = cx+c$, $y = cx+a$. Прямая $y = ax+a$ пересекается с прямыми $y = cx+c$ и $y = cx+a$ в точках $M(-1, 0)$ и $N(0, a)$, а прямая $y = ax+c$ — в точках $Q(0, c)$ и $P(1, a+c)$. Так как точки M и P лежат с разных сторон от прямой NQ, отрезки MP и NQ являются диагоналями квадрата. Следовательно, вершины квадрата, идут в порядке $MNPQ$, а точка P лежит на оси абсцисс, то есть имеет координаты $(1, 0)$, откуда $PM = 2$. Осталось заметить, что в случае $a = 1$, $c =-1$ $MNPQ$ — действительно квадрат площади $PM^2/2 = 2$.

Третий случай аналогичен первому, а второй невозможен, так как тогда прямые $y = ax+b$ и $y = cx+d$ совпадают.

2. Кощей Бессмертный открыл счет в банке «Спёрбанк». Изначально на счете было 0 рублей. В первый день Кощей кладёт на счёт k ($k > 0$) рублей, а каждый следующий день добавляет туда на один рубль больше, чем накануне (на второй день он добавляет $k+1$ рублей, на третий — $k+2$ рубля и т. д.) Каждый раз сразу после того, как Кощей вносит деньги на счёт, общая величина счёта уменьшается банком в два раза. Найдите все такие k, при которых сумма на счёте всегда будет выражаться целым числом рублей. (С. Берлов)

Ответ. 2. **Решение**. Покажем по индукции, что если Кощей в первый день внёс 2 рубля, то на n-ый день у него на счету будет n рублей. База $n = 1$: на первый день два внесённных Кощеем рубля стараниями Спёрбанка тут же превратились в 1 рубль. Пусть на n-ый день на счету у Кощея оказалось n рублей. Добавив на $(n+1)$-ый день $n+2$ рубля, Кощей получит на счету $(n+n+2)/2 = n+1$ рублей, что и требовалось доказать.

Допустим теперь, что в первый день Кощей внёс $2+k$ рублей, где $k \neq 0$. Покажем, что в этом случае у Кощея в n-ый день на счету будет $n+(k/2+k/4+\ldots+k/2^n)$ рублей. Из этого будет следовать единственность ответа 2, так как при $n = m+1$, где m — степень, с которой двойка входит в разложение числа k на простые множители, сумма в скобках окажется дробной. База $n = 1$ индукции очевидна. Пусть на n-ый день на счету у Кощея оказалось $n+k/2+k/4+\ldots+k/2^n$ рублей. Добавив на $(n+1)$-ый день $n+2+k$ рублей, Кощей получит на счету $(2n+2+k+k/2+k/4+\ldots+k/2^n)/2 = n+1+k/2+k/4+\ldots+k/2^{n+1}$ рублей, что и требовалось доказать.

3. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки P и Q соответственно. Отрезки CP и AQ пересекаются в точке R. Оказалось, что $AR = CR = PR+QR$. Докажите, что из отрезков AP, CQ и PQ можно составить треугольник, один из углов которого равен углу B. (С. Берлов)

Решение. Отметим точки K и L на отрезках CP и AQ соответственно таким образом, чтобы $CK = RP$, а $AL = RQ$. Рассмотрим точку M, симметричную R относительно середины отрезка AC. Нетрудно показать, что четырёхугольники $APKM$ и $CQLM$ — параллелограммы, поэтому треугольник LKM — искомый. В самом деле, $MK = AP$, $ML = CQ$, $\angle LMK = \angle ABC$ (так как прямые BA, BC, MK и ML ограничивают параллелограмм), $RL = AR–AL = AR–QR = PR$ и, аналогично, $RK = QR$, откуда $\Delta PRQ = \Delta LRK$ и $LK = PQ$.

4. Несколько команд сыграли турнир в один круг, причём ничьих не было. Оказалось, что среди любых 100 команд есть команда, выигравшая у всех остальных 99 команд, но нет команды, проигравшей всем остальным 99 командам. Какое наибольшее число команд могло участвовать в турнире? (В. Мигрин, К. Тыщук, Н. Власова)

Ответ. 148. **Решение**. Оценка. Назовём *доменом* команды совокупность всех команд, у которых она выиграла. Команду, в домене которой не менее 99 команд, назовём *доминатором*.

Пусть в турнире участвовали n команд. Возьмём любые 100 из них. По условию среди них есть доминатор. Заменим его одной из оставшихся команд. В получившейся сотне снова есть доминатор. Повторяя описанную процедуру, пока не побывавшие в сотне команды не закончатся, убеждаемся, что доминаторов у нас по крайней мере n–99.

Пусть доминатор A имеет домен P с наименьшим числом команд. Покажем, что тогда у команд из P выиграли все доминаторы. В самом деле, пусть есть доминатор B с доменом Q, куда не входит какая-то команда K из P. Тогда в силу минимальности домена P в домене Q есть команда M, не входящая в P. Если $B \neq K$ и $A \neq M$, то в сотне S команд, составленной из A, B, K, M и любых 96 команд из домена P, нет команды, победившей все остальные: такой командой может быть только A или B, но B проиграла K, а A проиграла M. Если $B = K$, дополним S до сотни ещё одной командой из P. Тогда A проиграла M, а B проиграла A. Случай, когда $A = M$, аналогичен, а случай, когда одновременно $B = K$ и $A = M$, невозможен.

Так как в домене P не меньше 99 команд, там есть команда L, проигравшая хотя бы 49 командам из этого домена — иначе суммарное число поражений в матчах команд из P между собой будет меньше суммарного числа побед. Тогда доминаторов не больше 49 — иначе, взяв 50 доминаторов, команду L и 49 победивших её команд из домена P, мы получили бы сотню (так как в домене P в силу доказанного выше нет доминаторов), в которой команда L проиграла всем остальным. Отсюда $n–99 \leq 49$, то есть $n \leq 148$.

Пример. Разделим 148 команд на 49 доминаторов и 99 доминируемых, проигравших всем доминаторам. Доминируемые команды расположим по кругу, и пусть каждая из них выиграет у 49 следующих за ней по часовой стрелке и проиграет остальным. Доминаторов занумеруем от 1 до 49, и пусть в каждом матче между ними побеждает команда с большим номером. Тогда в любой сотне команд будет хотя бы один доминатор, и доминатор с наибольшим номером победит все остальные команды. С другой стороны, в этой сотне будет хотя бы 51 доминируемая команда, и потому каждая из них победит по крайней мере одну из оставшихся, а каждый доминатор победит их все. Таким образом, команды, проигравшей всем остальным, в сотне не будет.

5. Диагонали трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) пересекаются в точке K. Внутри треугольника ABK нашлась такая точка M, что $\angle MBC = \angle MAD$, $\angle MCB = \angle MDA$. Докажите, что прямая MK параллельна основаниям трапеции. (М. Кунгожин)

Решение. Опустим из точки M перпендикуляры MP и MQ, на прямые AD и BC соответственно. Треугольники MBC и MAD подобны по двум углам. Поэтому $MP/MQ = AD/BC$. Теперь опустим перпендикуляры KR и KS на прямые AD и BC из точки K. Треугольники KBC и KDA также подобны по двум углам, откуда $KR/KS = AD/BC = MP/MQ = m$. Кроме того $MP+MQ = PQ = RS = KR+KS = n$. Тогда из равенств $MP/(n–MP) = m = KR/(n–KR)$ имеем $MP = mn/(m+1) = KR$. Таким образом, $MPRK$ — прямоугольник, откуда и следует утверждение задачи.

6. Петя, Вася и Толя вернулись с рыбалки, на которой каждый из них поймал некоторое количество рыб (хотя бы одну). После рыбалки они стали хвастаться своими уловами. Петя сказал: «Я поймал рыб не меньше, чем каждый из остальных!». Вася сказал: «Я поймал рыб не меньше, чем Петя и Толя в сумме!». Толя сказал: «Я поймал на 25% больше рыб, чем Вася!». Позже выяснилось, что каждый из ребят преувеличил свой улов не более, чем в a раз. Какое наименьшее значение могло принимать число a? (С. Берлов)

Ответ. 1,5. **Решение**. Пусть Петя, Вася и Толя поймали P, V и T рыб соответственно. По условию $aP \geq V \Leftrightarrow P/V \geq 1/a$, $aT \geq 5V/4 \Leftrightarrow T/V \geq 5/4a$. По условию же $aV \geq P+T$, откуда $a \geq P/V+T/V \geq 1/a+5/4a$. Умножив на a, получаем $a^2 \geq 2{,}25$, откуда $a \geq 1{,}5$. Пример, когда подходит $a = 1{,}5$: $P = 4$, $T = 5$, $V = 6$.

7. При каких натуральных n можно так отметить несколько клеток доски $n \times n$, чтобы во всех строках и столбцах было чётное число отмеченных клеток, а на всех $4n–6$ диагоналях, длина которых больше одной клетки, — нечётное? (С. Берлов)

Ответ. При всех нечётных n. **Решение**. При нечётном n отметим все клетки верхней и нижней горизонталей, кроме левых угловых. При чётном n будем рассуждать от противного. Раскрасим все клетки в шахматном порядке так, чтобы левый нижний угол был чёрным. Заметим, что среди белых клеток должно быть нечётное число отмеченных, поскольку все они находятся в объединении n–1 диагоналей, больших 1 по длине. Но если просуммировать отмеченные клетки во всех вертикалях, начиная со второй слева через одну, а потом добавить к ним сумму всех отмеченных клеток в горизонталях, начиная со второй снизу через одну, то каждую отмеченную белую клетку посчитаем ровно один раз, а каждую отмеченную чёрную — ноль или два раза, т. е. насчитаем нечётное число отмеченных клеток. Но это сумма нескольких чётных чисел. Противоречие.

8. Дано натуральное число n. За одну операцию можно либо вычесть из имеющегося числа любое натуральное число, меньшее его наименьшего простого делителя, либо разделить его на его наименьший простой делитель. Существует ли такое составное n, что из него нельзя получить простое число менее, чем за 2021 операцию? (С. Берлов)

Ответ. Существует. **Решение**. Пусть такого n не существует. Тогда существует такое $m < 2021$, что из каждого натурального числа можно указанными операциями получить простое не более чем за m операций, и есть число k, из которого нельзя получить простое число менее чем за m операций. Будем получать простое число из числа $k!+k$, следя отдельно за судьбой каждого из двух слагаемых. Всякий раз, когда мы вычитаем из суммы число, будем вычитать его из второго слагаемого, сохраняя первое, а на наименьший простой делитель суммы будем делить каждое из слагаемых. Поскольку второе слагаемое с каждой операцией убывает, перед каждой операцией текущее первое слагаемое будет делиться на текущее второе и все меньшие его числа, ибо можно считать, что предыдущими делениями были затронуты только сомножители в $k!$, большие текущего второго слагаемого. Поэтому пока текущее второе слагаемое больше 1, наименьший простой делитель суммы не превосходит наименьшего простого делителя второго слагаемого и потому делит первое слагаемое — а, значит, и второе. Следовательно, наименьший простой делитель суммы равен наименьшему простому делителю второго слагаемого.

Из сказанного следует, что пока текущее второе слагаемое больше 1, то, во-первых, оно при операциях ведет себя так, как будто первого слагаемого нет, и, во-вторых, текущая сумма является составным числом. Следовательно, не позднее момента, когда текущая сумма станет простым числом, текущее второе слагаемое должно обратиться в 1. Такое возможно только в случае, когда на предыдущем шаге второе слагаемое было простым числом. Но это значит, что к моменту превращения второго слагаемого в 1 — и, тем более, к моменту превращения суммы в простое число мы совершили не менее k+1 операции. Противоречие.