XIV МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий заключительного этапа, 1 день

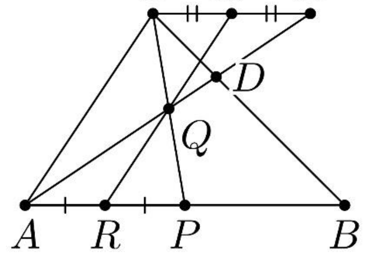
1. *Можно ли пронумеровать вершины, рёбра и грани куба различными целыми числами от –12 до 13 так, чтобы номер каждой вершины равнялся сумме номеров сходящихся в ней рёбер, а номер каждой грани равнялся сумме номеров ограничивающих её рёбер?* (И. Рубанов)

Ответ. Нельзя. **Решение**. Сложим все присвоенные номера, заменив номера вершин и граней суммами номеров граничащих с ними рёбер. Тогда номер каждого ребра будет входить в полученную сумму пять раз: сам по себе, в составе номеров двух своих концов и в составе номеров двух граней, в которых лежит ребро. Следовательно, если бы искомая нумерация была возможна, сумма всех номеров должна была бы делиться на 5. Но она равна 13.

2. *У царя Гиерона есть 13 металлических слитков, неразличимых на вид; царь знает, что их веса (в некотором порядке) равны 1, 2, ..., 13 кг. Ещё у него есть прибор, в который можно положить один или несколько из имеющихся 13 слитков, и он просигналит, если их суммарный вес равен ровно 46 кг. Архимед, знающий веса всех слитков, хочет написать на двух слитках их веса и за два использования прибора доказать Гиерону, что обе надписи правильны. Как действовать Архимеду?* (К. Кноп)

Решение. Пусть Архимед сначала положит в прибор четыре самых тяжёлых слитка. Их суммарный вес — $10+11+12+13=46$ кг, и прибор сработает. Других четвёрок слитков общим весом 46 кг у Архимеда нет. Значит, он показал Гиерону, какие четыре слитка — самые тяжёлые. Затем он положит в прибор 9 слитков весами 1, …, 8 кг и 10 кг. Прибор снова сработает. Поскольку, как легко видеть, других девяток слитков общим весом 46 кг у Архимеда нет, он показал Гиерону, каков набор из восьми самых лёгких слитков и слитка весом 10 кг. При этом оба раза в прибор клали ровно один слиток в 10 кг, а ни разу не клали ровно один слиток в 9 кг. Поэтому Архимеду достаточно было написать веса на слитках в 9 и 10 кг.

3. *На стороне BC треугольника ABC отмечена точка D. На стороне AB выбрана точка P. Отрезки PC и AD пересекаются в точке Q. Точка R — середина отрезка AP. Докажите, что существует фиксированная точка X, через которую прямая RQ проходит при любом выборе точки P.* (А. Кузнецов)



Решение. Проведем через точку C прямую, параллельную прямой AB, и пусть E — точка ее пересечения с прямой AD. Искомая точка X — это середина отрезка CE. В самом деле, точки R, Q и X лежат на одной прямой при любом выборе точки P как середины сторон и точка пересечения диагоналей трапеции $APEC$.

4. *Натуральные числа a, b и c, большие 2022, таковы, что a+b делится на c–2022, a+c делится на b–2022, b+c делится на a–2022. Какое наибольшее значение может принимать число a+b+c?* (С. Берлов)

Ответ. $2022\cdot85$. **Решение**. *Лемма*. Для любых натуральных d_1, d_2, d_3 если $1/d_1+1/d_2+1/d_3 < 1$, то $1-(1/d_1+1/d_2+1/d_3) \geq 1/42$. *Доказательство*. Пусть $d_1 \leq d_2 \leq d_3$ и $d = 1/d_1+1/d_2+1/d_3$. Если $d_1 > 2$, то d не превосходит $1/3+1/3+1/4 = 11/12$. Если $d_1 = 2$ и $d_2 > 3$, то d не превосходит $1/2+1/4+1/5 = 19/20$. Наконец, если $d_1 = 2$ и $d_2 = 3$, то d не превосходит $1/2+1/3+1/7 = 41/42$.

Рассмотрим число $N = a+b+c-2022$. Оно кратно $a-2022$, $b-2022$ и $c-2022$. Пусть $d_1 = N/(a-2022)$, $d_2 = N/(b-2022)$, $d_3 = N/(c-2022)$. Тогда $N/d_1+N/d_2+N/d_3 = N-4044$, откуда $1/d_1+1/d_2+1/d_3 = 1-4044/N$. По лемме $4044/N \geq 1/42$, т. е. $N \leq 2022\cdot84$, откуда $a+b+c = N+2022 \leq 2022\cdot85$. Примеры получаются, если взять $N = 2022\cdot84$: $a-2022 = N/2 \Rightarrow a = 2022\cdot43$; $b-2022 = N/3 \Rightarrow b = 2022\cdot29$; $c-2022 = N/7 \Rightarrow c = 2022\cdot13$.