IX МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА имени ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА
3 (заключительный) этап, 21-24 марта 2017 г.

Первый день.

1. Можно ли за каждую цифру от 0 до 9 назначить цену так, чтобы все 10 цен были различны и нашлись 20 идущих подряд натуральных чисел, каждое из которых, кроме первого, стоит дороже предыдущего? Здесь цена натурального числа — это сумма цен цифр в его записи.

2. График $y = x + b\sqrt{x} + c$, где $c > 0$, имеет с осью ординат общую точку C, а ось абсцисс пересекает в точках X_1 и X_2. Обозначим через O начало координат. Докажите, что $\angle CX_1O + \angle CX_2O = 90°$.

3. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Известно, что $AB = BC = CD = DE = 1$. Докажите, что $AD < 2$.

4. У Зевса имеются весы, позволяющие узнавать вес положенного на них груза, и мешок со 100 монетами, среди которых есть 10- и 9-граммовые. Зевсу известно общее число N 10-граммовых монет в мешке, но неизвестно, какие именно сколько весят. Он хотел бы сделать четыре взвешивания на весах и в результате гарантированно найти хотя бы одну 9-граммовую монету. При каком наибольшем N это возможно?

Второй день.

5. Некоторое натуральное число a разделили с остатком на числа 1, 2, 3, …, 1000. Могло ли так случиться, что среди остатков ровно по 10 раз встретятся числа 0, 1, 2, 3, …, 99?

6. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы A и C равны 100°. На сторонах AB и BC выбраны точки X и Y соответственно так, что $AX = CY$. Оказалось, что прямая YD параллельна биссектрисе угла ABC. Найдите угол AXY.

7. Дана окружность длины 90. Можно ли отметить на ней 10 точек так, чтобы среди дуг с концами в этих точках имелись дуги со всеми целочисленными длинами от 1 до 89?

8. Дано нечётное натуральное число a, большее 100. На доску выписали все натуральные числа вида $\frac{a-n^2}{4}$, где n — натуральное число. Оказалось, что при $n \leq \sqrt{\frac{a}{5}}$ все они простые. Докажите, что и каждое из остальных выписанных на доску натуральных чисел простое или равно единице.