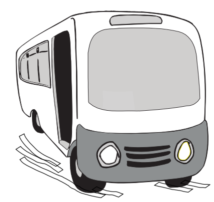
1963

6-й класс

1963.01. Из пункта A в пункт B вышли два человека. Первый шел по шоссе со скоростью 5 км/час, а второй по тропинке со скоростью 4 км/час. Первый из них пришел в пункт B на час позже и прошел на 6 километров больше. Найдите расстояние от A до B по шоссе.

1963.02. Пешеход идет по шоссе со скоростью 5 км/час. По этому шоссе в обе стороны с одинаковой скоростью ходят автобусы, встречаясь каждые 5 минут. В 12 часов пешеход заметил, что автобусы встретились около него и, продолжая идти, стал считать встречные и обгоняющие автобусы. В 14 часов около него вновь встретились автобусы. Оказалось, что за это время пешеходу встретилось на 4 автобуса больше, чем обогнало его. Найдите скорость автобуса.



1963.03. Докажите, что разность $43^{43} - 17^{17}$ делится нацело на 10.

1963.04. Из шахматной доски вырезаются две клетки на границе доски. В каком случае можно и в каком нельзя покрыть оставшиеся клетки доски фигурами вида □□ без наложения?

1963.05. Расстояние от города A до города B (по воздуху) равно 30 километров, от B до C — 80 километров, от C до D — 236 километров, от D до E — 86 километров, от E до A — 40 километров. Найдите расстояние от E до C.

1963.06. Можно ли выписать в ряд числа от 1 до 1963 так, чтобы любые два соседних числа и любые два числа, расположенные через одно, были взаимно просты?

7-й класс

1963.07. Площадь четырехугольника равна 3 см^2, а длины его диагоналей равны 6 см и 2 см. Найдите угол между диагоналями.

1963.08. Докажите, что число $1 + 2^{3456789}$ — составное.

1963.09. В шахматном турнире участвовало 20 человек. Участник, занявший чистое (неразделенное) 19-е место, набрал $9,5$ очков. Как могли распределиться очки между другими участниками?

1963.10. Сумма расстояний между серединами противоположных сторон четырехугольника равна его полупериметру. Докажите, что этот четырехугольник — параллелограмм.

1963.11. В автобусе без кондуктора едут 40 пассажиров, имеющих при себе только монеты достоинством в 10, 15 и 20 копеек. Всего у пассажиров 49 монет. Докажите, что пассажиры не смогут уплатить требуемое количество денег в кассу и правильно рассчитаться между собой. (Стоимость автобусного билета в 1963 году составляла 5 копеек.)

1963.12. Некоторое натуральное число a делят с остатком на все натуральные числа, меньшие a. Сумма всех различных (!) остатков оказалась равной a. Найдите a.

1963.13. Из шахматной доски вырезали две клетки. В каком случае можно и в каком случае нельзя покрыть оставшиеся клетки доски доминошками (т.е. фигурками вида $\square\!\square$) без наложения?

8-й класс

1963.14. На медиане, проведенной из вершины треугольника на основание, взята точка A. Сумма расстояний от A до боковых сторон треугольника равна s. Найдите расстояния от A до боковых сторон, если длины боковых сторон равны x и y.

1963.15. Дробь $0,abc\ldots$ составлена по следующему правилу: a и c — произвольные цифры, а каждая следующая цифра равна остатку при делении на 10 от суммы двух предыдущих цифр. Докажите, что эта дробь — чисто периодическая.

1963.16. На плоскости нарисованы два выпуклых многоугольника с m и n сторонами ($m > n$). На какое наибольшее возможное число частей они могут разбить плоскость?

1963.17. Сумма трёх целых чисел, являющихся точными квадратами, делится на 9. Докажите, что среди них есть два числа, разность которых делится на 9.

1963.18. Дано $k+2$ целых числа. Докажите, что среди них найдутся два целых числа такие, что либо их сумма, либо их разность делится на $2k$.

1963.19. Прямой угол вращается вокруг своей вершины. Найдите геометрическое место середин отрезков, соединяющих точки пересечения сторон угла и данной окружности.

9-й класс

1963.20. Пятизначное число $\overline{ABCDE}$ делится на 41. Докажите, что если его цифры переставить в циклическом порядке, то полученное число также будет делиться на 41[1].

1963.21. Есть две группы чисел:

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant 0, \quad b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n \geqslant 0\,.$$

Докажите, что

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \geqslant a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1\,.$$

1963.22. Постройте трапецию по диагоналям и боковым сторонам.

1963.23. Дано две окружности радиуса $R = 1/2\pi$. На одной окружности отмечено 20 точек, а на другой — несколько дуг, сумма длин которых меньше $1/20$. Докажите, что одну окружность можно наложить на другую так, чтобы ни одна из отмеченных точек не попала внутрь отмеченной дуги.

1963.24. См. задачу 18.

1963.25. Решите в натуральных числах уравнение:

$$(z+1)^x - z^y = -1\,.$$

---

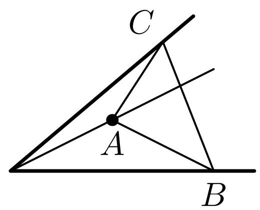
[1] Задача 20 является безусловным рекордсменом Ленинградских городских олимпиад по количеству повторов. В первый раз (насколько это известно составителю) она была предложена на олимпиаде 1958 года. См. также вариант 1978 года.

10, 11-е классы

1963.26. Докажите, что если два уравнения с целыми коэффициентами

$$X^2 + p_1X + q_1 = 0, \quad X^2 + p_2X + q_2 = 0$$

имеют общий нецелый корень, то $p_1 = p_2$, $q_1 = q_2$.



1963.27. Дан трехгранный угол и точка A на его ребре. По двум другим его ребрам скользят точки B и C. Найдите геометрическое место центров тяжести треугольников ABC.

1963.28. Докажите, что уравнению $A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = B$ не может удовлетворять более половины всех наборов $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где каждое из x_i равно 0 или 1, если известно, что не все числа A_1, A_2, …, A_n, B равны нулю.

1963.29. В многограннике плоский угол α называется прилегающим к ребру, если это ребро является стороной угла α. Докажите, что в любой треугольной пирамиде найдется ребро, к которому прилегают только острые углы.

1963.30. Докажите, что для любых k бесконечных последовательностей натуральных чисел

$$\begin{array}{l} x_1^1,\ x_2^1,\ x_3^1,\ \ldots \\ x_1^2,\ x_2^2,\ x_3^2,\ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^3,\ x_2^3,\ x_3^3,\ \ldots \end{array}$$

найдутся такие номера p и q, что для любого $1 \leqslant i \leqslant k$ имеем $x_p^i \geqslant x_q^i$.

1963.31. Докажите, что на плоскости нельзя расположить 10 равных квадратов так, чтобы ни один из них не залезал внутрь другого, а один из квадратов соприкасался со всеми другими.

Отборочный тур

1963.32. Найдите первые 1963 цифры после запятой в десятичной записи числа $(\sqrt{26} + 5)^{1963}$.

1963.33. Как расположить в пространстве спичечный коробок, чтобы его проекция на плоскость имела наибольшую площадь?

1963.34. На плоскости дано 5 кругов, каждые два из которых пересекаются. Докажите, что какие-то три из них имеют общую точку.

1963.35. Натуральное число a делится на 1, 2, 3,. . . , 9. Докажите, что если $2a$ представлено в виде суммы нескольких слагаемых, каждое из которых равно $1, 2, 3, \ldots, 9$, то среди них найдется несколько, сумма которых равна a.

1963.36.* Даны четыре положительных числа, причем сумма любых трёх из них больше четвертого. Докажите, что есть треугольная пирамида, для которой эти числа являются площадями ее граней.

1963.37. Решите в целых числах уравнение

$$x^4 - 2y^4 - 4z^4 - 8t^4 = 0\,.$$

1963.38. Докажите, что замкнутая ломаная длины 1, расположенная на плоскости, может быть накрыта кругом радиуса ${}^1\!/_4$.

1963.39. Существует ли треугольник с целочисленными длинами сторон, высот и биссектрис?

1963.40. При каких n $2^n + 1$ является нетривиальной степенью натурального числа?

1963.41. Дана клетчатая бумага. Через два узла проведены параллельные прямые. Докажите, что в образовавшейся замкнутой полосе находится бесконечно много узлов клетчатой бумаги.

Комментарий.

1. Интересно, что задача 10 предлагалась на олимпиаде 1980 года — причем в 9-м (!) классе. Совпадения подобного рода могут дать интересный материал для возможного сравнения школьных программ разных лет или уровня подготовки школьников.
2. Как мы уже упомянули, задача 20 предлагалась на ЛМО несколько раз. При этом уже в первый раз (в 1958-м году) судя по всему, эта задача была “седой” классикой — её можно найти даже в книжке Игнатьева [?], изданной аж в 1909 году.

Затем её опять использовали в 1978 году. А вот это уже свидетельствует о том, что, увы, архивы жюри предыдущих лет к тому моменту были безвозвратно утрачены.