1966

6-й класс

1966.01. Какое из чисел больше:

$$\underbrace{1000\ldots001}_{\text{1965 нулей}}/\underbrace{1000\ldots001}_{\text{1966 нулей}} \quad \text{или} \quad \underbrace{1000\ldots001}_{\text{1966 нулей}}/\underbrace{1000\ldots001}_{\text{1967 нулей}}?$$

1966.02. В футбольном чемпионате участвуют 30 команд. Докажите, что в любой момент найдутся две команды, сыгравшие к этому моменту одинаковое число матчей.

1966.03. На доске выписаны все целые числа от 1 до 1966. Разрешается стереть любые два числа, записав вместо них их разность. Докажите, что многократным повторением такой операции нельзя добиться, чтобы на доске остались только нули.

1966.04. На белую плоскость брызнули черной краской. Докажите, что найдутся три точки одного цвета, лежащие на одной прямой, причем так, что одна из точек лежит посередине между двумя другими.

1966.05. В шахматном турнире играют более трёх шахматистов и каждый играет с каждым одинаковое число раз. В турнире было 26 туров. После 13 тура один из участников обнаружил, что у него нечетное число очков, а у каждого из других участников — четное число очков. Сколько шахматистов участвовало в турнире?

7-й класс

1966.06. См. задачу 3.

1966.07. Докажите, что радиус окружности равен разности длин двух хорд, одна из которых стягивает дугу в $1/10$ окружности, а другая — дугу в $3/10$ окружности.

1966.08. Докажите, что при любом натуральном n число $n(2n+1)(3n+1)\ldots(1966n+1)$ делится на каждое простое число, меньшее 1966.

1966.09. Какое число нужно поставить на место $*$, чтобы следующая задача имела единственное решение: “*На плоскости расположено n прямых, пересекающихся в $*$ точках. Найти n.*”?

1966.10. См. задачу 4.

1966.11. На плоскости расположены n точек так, что любой треугольник с вершинами в этих точках имеет площадь меньше 1. Докажите, что все эти точки можно заключить в треугольник площади 4[1].

8-й класс

1966.12. См. задачу 9[2].

1966.13. См. задачу 8.

1966.14. См. задачу 11.

1966.15. Докажите, что сумма всех делителей числа n^2 нечётна.

1966.16. В четырехугольнике три тупых угла. Докажите, что большая из двух его диагоналей выходит из вершины острого угла.

1966.17. Числа x_1, x_2, … строятся по следующему правилу: $x_1 = 2$, $x_2 = (x_1^5 + 1)/5x_1$, $x_3 = (x_2^5 + 1)/5x_2$, …. Докажите, что сколько бы мы ни продолжали такое построение, все получающиеся числа будут не меньше $1/5$ и не больше 2.

9-й класс

1966.18. Вырезать из данного прямоугольника ромб наибольшей площади.

1966.19. Сколько решений в целых числах имеет уравнение $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1960}$?

1966.20. Докажите, что можно раскрасить плоскость с помощью девяти красок таким образом, чтобы расстояние между любыми двумя точками одного цвета было отлично от 1966 метров.

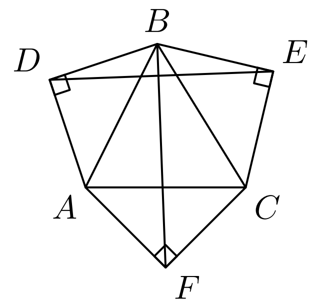
---

[1] В одном из архивных вариантов 7 класса вместо задачи 11 приведена задача 5.

[2] В книге [?], в приложении к которой даны варианты олимпиад 1964–66 годов, к сожалению, допущено несколько ошибок; в том числе и в вариантах 1966 года — вместо задачи 12 приведена задача 4.

1966.21. P и Q — простые числа, $Q^3 - 1$ делится на P, $P - 1$ делится на Q. Докажите, что $P = 1 + Q + Q^2$.

1966.22. На сторонах треугольника ABC, как на гипотенузах, строятся во внешнюю сторону равнобедренные прямоугольные треугольники ABD, BCE и ACF. Докажите, что отрезки DE и BF равны и взаимно перпендикулярны.



1966.23.* Имеется k красок. Сколькими способами можно раскрасить стороны данного правильного n-угольника так, чтобы соседние стороны были окрашены в разные цвета (многоугольник поворачивать нельзя)?

10, 11-е классы

1966.24. См. задачу 18.

1966.25. См. задачу 19.

1966.26. См. задачу 20 для 11 красок.

1966.27. См. задачу 23.

1966.28. Для каких ε можно разбить отрезок длины $2a$ на n отрезков, каждый из которых имеет длину не большую a, так, чтобы из них нельзя было составить отрезка, длина которого отличается от a меньше, чем на ε [3]?

1966.29. Найдите все комплексные решения системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n \\ x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = n \\ \qquad \ldots \\ x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n = n\,. \end{cases}$$

[3] Условие задачи 28 звучит несколько двусмысленно; видимо, на самой олимпиаде давались необходимые пояснения к этой задаче.

Отборочный тур

1966.30. m и n — натуральные числа, причем m — нечетно. Докажите, что числа $2^n + 1$ и $2^m - 1$ взаимно просты.

1966.31.* Пусть T_n — площадь наибольшего по площади n-угольника, содержащегося в данном выпуклом k-угольнике (при $3 < n < k$). Докажите, что для любого $n < k$ имеем $T_{n-1} + T_{n+1} \leqslant 2T_n$.

1966.32. Из ряда чисел $1, 2, 3, 4, \ldots, 2^n$ выбрасывается $[(2^n - 2)/3]$ чисел. Докажите, что среди оставшихся чисел найдутся два, одно из которых вдвое больше другого.

1966.33. Разложением квадрата называется разбиение его на конечное число прямоугольников, стороны которых параллельны сторонам квадрата. Разложение называется примитивным, если оно не является разбиением более крупного разложения. При каких n существует примитивное разложение квадрата на n прямоугольников?

1966.34.* На плоскости дано n точек общего положения. Некоторые из них соединены отрезками так, чтобы из каждой точки в любую другую можно было пройти единственным способом. Докажите, что таких способов соединения существует n^{n-2}.

1966.35.* В круг вписан n-угольник со сторонами $a_1, a_2, \ldots, a_n$, причем так, что центр круга лежит внутри n-угольника. Докажите, что этот круг можно покрыть n кругами радиусов $na_1/6, na_2/6, \ldots, na_n/6$.

Комментарий.

На олимпиаде 1966 года был установлен своеобразный рекорд по количеству первых премий, присужденных в одной параллели: школьники 11 класса получили 34 диплома первой степени.