1970

6-й класс

1970.01. Девятизначное число, в записи которого есть все цифры, кроме нуля, после некоторой перестановки цифр уменьшилось в восемь раз. Найдите все такие числа.

1970.02. Длины сторон треугольника — последовательные целые числа. Найдите стороны этого треугольника, если известно, что одна из его медиан перпендикулярна одной из его биссектрис.

1970.03. В некотором поселке 1970 жителей. Время от времени они меняют друг у друга одну монету в 10 копеек на два пятака или наоборот. Может ли случиться так, что в течение некоторой недели каждый из них отдал при таких обменах ровно 10 монет?

1970.04. Из трехзначного числа вычли сумму его цифр. С полученным числом проделали то же самое и т. д., всего 100 раз. Докажите, что в результате получится нуль.

1970.05. В некотором государстве любые два города соединены воздушным или водным путем. Докажите, что из любого города в любой можно добраться по воде или из любого города в любой можно добраться по воздуху.

1970.06. В волейбольном турнире участвовало 12 команд. Никто не набрал 7 очков. Докажите, что найдутся три команды A, B и C такие, что A выиграла у B, B — у C, а C — у A.

7-й класс

1970.07. Найдите угол B треугольника ABC, если высота CH равна половине стороны AB, а угол A равен $75°$.

1970.08. См. задачу 4.

1970.09. Дан равнобедренный треугольник с углом при вершине $20°$. Докажите, что

а) боковая сторона больше удвоенного основания;
б) боковая сторона меньше утроенного основания.

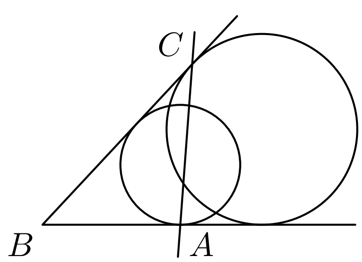
1970.10. См. задачу 5.

1970.11. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} X^2 = 2Y - 1 \\ X^4 + Y^4 = 2\,. \end{cases}$$

1970.12. В футбольном турнире участвуют 36 команд, причем каждые две должны сыграть между собой по одному разу. Известно, что каждая команда сыграла не менее 34 игр. Докажите, что команды можно разбить на три группы по 12 команд так, что внутри каждой группы все игры уже сыграны.

8-й класс



1970.13. В угол ABC вписаны две окружности, одна из которых касается стороны AB в точке A, а другая — стороны BC в точке C. Докажите, что эти окружности высекают на прямой AC равные отрезки.

1970.14. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} X^2 + XY + Y^2 = 7 \\ X^2 + XZ + Z^2 = 21 \\ Y^2 + YZ + Z^2 = 28\,. \end{cases}$$

1970.15. Около окружности описан пятиугольник, длины сторон которого — целые числа, а первая и третья стороны равны 1. На какие отрезки делит вторую сторону точка касания?

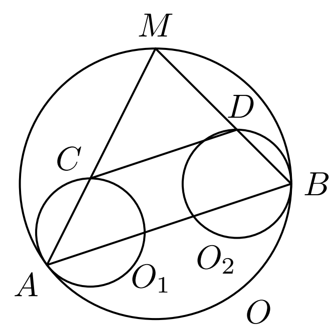
1970.16. В квадрате 5×5 закрашено 16 клеток. Докажите, что в нем можно выбрать квадрат 2×2, в котором закрашено не менее трёх клеток.

1970.17. В треугольник вписаны круг и квадрат, все вершины которого лежат на сторонах треугольника. Докажите, что отношение стороны квадрата к радиусу круга заключено между числами 2 и $\sqrt{2}$.

1970.18. На плоскости дано 35 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Некоторые из них соединены отрезками — их всего 100. Докажите, что какие-то два из этих отрезков пересекаются.

9-й класс

1970.19. Две равные окружности O_1 и O_2 касаются изнутри окружности O в точках A и B; M — произвольная точка окружности O, C и D — точки пересечения AM и BM с окружностями O_1 и O_2 соответственно. Докажите, что прямые AB и CD параллельны.



1970.20. См. задачу 16.

1970.21. Около окружности описан девятиугольник, стороны которого имеют целые длины, а первая и третья стороны равны 1. На какие отрезки делит вторую сторону точка касания?

1970.22. Положительные числа a, b, c, d таковы, что $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ и $a^3 + b^3 = c^3 + d^3$. Докажите, что $ab = cd$.

1970.23. Найдите все натуральные x, y, z, t такие, что

$$31(xyzt + xy + xt + zt + 1) = 40(yzt + y + t)\,.$$

1970.24. Квадрат 100×100 разбит на три вертикальных полосы. Ширина первой (левой) полосы — 19 клеток, а второй — 70 клеток. В первой строчке записаны подряд числа от 1 до 100. Во вторую строчку записываются сначала (слева) числа из третьей полосы первой строчки без изменения порядка, затем из второй полосы, и, наконец, из первой, также без изменения порядка. Таким же образом из второй строчки получается третья и т.д., пока не будет заполнен весь квадрат. Докажите, что в каждом столбце встречаются все числа от 1 до 100.

10-й класс

1970.25. В треугольную пирамиду вписаны шар и куб, все вершины которого лежат на гранях пирамиды. Докажите, что отношение ребра куба и радиуса шара заключено между числами 1 и $1 + \sqrt{2}$.

1970.26. Докажите неравенство

$$\sin 2 + \cos 2 + 2(\sin 1 - \cos 1) \geqslant 1\,.$$

1970.27. В равностороннем пятиугольнике все углы меньше 120 градусов. Докажите, что все они тупые.

1970.28. См. задачу 22.

1970.29. Найдите такую функцию $f(x)$, что для любого вещественного x, кроме 0 и 1, $f(1/x) + f(1-x) = x$.

1970.30.* Квадрат $N \times N$ разбит на три вертикальных полосы. Ширина первой слева полосы — k клеток, а третьей — m клеток, причем числа $N-k$ и $N-m$ взаимно просты. В первой строчке слева направо выписаны по порядку числа от 1 до N. Во вторую строчку записывают слева направо сначала числа из третьей полосы первой строки без изменения порядка, затем из второй полосы и, наконец, из первой полосы, также без изменения порядка. Таким же образом из второй строки получается третья строка и т.д., до тех пор, пока не будет заполнен весь квадрат. Докажите, что в каждом столбце встречаются все числа от 1 до N.

Отборочный тур

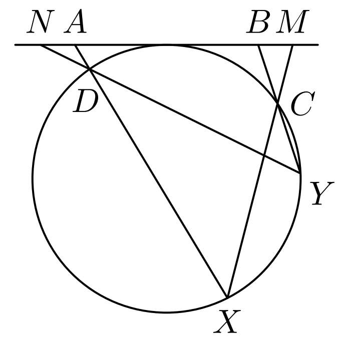
1970.31. Натуральное число обладает тем свойством, что при вычеркивании любой его цифры получается число, делящееся на 7. Докажите, что оно либо записано одними четверками, либо в его записи нет ни одной четверки.

1970.32. Числа t_1, t_2, …, t_n положительны и их произведение равно 1. Докажите, что есть такой номер $k < n$, что $t_k(t_{k+1} + 1) \geqslant 2$ (через t_{n+1} обозначено число t_1).

1970.33. Из проволоки согнут плоский выпуклый многоугольник. Докажите, что из этой проволоки нельзя согнуть другой (не конгруэнтный этому) плоский многоугольник так, чтобы расстояния между любыми двумя точками проволоки при этом не увеличились.

1970.34. Натуральные числа a_1, a_2, …, таковы, что $0 < a_1 < a_2 < \ldots$ и $a_n < 2n$ для любого n. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде разности двух чисел из этой последовательности или как число из самой последовательности.

1970.35.* D и C — произвольные точки окружности, касающейся отрезка AB в его середине. AD и BC пересекают окружность в точках X и Y соответственно, а CX и DY пересекают AB в точках M и N соответственно. Докажите, что $AM = BN$.



1970.36.* Началами числа 2345 являются числа $2, 23, 234, 2345$; концами — числа $5, 45, 345, 2345$. Аналогично эти понятия определяются для всех натуральных чисел. Натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$, имеющие $n_1, n_2, \ldots, n_k$ цифр соответственно, таковы, что никакое начало никакого из этих чисел не является никаким концом другого из этих чисел; никакое начало, кроме самого числа, не является его же концом, и никакое из чисел a_i не является частью другого числа. Докажите, что

$$\frac{n_1}{10^{n_1}} + \frac{n_2}{10^{n_2}} + \ldots + \frac{n_k}{10^{n_k}} < 1\,.$$

если известно, что $n_i < 2n_j$ для любых i и j.

1970.37.* В каждой клетке бесконечного листа клетчатой бумаги написано вещественное число так, что сумма чисел, стоящих внутри любого квадрата со сторонами, идущими по линиям сетки, по модулю не превосходит 1. Докажите, что сумма чисел внутри любого прямоугольника со сторонами, идущими по линиям сетки, не превосходит 10000.

1970.38.* Допустим, что в задаче 37 известно также, что в одном из прямоугольников сумма чисел максимальна по модулю. Докажите, что в любом прямоугольнике модуль суммы чисел не превосходит 4.