1972

6-й класс

1972.01. Из города А одновременно вылетели два самолета. Маршрут первого: $A \to B \to D \to C \to A \to D \to B \to C \to A$, а маршрут второго: $A \to B \to C \to D \to A \to B \to C \to D \to A \to B \to C \to D \to A$. Какой из самолетов раньше завершит полет, если их скорости одинаковы?

1972.02. На встрече собрались участники двух туристских походов (некоторые из них участвовали в обоих походах). В первом походе было 60% мужчин, а во втором — 75%. Докажите, что на встречу пришло не меньше мужчин, чем женщин.

1972.03. Расположите 6 точек на плоскости так, чтобы любые три из них являлись вершинами равнобедренного треугольника.

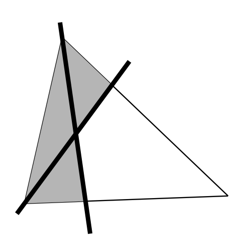
1972.04. В произведении всех целых чисел от 1 до 100 вычеркнули все нули. Какой будет последняя цифра получившегося числа — четной или нечетной?

1972.05. Школьники сдавали 7 экзаменов и все сдали их только на 4 и 5, причем каждый получил не более двух четверок. Известно, что нет двух учеников, один из которых по каждому предмету получил оценку, не меньшую, чем второй. Докажите, что учеников было не более 21.

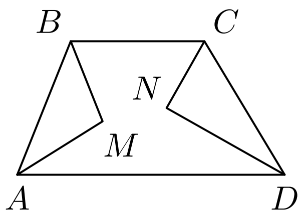
1972.06. Можно ли расставить на ребрах куба числа от 1 до 12 так, чтобы все суммы в вершинах — суммируются числа, стоящие на ребрах, выходящих из данной вершины — были равны?

7-й класс

1972.07. Можно ли двумя прямолинейными разрезами, проходящими через две вершины треугольника, разрезать его на четыре части такие, что три из них — равновеликие треугольники?



1972.08. См. задачу 2.



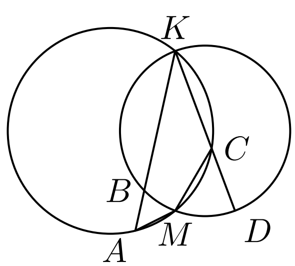
1972.09. $ABCD$ — трапеция, $(BC) \parallel (AD)$. M — точка пересечения биссектрис углов A и B, а N — точка пересечения биссектрис углов C и D. Зная длины сторон трапеции, найдите длину отрезка MN.

1972.10. В вершинах правильного 12-угольника расставлены черные и белые фишки. Докажите, что найдутся три фишки одного цвета, стоящие в вершинах равнобедренного треугольника.

1972.11. См. задачу 5.

1972.12. Докажите, что если четное число можно представить в виде суммы квадратов двух целых чисел, то и его половину можно представить в таком виде.

8-й класс



1972.13. K и M — точки пересечения двух окружностей. Из точки K проведены два луча, один из которых пересекает первую окружность в точке A, а вторую в точке B; другой пересекает первую окружность в точке C, вторую — в точке D. Докажите, что величины углов MAB и MCD равны.

1972.14. Существует ли натуральное число, сумма цифр квадрата которого равна 1972?

1972.15. Докажите, что четырехугольник, диагонали которого делят его на четыре треугольника с равными периметрами, — ромб.

1972.16. На плоскости нарисовано несколько кружков, некоторые из которых соединены отрезками. Докажите, что в этих кружках можно расставить целые числа так, чтобы два кружка были соединены отрезком тогда и только тогда, когда стоящие в них числа взаимно просты.

1972.17.[*] Дан правильный треугольник со стороной 32. От его вершины отрезали правильный треугольник со стороной 1. Оставшаяся часть разрезана на правильные треугольники. Докажите, что их не менее 15.

1972.18. Натуральные числа m, n, a, b, k, l таковы, что

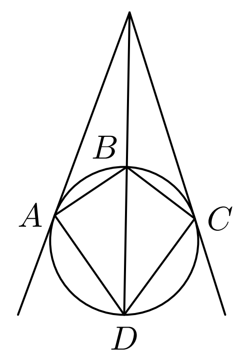
$$\frac{m}{n} < \frac{a}{b} < \frac{k}{l}, \ |ml - kn| = 1\,.$$

Докажите, что $b \geqslant n + l$.

9-й класс

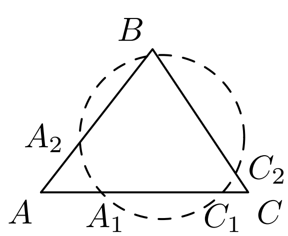
1972.19. См. задачу 14.

1972.20. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Докажите, что если точка пересечения касательных к окружности в вершинах A и C лежит на прямой BD, то $AB \cdot CD = BC \cdot AD$.



1972.21. См. задачу 18.

1972.22. AC — наибольшая сторона треугольника ABC. На ней отложены отрезки $AC_1 = AB$ и $CA_1 = CB$. На сторонах AB и CB отложены отрезки $AA_2 = AA_1$ и $CC_2 = CC_1$. Докажите, что точки A_1, A_2, C_1 и C_2 лежат на одной окружности.



1972.23. Даны натуральные числа m и n. Докажите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt[m]{n+1}} + \frac{1}{\sqrt[n]{m+1}} \geqslant 1\,.$$

1972.24. Дана конечная последовательность целых чисел. Под каждым из них напишем, сколько раз оно встретилось в этой последовательности. По полученной последовательности аналогично построим новую последовательность и т.д. Докажите, что на некотором шаге мы получим две одинаковые последовательности подряд.

10-й класс

1972.25. Числа a, b, c заключены между 0 и 1. Докажите, что

$$a + b + c - 2\sqrt{abc} \geqslant ab + bc + ac - 2abc\,.$$

1972.26. Замкнутая пространственная ломаная называется правильной, если равны между собой как звенья ломаной, так и углы между соседними звеньями. Докажите, что для любого N, большего 5, существует правильная N-звенная ломаная, не лежащая в одной плоскости.

1972.27. Простое число p не равно 3. Докажите, что число $4p^2+1$ можно представить в виде суммы трёх квадратов натуральных чисел.

1972.28. См. задачу 22.

1972.29.* Правильный треугольник площади 1 лежит внутри выпуклого семиугольника площади $1,0000001$. Докажите, что хотя бы один из углов семиугольника больше $139°$.

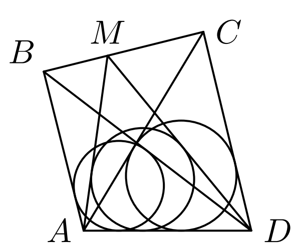
1972.30. В волейбольном турнире проведено несколько матчей, после чего у каждой команды оказалось по 10 побед и 10 поражений. Докажите, что из сыгранных матчей можно выбрать несколько таких, что в них у каждой команды, участвовавшей в турнире, будет ровно одно поражение и ровно одна победа.

Отборочный тур

1972.31. Найдите максимум отношения $k^2/(1.01)^k$ при натуральных k и укажите все k, при которых он достигается.

1972.32. Докажите, что прямая, которая делит площадь треугольника пополам, делит его периметр в отношении не более, чем 3:1.

1972.33. Подряд написано 99 девяток. Докажите, что справа к ним можно приписать 100 цифр так, чтобы получившееся число было точным квадратом.



1972.34. На стороне BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ взята точка M. Докажите, что среди окружностей, вписанных в треугольники ABD, ACD и AMD, найдутся две с разными радиусами.

1972.35. В строго возрастающей последовательности натуральных чисел каждое число, начиная с третьего, равно сумме каких-то двух предшествующих. Докажите, что в этой последовательности бесконечно много составных чисел.

1972.36. Каждая сторона правильного треугольника разделена на 30 равных частей. Прямые, проведенные через точки деления параллельно сторонам треугольника, разбивают его на 900 маленьких треугольничков. Каково максимальное число вершин разбиения, никакие две из которых не лежат на проведенной прямой или стороне?

1972.37.* В городе Метрополисе 1972 станции метро. Каждая линия метро соединяет лишь две станции. Известно, что при закрытии любых 9 станций система метрополитена сохраняет связность. Известно также, что от некоторой станции A до некоторой станции B не менее 99 пересадок. Докажите, что все станции метро можно разбить на 1000 групп так, что в каждой группе никакие две станции не связаны линией метро.

1972.38.* Город имеет вид клетчатого квадрата 100×100 со стороной клетки равной 500 метрам. По каждой стороне каждой клетки можно двигаться только в одном направлении. Известно, что по городу можно проехать не более одного километра, не нарушая правил движения. Докажите, что найдется не менее 1300 перекрестков, с которых нельзя выехать, не нарушив правил движения. (Углы города также являются перекрестками).