1975

6-й класс

1975.01. Коля задумал двузначное число, а Вася пытается его отгадать. Для этого он пишет на доске различные двузначные числа, а Коля каждый раз ставит около написанного числа “$+$”, если оно совпало с задуманным, и “$-$”, если число совпало с задуманным лишь в одном из разрядов. Докажите, что Васе достаточно написать не более 10 чисел, чтобы отгадать задуманное число.

1975.02. 26 костей домино выложили в ряд, а каждую из двух оставшихся костей распилили пополам. Докажите, что среди получившихся четырех половинок есть две одинаковых.

1975.03. Докажите, что

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{5}{6}-\frac{7}{8}+\ldots\frac{97}{98}-\frac{99}{100}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{26}+\frac{1}{27}+\ldots+\frac{1}{49}+\frac{1}{50}\right).$$

1975.04. В плоскости дан круг радиуса 1 см и прямые a, b, c, d, e, пересекающие этот круг, а также точка X на расстоянии 11 см от центра круга. Точку X последовательно симметрично отражают относительно всех пяти прямых и получают точку E. Докажите, что точка E не может лежать внутри данного круга.

1975.05. Коля и Вася выписывают 20-значное число, используя только цифры 1, 2, 3, 4, 5. Первую цифру пишет Коля, вторую — Вася и так далее. Вася хочет получить число, делящееся на 9. Сумеет ли Коля ему помешать?

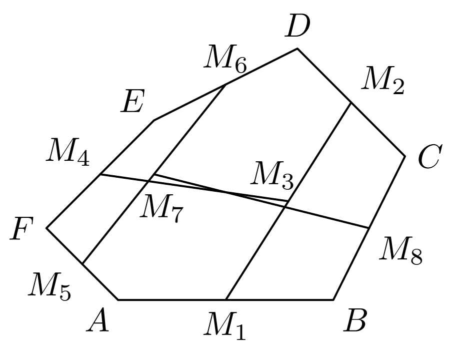
1975.06. Из цифр 1, 2, 3 составили все возможные четырехзначные числа и присвоили каждому из них номер 1, 2 или 3 так, чтобы числа, не совпадающие ни в одном разряде, получили разные номера. Оказалось, что у чисел 1111, 2222, 3333 и 1222 номер совпал с первой цифрой. Докажите, что и у остальных чисел номер совпадает с первой цифрой.

7-й класс

1975.07. Коля и Вася пишут поочередно цифры 30-значного числа, используя цифры 1, 2, 3, 4 и 5. Начинает Коля; Вася хочет получить число, делящееся на 9. Сможет ли Коля ему помешать?

1975.08. p и $p^{p+1}+2$ — простые числа. Найдите p.

1975.09. В записи трехзначного числа нет нулей. Найдите максимальное значение произведения этого числа на сумму чисел, обратных его цифрам.



1975.10. Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$. M_1 — середина AB, M_2 — середина CD, M_3 — середина M_1M_2, M_4 — середина EF, M_5 — середина AF, M_6 — середина DE, M_7 — середина M_5M_6, M_8 — середина BC. Докажите, что отрезки M_3M_4 и M_7M_8 обязательно пересекаются.

1975.11. Рассматриваются все возможные семизначные числа, составленные из цифр 1, 2 и 3. К каждому числу приписывается одна из этих цифр так, что если два числа отличаются во всех разрядах, то и приписываемые к ним цифры также различны. Известно также, что к числу 1111111 приписывается цифра 1, к числу 2222222 – цифра 2, к числу 3333333 — цифра 3, а к числу 1222222 — цифра 1. Докажите, что для всех чисел приписываемая к ним цифра совпадает с их первой цифрой.

1975.12. Дана окружность радиуса 1. Постройте на ее произвольной хорде, как на стороне, квадрат так, чтобы расстояние от центра окружности до дальних вершин квадрата было максимально возможным.

8-й класс

1975.13. Точка пересечения высот равнобедренного треугольника лежит на вписанной в него окружности. Найдите отношение сторон треугольника.

1975.14. Дано 5 бесконечных геометрических прогрессий, все члены которых — целые числа. Докажите, что существует натуральное число, не содержащееся ни в одной из этих прогрессий.

1975.15. F — точка пересечения биссектрис AD и CE треугольника ABC. Известно, что точки B, D, E и F лежат на одной окружности. Докажите, что радиус этой окружности не меньше радиуса вписанной в этот треугольник окружности.

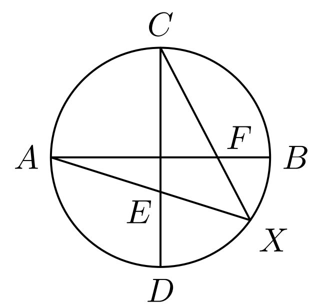
1975.16. Докажите, что точки пересечения парабол $Y = X^2 + X - 41$ и $X = Y^2 + Y - 40$ лежат на одной окружности.

1975.17. Сколько существует натуральных чисел $N \leqslant 1\,000\,000$ таких, что N делится на $[\sqrt{N}\,]$?

1975.18. В семи последовательных вершинах правильного 100-угольника поставлены фишки семи цветов. За один ход разрешается переставить любую фишку по часовой стрелке через 10 полей на одиннадцатое, если оно свободно. Требуется собрать фишки в семи вершинах, следующих за исходными. Сколько может получиться различных расположений фишек в этих семи вершинах?

9-й класс

1975.19. В окружности проведены два перпендикулярных диаметра AB и CD. На дуге BD взята точка X, причем AX и CX пересекают CD и AB в точках E и F соответственно. Докажите, что если CE/ED — рационально, то и AF/FB — рационально.



1975.20. См. задачу 16.

1975.21. Среди треугольников, вложенных в данный, найдите треугольник с наибольшим отношением площади к периметру.

1975.22. См. задачу 18.

1975.23. Какое наибольшее количество тупых углов могут образовывать 15 лучей, исходящих из одной точки на плоскости?

1975.24. В квадратной таблице 100×100 некоторые клетки закрашены. Каждая закрашенная клетка является единственной закрашенной клеткой либо в своем столбце, либо в своей строке. Какое наибольшее количество клеток может быть закрашено?

10-й класс

1975.25. Имеется 1975 геометрических прогрессий, все члены которых целые числа. Докажите, что они не исчерпывают натуральный ряд.

1975.26. См. задачу 21.

1975.27. Решите уравнение $x^2 + 2 = 4\sqrt{x^3 + 1}$.

1975.28. В пространстве дано 4 шара одинакового радиуса. Докажите, что никакие три из них не покрывают четвертый шар.

1975.29. См. задачу 24.

1975.30. В квадрат 1×1 вложен выпуклый N-угольник. Докажите, что существуют три последовательные вершины этого N-угольника такие, что площадь образованного ими треугольника не больше $8/N^2$.

Отборочный тур

8-й класс

1975.31. Про числа a, b, c, d известно, что $a^2+b^2 = c^2+d^2 = 1$ и $ac+bd = 0$. Найдите число $ab + cd$.

1975.32. Какое из чисел больше:

$$\underbrace{2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{\text{(100 двоек)}} \quad \text{или} \quad \underbrace{3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}_{\text{(99 троек)}} \quad ?$$

1975.33. Найдите натуральные числа a, b и c, если известно, что числа $a^b + c$, $b^c + a$ и $c^a + b$ — простые.

1975.34. К данному множеству точек на плоскости разрешается добавить точку, симметричную какой-либо из его точек относительно прямой, являющейся серединным перпендикуляром к отрезку с концами в точках этого множества. Можно ли, начав с трёх точек, попарные расстояния между которыми меньше 1, получить множество, содержащее две точки, расстояние между которыми больше 1?

1975.35. В группе 30 человек. Каждому нравится ровно k человек из группы. При каком минимальном k можно утверждать, что обязательно найдутся два человека, которые нравятся друг другу?

1975.36. Из вершин правильного 35-угольника выбрали 8. Докажите, что какие-то четыре из них образуют трапецию или прямоугольник.

1975.37.* В государстве некоторые города соединены дорогами. Длина каждой дороги не более 500 километров. Известно, что из любого города можно проехать в любой другой, проехав не более 500 километров. Одну из дорог закрыли, причем по-прежнему из каждого города можно проехать в каждый. Докажите, что теперь это можно сделать, проехав не более 1500 километров.

1975.38.* На шахматной доске отмечены центры всех 64 клеток. Можно ли тринадцатью прямыми разрезами разбить доску на части так, чтобы в каждой из них было не более одного центра клетки?

9, 10-е классы

1975.39. См. задачу 31.

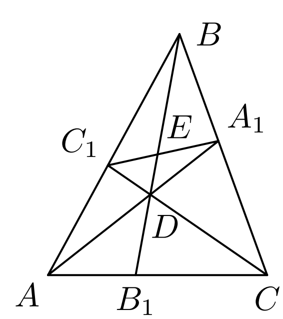
1975.40. Существуют ли в пространстве четыре попарно не пересекающихся шара, не содержащих данную точку A, такие, что любой луч с началом в точке A пересекает хотя бы один из этих шаров?

1975.41. См. задачу 37.

1975.42.* Существует ли биекция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что $f(x) + f^{-1}(x) = -x$ для любого x?

1975.43. См. задачу 38.

1975.44.* Последовательность целых чисел x_0, x_1, x_2, ..., такова, что $x_0 = 0$, а $|x_n| = |x_{n-1} + 1|$ для каждого натурального n. Каково наименьшее возможное значение выражения $|x_1 + x_2 + \ldots + x_{1975}|$?



1975.45. Точки A_1, B_1, C_1 на сторонах BC, AC и AB треугольника ABC выбраны так, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке D. Отрезки A_1C_1 и BB_1 пересекаются в точке E. Докажите, что если $BD = 2B_1D$, то $BE = B_1E$.

1975.46.* Каждое из чисел $x_0, x_1, \ldots, x_n$ равно 0 или 1. Докажите, что

$$x_0 + \frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{x_2}{(\sqrt{2})^2} + \ldots + \frac{x_n}{(\sqrt{2})^n} \leqslant (1+\sqrt{2})\sqrt{x_0 + \frac{x_1}{2} + \ldots + \frac{x_n}{2^n}}\,.$$

—— 1976. Задачи ——