1976

6-й класс

1976.01. По кругу расставлено 300 точек, в одной из которых сидит блоха. Она начинает прыгать по кругу против часовой стрелки, причем первым прыжком она попадает в соседнюю точку, затем прыгает через одну точку, затем через две и так далее. Докажите, что найдется точка, в которую блоха никогда не попадет.

1976.02. Числа от 1 до 9 разбиты на три группы по три числа, после чего числа в каждой группе перемножили. A — наибольшее из трёх произведений. Какое наименьшее значение может принимать A?

1976.03. Деревни A, B и C расположены в вершинах равностороннего треугольника. В деревне A живет 100 школьников, в деревне $B - 200$, в деревне $C - 300$. Где нужно построить школу, чтобы суммарное расстояние, проходимое всеми школьниками, было бы как можно меньше?

1976.04. Полоска разбита на 30 клеток в один ряд. В крайних клетках стоит по фишке. Два игрока по очереди могут передвигать свои фишки на одну или две клетки в любую сторону. Ходить через фишку соперника нельзя. Тот, кто не может сделать очередной ход, проигрывает. Как должен играть начинающий, чтобы выиграть?

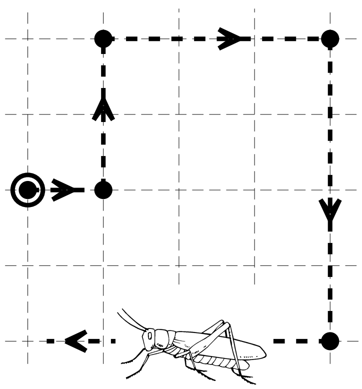
1976.05. На клетчатой бумаге нарисован квадрат 11×11 клеток. Требуется отметить центры некоторых клеток таким образом, чтобы центр любой другой клетки находился на отрезке, соединяющем какие-либо две отмеченные точки, лежащие на одной вертикали или на одной горизонтали. Какое наименьшее число клеток придется отметить?

1976.06. Квадратный участок обнесен забором и разбит другими заборами на несколько меньших квадратных участков. Длины сторон меньших квадратных участков выражаются целыми числами метров. Докажите, что сумма длин всех заборов в метрах делится на 4.

7-й класс

1976.07. По кругу расставлена 101 точка, в одной из которых сидит блоха. Она начинает прыгать по кругу в направлении против часовой стрелки, причем первым прыжком она попадает в соседнюю точку, затем прыгает через одну точку, затем через две, и так далее. Докажите, что найдется точка, в которую блоха никогда не попадет.

1976.08. См. задачу 2.



1976.09. Кузнечик прыгает по плоскости. Первый прыжок он делает на 1 см, второй — на 2 см, третий — на 3 см и так далее. После каждого прыжка он поворачивает на 90 градусов. В некоторый момент кузнечик решил вернуться в исходную точку. Сможет ли он это сделать?

1976.10. Периметр пятиконечной звезды с вершинами в вершинах данного выпуклого пятиугольника F, периметр самого F, и периметр внутреннего пятиугольника звезды — простые числа. Докажите, что их сумма не меньше 20.

1976.11. См. задачу 5.

1976.12. См. задачу 6.

8-й класс

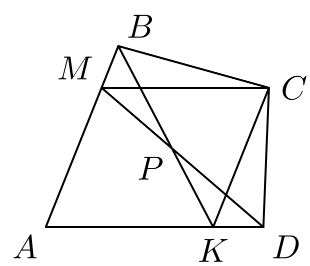
1976.13. $x_1, x_2, \ldots, x_{25}$ — некоторые целые числа, а $y_1, y_2, \ldots, y_{25}$ — перестановка этих чисел. Докажите, что число $(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) \ldots (x_{25} - y_{25})$ — четно.

1976.14. A и B — трехзначные числа. Из них составили два шестизначных числа, приписав сначала A к B справа, а затем слева. Докажите, что разность этих шестизначных чисел не делится на 1976, если A не равно B.

1976.15. По кольцевой автостраде бежит бегун и едут два велосипедиста и мотоциклист — все движутся с постоянными скоростями, каждый со своей, причем бегун и один из велосипедистов — в одном направлении, а мотоциклист и другой велосипедист — в другом. Бегун встречает второго велосипедиста каждые 12 минут, первый велосипедист обгоняет бегуна каждые 20 минут, а мотоциклист обгоняет второго велосипедиста каждые 5 минут. Как часто мотоциклист встречает первого велосипедиста?

1976.16. Точка A лежит внутри правильного 1976-угольника, а точка B — вне его. $\vec{X}_A$ — сумма векторов, проведенных из точки A в вершины 1976-угольника, $\vec{X}_B$ — сумма векторов, проведенных из точки B в вершины 1976-угольника. Может ли длина вектора $\vec{X}_A$ быть больше длины вектора $\vec{X}_B$?

1976.17. В четырехугольнике $ABCD$ угол C — наибольший. K — точка пересечения прямой AD и прямой, проходящей через C и параллельной AB; M — точка пересечения прямой AB и прямой, проходящей через C и параллельной AD; P — точка пересечения прямых BK и MD. Докажите, что площади четырехугольников $AMPK$ и $BCDP$ равны.



1976.18. В множестве натуральных чисел выбрали три попарно непересекающихся подмножества. Докажите, что можно выбрать числа X и Y, принадлежащие двум различным выбранным подмножествам таким образом, что сумма $X + Y$ не принадлежит третьему подмножеству.

9-й класс

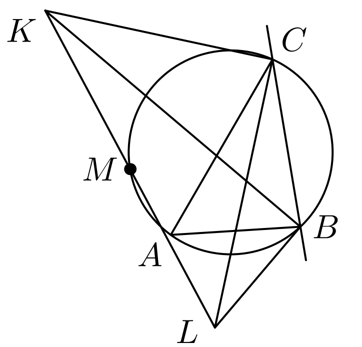
1976.19. В треугольнике ABC $AC = (AB + BC)/2$. Докажите, что радиус вписанной окружности треугольника ABC втрое меньше одной из его высот.

1976.20. Докажите, что для любых различных натуральных m и n меньшее из чисел $\sqrt[n]{m}$ и $\sqrt[m]{n}$ меньше $\sqrt[3]{3}$.

1976.21. См. задачу 14.

1976.22. Докажите, что для любого $n \geqslant 5$ существует выпуклый n-угольник с различными по длине сторонами такой, что сумма расстояний от точки внутри многоугольника до его сторон (или их продолжений) не зависит от выбора точки.

1976.23. Царь Бюрократ имеет 12 замов и из них образует комиссии так, чтобы любые две комиссии имели хотя бы одного общего члена, но обязательно отличались по составу.



В некоторый момент Бюрократ образовал 1000 комиссий. Докажите, что он может образовать еще одну такую комиссию с выполнением всех описанных условий.

1976.24.* Дан треугольник ABC и окружность, описанная вокруг него. K — точка пересечения биссектрис внутреннего угла B и внешнего угла C, L — точка пересечения биссектрис внутреннего угла C и внешнего угла B; M — середина отрезка KL. Докажите, что M — середина дуги CAB.

10-й класс

1976.25. В пространстве дана четырехзвенная замкнутая ломаная, все звенья которой имеют одинаковую длину. Докажите, что расстояние от любой точки пространства до любой вершины ломаной меньше суммы расстояний от этой точки до трёх других вершин.

1976.26. Найдите функцию f, определенную на множестве всех вещественных чисел, если известно, что $f^2(x+y) = f^2(x) + f^2(y)$ для любых x и y.

1976.27. Найдите все вещественные решения уравнения

$$\sqrt{a+bx} + \sqrt{b+cx} + \sqrt{c+ax} = \sqrt{b-ax} + \sqrt{c-bx} + \sqrt{a-cx}\,,$$

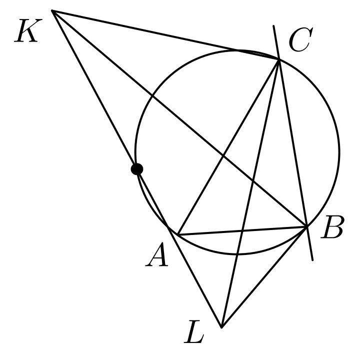
если известно, что у него есть решения.

1976.28. Длины сторон некоторого треугольника равны a, b, c. Докажите, что

$$2 < \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} - \frac{a^3+b^3+c^3}{abc} \leqslant 3\,.$$

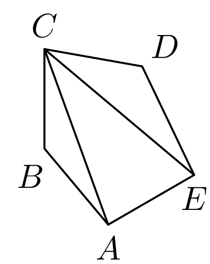
1976.29. Таблица 5×5 заполнена нулями и единицами. Известно, что в левом верхнем и правом нижнем углах стоят единицы, а в двух других углах стоят нули. Докажите, что в таблице можно выбрать два разных квадрата 2×2 (возможно, пересекающихся) с одинаковой расстановкой чисел.

1976.30.* K — точка пересечения биссектрис внутреннего угла B и внешнего угла C треугольника ABC, L — точка пересечения биссектрис внутреннего угла C и внешнего угла B. Докажите, что середина отрезка KL лежит на окружности, описанной вокруг треугольника ABC.



Отборочный тур

1976.31. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ все стороны равны, а угол ACE равен половине угла BCD. Найдите угол ACE.



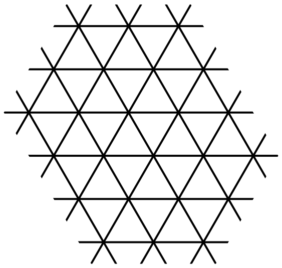
1976.32. Пространство разбито на пять непустых подмножеств. Докажите, что есть прямая, пересекающая по крайней мере три из них.

1976.33. Решите систему в вещественных числах:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3^2 \\ x_2 + x_3 = x_4^2 \\ x_3 + x_4 = x_5^2 \\ x_4 + x_5 = x_1^2 \\ x_5 + x_1 = x_2^2 . \end{cases}$$

1976.34. Двое играют в игру с конечным числом позиций, причем для любой позиции сумма числа позиций, в которые из нее можно перейти, и числа позиций, из которых можно перейти в нее, одна и та же. Игрок проигрывает, если у него нет хода. Докажите, что число позиций, в которых начинающий проигрывает при правильной игре второго, не больше половины числа всех позиций.

1976.35. Имеется таблица 100×100, все клетки которой покрашены в три цвета. Разрешается перекрашивать любой квадратик 2×2 в тот цвет, который в нем преобладает, а если такого нет, то в тот цвет, которого нет в квадратике. Докажите, что весь квадрат можно перекрасить в один цвет.



1976.36. Плоскость разбита на равные равносторонние треугольники. Сто треугольников покрашены в черный цвет так, что они образуют связную фигуру. Докажите, что из этой фигуры можно вырезать не менее 33 непересекающихся ромбиков, составленных из двух треугольников каждый.

1976.37. Докажите, что среди 1976-значных чисел, десятичная запись которых состоит из 1975 единиц и одной семерки, найдется не менее 658 составных.

1976.38.* F — некоторая биекция плоскости на себя, причем такая, что если $ABCD$ — выпуклый невырожденный четырехугольник, то четырехугольник $F(A)F(B)F(C)F(D)$ также является невырожденным и выпуклым. Докажите, что если точки A, B и C лежат на одной прямой, то и точки $F(A)$, $F(B)$, $F(C)$ лежат на одной прямой.