1979

5-й класс

1979.01. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник 13×7. Вырежьте из него 15 прямоугольников размерами 2×3.

1979.02. В каком году родился человек, которому в этом году исполнится столько лет, какова сумма цифр года его рождения?

1979.03. В прямоугольнике 6×7 закрашены какие-то 25 клеток. Докажите, что можно найти квадрат 2×2, в котором закрашено не менее трёх клеток.

1979.04. В мешке лежат 10 карточек с цифрами $0, 1, 2, \ldots, 9$.

а) Наугад вынимают три карточки. Докажите, что из этих карточек можно составить число (однозначное, двузначное или трехзначное), которое делится на 3.

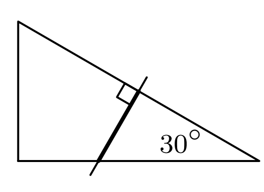
б) Сколько карточек нужно вынуть из мешка, чтобы из них наверняка можно было составить число, делящееся на 9?

1979.05. В классе каждый мальчик дружит с тремя девочками, а каждая девочка — с двумя мальчиками. В классе 19 парт и 31 пионер. Сколько учеников в этом классе?

6-й класс

1979.06. a, b, c — простые числа, причем $a+b$ и ab делятся на c. Докажите, что $a^3 - b^3$ делится на c.

1979.07. Дан прямоугольный треугольник, один из углов которого равен 30 градусов. Из середины его гипотенузы восстановлен перпендикуляр к ней. Докажите, что длина отрезка этого перпендикуляра, лежащего внутри треугольника, равна трети длины большего катета.



1979.08. Как при помощи двух песочных часов, отмеряющих соответственно 5 и 7 минут, отмерить 9 минут?

1979.09. В клетках прямоугольной таблицы записаны натуральные числа. Разрешается удваивать все числа любой строки и вычитать единицу из всех чисел любого столбца. Докажите, что можно добиться того, чтобы все числа в таблице оказались равными нулю.

1979.10. Какое наибольшее количество натуральных чисел, меньших 50, можно взять так, чтобы любые два были взаимно просты?

1979.11. Найдите сумму цифр куба числа, состоящего из трёх единиц и некоторого количества нулей.

7-й класс

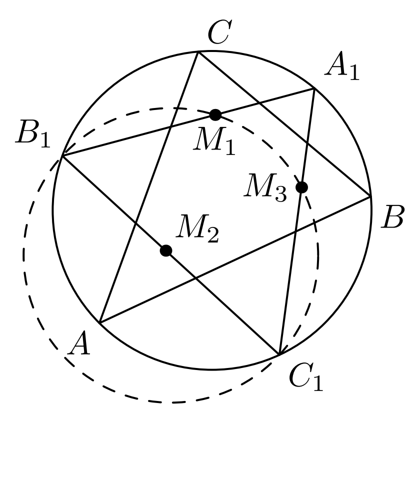
1979.12. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 1 + a + b = ab \\ 2 + a + c = ac \\ 5 + b + c = bc\,. \end{cases}$$

1979.13. В треугольнике ABC AA_1, BB_1, CC_1 — высоты, а AA_0, BB_0, CC_0 — медианы. Докажите, что длина ломаной $A_0B_1C_0A_1B_0C_1A_0$ равна периметру треугольника ABC.

1979.14. Прямоугольник 1000×1979 разбит на клетки. На сколько частей он разобьется, если в нем провести еще и одну диагональ?

1979.15. Найдите все целые a, если известно, что a^6 — восьмизначное число, записываемое цифрами 0, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4.



1979.16. Треугольник ABC вписан в окружность. A_1 — середина дуги BC, B_1 — середина дуги AC, C_1 — середина дуги AB. Стороны треугольника ABC высекают на отрезках A_1B_1, B_1C_1, A_1C_1 меньшие отрезки с серединами M_1, M_2, M_3 соответственно. Докажите, что точки B_1, C_1 и точки M_1, M_3 лежат на одной окружности.

1979.17. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы квадрата целого числа и простого числа.

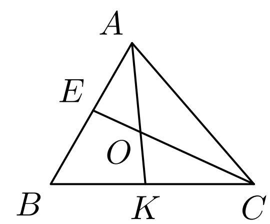
8-й класс

1979.18. Докажите, что для любого натурального $k > 1$ число $1010\ldots0101$ ($k+1$ единица и k нулей) является составным.

1979.19. Длины сторон некоторого треугольника равны a, b, c. Докажите, что

$$\left|\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{a}{c}-\frac{c}{b}-\frac{b}{a}\right|<1\,.$$

1979.20. В треугольнике ABC угол B равен 60 градусов, AK и CE — биссектрисы, причем точки K и E лежат на соответствующих сторонах. Отрезки AK и CE пересекаются в точке O. Докажите, что $OK = OE$.



1979.21. На плоскости дано $2n$ векторов, ведущих из центра правильного $2n$-угольника в его вершины. Сколько из них нужно взять, чтобы их сумма имела максимальную длину?

1979.22. Дано n попарно взаимно простых натуральных чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_n, причем $1 < a_i < (2n-1)^2$. Докажите, что среди них есть хотя бы одно простое.

1979.23. В каждой клетке таблицы $n \times m$ стоит единица. Разрешается взять произвольный квадратик 2×2 и поменять в нем знак у всех чисел. Можно ли с помощью таких операций получить “шахматную” расстановку знаков в таблице? Ответ должен зависеть от m и n.

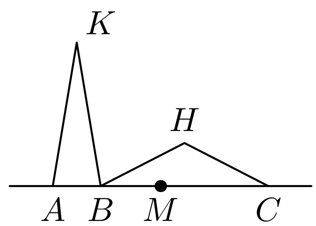
9-й класс

1979.24. Докажите, что если k-значное число ($k \geqslant 2$) просто, то либо все числа, получающиеся из него циклической перестановкой цифр, различны, либо это число записывается одними единицами.

1979.25. Рассмотрим все попарно неконгруэнтные треугольники с вершинами в точках, делящих окружность на N равных дуг ($N > 2$). При каких N ровно половина этих треугольников — равнобедренные?

1979.26. Натуральные числа a_1, a_2, $\ldots$, a_n, где $n \geqslant 12$, все большие 1 и меньшие $9n^2$, попарно взаимно просты. Докажите, что среди них найдется простое число.

1979.27. В центре ящика, имеющего форму квадрата 5×5, сделано квадратное отверстие 1×1. Какую наименьшую площадь должна иметь выпуклая фигура (“заслонка”), чтобы при любом ее положении на дне ящика она закрывала отверстие?



1979.28. Точка B лежит между точками A и C. В полуплоскости с границей (AC) взяты такие точки K и H, что $AK = KB$, $BH = HC$, $\angle AKB = \alpha$, $\angle BHC = \pi - \alpha$. Найдите углы треугольника KHM, где M — середина отрезка AC.

1979.29. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + \dfrac{x+2y}{x^2+y^2} = 2 \\ y + \dfrac{2x-y}{x^2+y^2} = 0\,. \end{cases}$$

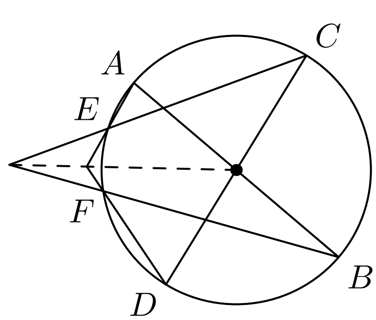
10-й класс

1979.30. См. задачу 24.

1979.31. См. задачу 27.

1979.32. При каких натуральных y число $y^2 + 3^y$ является точным квадратом?

1979.33. В круге закрашено n секторов так, что угловая величина каждого меньше, чем $\pi/(n^2 - n + 1)$. Докажите, что круг можно повернуть так, что все закрашенные сектора перейдут в незакрашенную часть круга.



1979.34. Дан выпуклый многогранник. Докажите, что если все его грани, не считая одной, являются центрально симметричными многоугольниками, то и эта последняя грань также является центрально симметричной.

1979.35.* В окружности проведены два диаметра AB и CD. Докажите, что для любых двух точек E и F, лежащих на окружности, точка пересечения прямых AE и DF, центр окружности и точка пересечения прямых CE и BF лежат на одной прямой.

Комментарий.

1. В 1979 году отборочный тур не проводился. Команда Ленинграда на Всесоюзную олимпиаду по математике была определена по результатам городского тура.
2. На олимпиаде 6 и 7 классов школьникам, решившим все задачи, предлагались для решения дополнительные задачи. В 6 классе — задачи 17 и 36, а в 7 классе — задачи 36 и 9.

   1979.36. В треугольнике ABC длины сторон — последовательные целые числа, а некоторая биссектриса треугольника перпендикулярна какой-то медиане. Найдите длины сторон треугольника. (См. задачу **1970.02**).

3. В некоторых архивных вариантах олимпиады 9–10 классов вместо задачи 24 приведена задача 18, вместо задачи 30 — задача 24, а вместо задачи 31 — задача 26.