1981

5-й класс

1981.01. Пятиклассники Коля и Вася подсчитывали отметки, полученные в течение четверти. Оказалось, что Коля получил столько пятерок, сколько Вася четверок; столько четверок, сколько Вася троек; столько троек, сколько Вася двоек; и столько двоек, сколько Вася пятерок. Кроме того, выяснилось, что каждый из них получил по 54 отметки и что средний балл у них одинаковый. Докажите, что они ошиблись в подсчетах.

1981.02. Можно ли составить из цифр $1, 2, \ldots, 9$ такое девятизначное число, что между 1 и 2 стоит нечетное число цифр, между 2 и 3 — также нечетное число цифр, $\ldots$, между 8 и 9 — нечетное число цифр?

1981.03. A, B и C — три точки, не лежащие на одной прямой. Расположите внутри треугольника ABC еще девять точек и соедините некоторые из полученных 12 точек отрезками так, чтобы эти отрезки не пересекались, треугольник ABC был разбит на треугольники, и каждая из 12 точек была соединена ровно с пятью другими.

1981.04. На клетчатой бумаге нарисован квадрат 12×12. Какое наименьшее число его клеток нужно закрасить, чтобы в незакрашенную часть нельзя было поместить фигуру вида  ?

1981.05. Существует ли натуральное число n такое, что десятичная запись числа n^2 начинается с цифр 123456789?

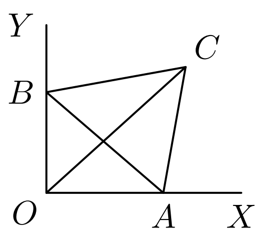
1981.06. Имеются 4 рубля монетами достоинством 1 коп., 2 коп., 5 коп., 10 коп. Докажите, что этими монетами можно набрать три рубля.

6-й класс

1981.07. Докажите, что при любом натуральном n число

$$\frac{(10^n - 1)}{81} - \frac{n}{9}$$

целое.



1981.08. Точка C лежит внутри прямого угла XOY. На луче OX выбрана точка A и на луче OY — точка B. Докажите, что периметр треугольника ABC больше, чем $2OC$.

1981.09. См. задачу 4.

1981.10. См. задачу 6.

1981.11. Натуральное n таково, что число $n^2 + 1$ — десятизначное. Докажите, что в его записи встречаются две одинаковые цифры.

1981.12. В вершинах куба записаны целые числа. Разрешается одновременно увеличить на 1 любые два числа, стоящие в концах одного ребра куба. Можно ли с помощью таких операций добиться, чтобы все числа делились на три, если исходно в одной из вершин была написана единица, а в остальных — нули?

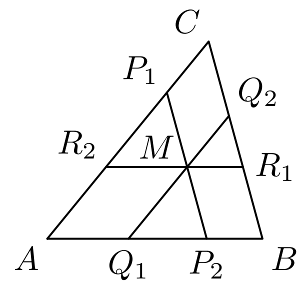
7-й класс

1981.13. Существует ли натуральное число, которое уменьшается в 1981 раз при зачёркивании первой цифры его десятичной записи?

1981.14. См. задачу 8.

1981.15. См. задачу 4.

1981.16. Пусть M — произвольное натуральное число, большее 3, а S — сумма всех таких натуральных чисел x, не превосходящих M, что $x^2 - x + 1$ делится на M. Докажите, что S делится на $M + 1$. (В том случае, когда таких чисел x нет, полагаем S равной нулю).



1981.17. Через точку M внутри треугольника ABC проведены три отрезка P_1P_2, Q_1Q_2 и R_1R_2 с концами на сторонах треугольника, параллельных соответственно сторонам BC, AC и AB. Докажите, что

$$\frac{P_1P_2}{BC} + \frac{Q_1Q_2}{AC} + \frac{R_1R_2}{AB} = 2\,.$$

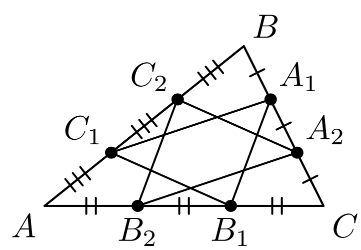
1981.18. См. задачу 12.

8-й класс

1981.19. Существует ли набор из 1981 последовательного целого числа, сумма которых есть куб натурального числа?

1981.20. Квадрат разбит на несколько прямоугольников со сторонами, параллельными сторонам квадрата. Для каждого прямоугольника вычислили отношение длины меньшей стороны к длине большей. Докажите, что сумма полученных чисел не меньше 1.

1981.21. Докажите, что если $x^2 + xy + xz < 0$, то $y^2 > 4xz$.



1981.22. На стороне AB треугольника ABC выбраны точки C_1 и C_2, на стороне BC — A_1 и A_2, на стороне CA — B_1 и B_2 так, что

$$|AC_1| = |C_1C_2| = |C_2B| = |AB|/3,$$
$$|BA_1| = |A_1A_2| = |A_2C| = |BC|/3,$$
$$|CB_1| = |B_1B_2| = |B_2A| = |CA|/3\,.$$

Докажите, что при пересечении треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ образуется шесть конгруэнтных треугольников.

1981.23. На бесконечном клетчатом листе бумаги со стороной клетки 1 построен треугольник ABC с вершинами в узлах. Докажите, что если $AB > AC$, то $AB - AC > {}^1/_p$, где p — периметр треугольника ABC.

1981.24.* Поля квадратной доски 8×8 раскрашены в два цвета в шахматном порядке. Фишка ходит по черным полям, причем за один ход она может перейти на любое из соседних по диагонали полей. Какое наименьшее число ходов потребуется, чтобы обойти все черные поля?

9-й класс

1981.25. В выпуклом четырехугольнике сумма расстояний от любой точки внутри четырехугольника до четырех прямых, на которых лежат его стороны, постоянна. Докажите, что этот четырехугольник — параллелограмм.

1981.26. См. задачу 20.

1981.27. См. задачу 24 для доски 9×9 (левое нижнее поле — черное).

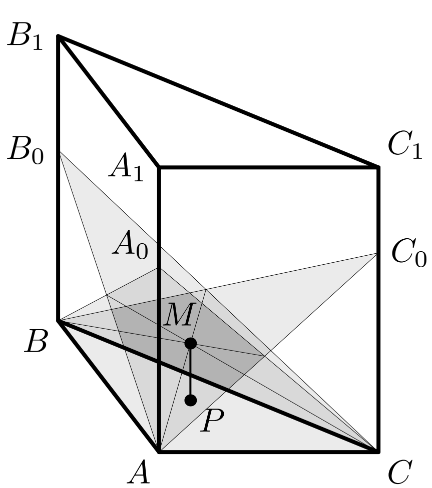
1981.28. $1 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots$ — последовательность натуральных чисел такая, что $a_{n+a_n} = 2a_n$ при любом натуральном n. Докажите, что найдется такое натуральное число c, что $a_n = n + c$ для любого n.

1981.29. Целые числа a, b, c, d и A таковы, что $a^2 + A = b^2$, $c^2 + A = d^2$. Докажите, что число $2(a+b)(c+d)(ac+bd-A)$ — квадрат натурального числа.

1981.30. См. задачу 23.

10-й класс

1981.31. В каждом из двух правильных конгруэнтных 16-угольников отмечено по 7 вершин. Докажите, что можно так наложить эти многоугольники друг на друга, чтобы не менее четырех отмеченных вершин одного многоугольника совпали с отмеченными вершинами другого.



1981.32. См. задачу 23.

1981.33. См. задачу 29.

1981.34. На боковых ребрах AA_1, BB_1, CC_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ отмечены точки A_0, B_0 и C_0 так, что $AA_0 = a$, $BB_0 = b$, $CC_0 = c$. Пусть M — точка пересечения плоскостей A_0BC, B_0AC, C_0AB, из которой проведен отрезок MP, параллельный боковым ребрам призмы, причем точка P принадлежит основанию ABC и $MP = d$. Докажите, что $1/d = 1/a + 1/b + 1/c$.

1981.35. См. задачу 24 для доски 10×10.

1981.36.* Существует ли натуральная степень числа 5, в ста младших разрядах десятичной записи которой встретятся по крайней мере 30 нулей подряд?

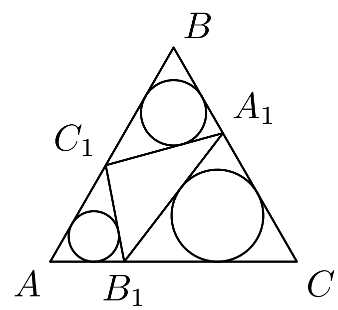
Отборочный тур

1981.37. Найдите все натуральные p, при которых число

$$2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}+9$$

(в записи участвуют p двоек) — простое.

1981.38. На сторонах AB, AC и BC равностороннего треугольника ABC, сторона которого имеет длину 2, выбрали точки C_1, B_1 и A_1 соответственно. Какое наибольшее значение может принимать сумма радиусов окружностей, вписанных в треугольники AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C?



1981.39. Есть куча, состоящая из m камней. Двое игроков по очереди берут из нее камни, причем на k-м ходу можно брать от 1 до k камней. Выигрывает тот, кто берет последний камень. При каких m у первого игрока есть выигрышная стратегия?

1981.40. Докажите, что не существует рациональных чисел a, b, c и d таких, что $(a+b\sqrt{3})^4+(c+d\sqrt{3})^4=1+\sqrt{3}$.

1981.41. 16 клеток белого квадрата 8×8 закрашено в черный цвет, причем в каждом столбце и в каждой строке ровно две черные клетки. Докажите, что перекрашиваниями строк и столбцов нельзя уменьшить число черных клеток.

1981.42.* Существуют ли шесть шестизначных чисел, состоящих из цифр от 1 до 6 без повторений, таких, что любое трехзначное число, в записи которого участвуют лишь цифры от 1 до 6 без повторений, можно получить из одного из этих чисел вычеркиванием трёх цифр?

1981.43. В ряд выписано p чисел, каждое из которых равно $+1$ или -1. За одну операцию разрешается сменить знак одновременно у нескольких подряд идущих чисел. За какое наименьшее количество подобных операций любой такой набор можно превратить в набор из одних единиц?

1981.44.* Найдутся ли в пространстве пять точек, попарные расстояния между которыми различны, такие, что периметр любого пространственного пятиугольника с вершинами в этих пяти точках всегда один и тот же?

1981.45. Числа a, b, c лежат в отрезке $[0;1]$. Докажите неравенства:

$$\sqrt{a(1-b)(1-c)} + \sqrt{b(1-a)(1-c)} + \sqrt{c(1-a)(1-b)} \leqslant 1 + \sqrt{abc}\,.$$

1981.46.* Пусть a_1, a_2, $\ldots$, a_7; b_1, b_2, $\ldots$, b_7; c_1, c_2, $\ldots$, c_7 — три набора целых чисел. Докажите, что можно выбросить несколько троек чисел с одинаковыми индексами (но не все!) так, чтобы в каждом наборе сумма оставшихся чисел делилась на 3.