1982

5-й класс

1982.01. Дан шестизначный телефонный номер. Сколько существует различных семизначных телефонных номеров, из которых при зачёркивании одной цифры получается данный шестизначный номер?

1982.02. Кузнечик прыгает на 1 см, затем прыгает на 3 см в том же или в противоположном направлении, затем в том же или в противоположном направлении на 5 см и т.д. Может ли он после 25-го прыжка оказаться в исходной точке?

1982.03. Некоторые из клеток таблицы 5×5 окрашены в красный цвет, а остальные — в синий. Докажите, что можно найти 4 клетки, окрашенные одним цветом, которые находятся на пересечении двух строк и двух столбцов.

1982.04. Докажите, что если сумма двух натуральных чисел равна 770, то их произведение не делится на 770.

1982.05. Расставьте на ребрах куба числа $1, 2, 3, \ldots, 12$ так, чтобы суммы чисел, стоящих на каждой грани, были одинаковы.

1982.06. Двое играют в следующую игру. Имеется несколько кучек камней. Игрок своим ходом должен разбить каждую кучку, состоящую более чем из одного камня, на две меньшие кучки. Игроки ходят поочередно до тех пор, пока во всех кучках не станет ровно по одному камню. Победителем считается тот, кто сделал последний ход. Докажите, что начинающий может выиграть, если исходно была одна кучка из 100 камней.

6-й класс

1982.07. A и B — различные двузначные числа, последние цифры которых совпадают. Известно, что неполное частное от деления A на 9 равно остатку от деления B на 9, а неполное частное от деления B на 9 равно остатку от деления A на 9. Найдите все такие пары чисел A и B.

1982.08. См. задачу 3.

1982.09. Докажите, что если сумма двух натуральных чисел равна 30030, то их произведение не делится на 30030.

1982.10. На плоскости дано 1982 точки и окружность радиуса 1. Докажите, что на этой окружности найдется точка, сумма расстояний от которой до данных 1982 точек больше, чем 1982.

1982.11. Кузнечик совершает прыжок длины 1, поворачивает под прямым углом, совершает прыжок длины 2, поворачивает под прямым углом, совершает прыжок длины 3 и т.д. Может ли он через 1982 прыжка оказаться в исходной точке?

1982.12. На танцевальном вечере в школе ни один мальчик не танцевал со всеми девочками, но каждая девочка танцевала по крайней мере с одним мальчиком. Докажите, что найдутся две такие пары M_1, D_1 и M_2, D_2, что мальчик M_1 танцевал с девочкой D_1, а мальчик M_2 — с девочкой D_2, но M_1 не танцевал с D_2, а M_2 не танцевал с D_1.

7-й класс

1982.13. Про два числа a и b известно, что $\left(\frac{1+ab}{a+b}\right)^2 < 1$. Докажите, что одно из чисел A и B больше 1, а другое меньше.

1982.14. Докажите, что для любых четырех углов выпуклого многоугольника сумма величин двух из них больше разности величин двух других.

1982.15. Докажите, что число $222\ldots22$ (1982 двойки) нельзя представить в виде $xy(x+y)$, где x и y — целые числа.

1982.16. В турнире по настольному теннису участвовали шестиклассники и семиклассники, причем шестиклассников было в два раза больше, чем семиклассников. Турнир проходил в один круг. Количество встреч, выигранных семиклассниками, на 40% больше, чем количество встреч, выигранных шестиклассниками. Сколько ребят участвовало в турнире?

1982.17. В клетках квадрата 3×3 расставьте девять различных натуральных чисел, не больших 40, так, чтобы произведения чисел в любом столбце, в любой строке и в любой из двух диагоналей были одинаковы.

1982.18. См. задачу 12.

8-й класс

1982.19. Пусть p_1, p_2, p_3 — квадратные трехчлены с положительными старшими коэффициентами. Докажите, что если каждые два из них имеют общий корень, то квадратный трехчлен $p_1 + p_2 + p_3$ имеет корень.

1982.20. В треугольнике ABC величина угла C в два раза больше величины угла A и $|AC| = 2|BC|$. Докажите, что этот треугольник прямоугольный.

1982.21. Пишется последовательность цифр, первыми четырьмя членами которой являются 1, 9, 8, 2, а каждая следующая цифра является последней цифрой суммы четырех предыдущих. Встретится ли в этой последовательности четверка подряд идущих цифр 3, 0, 4, 4?

1982.22. Угол между любыми двумя диагоналями выпуклого 180-угольника измеряется целым числом градусов. Докажите, что многоугольник — правильный.

1982.23. Клетки прямоугольника 5×41 раскрашены в два цвета. Докажите, что можно выбрать три строки и три столбца так, что все девять клеток, находящихся на их пересечении, будут иметь один цвет.

1982.24. Плоскость разбита на части $2n$ прямыми ($n > 1$), никакие две из которых не параллельны, и никакие три не пересекаются в одной точке. Докажите, что среди этих частей не более $2n - 1$ углов.

9-й класс

1982.25. См. задачу 20.

1982.26. См. задачу 21.

1982.27. См. задачу 22.

1982.28.

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} + \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = 1\,.$$

Докажите, что из трёх данных дробей две равны 1, а одна равна -1.

1982.29. Докажите, что для любого натурального k найдется натуральное n такое, что $\sqrt{n + 1981^k} + \sqrt{n} = (\sqrt{1982} + 1)^k$.

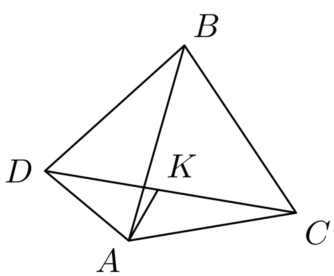
1982.30.* На плоскость поставлено несколько фишек, причем они не стоят все на одной прямой. Можно переставлять любую фишку в точку, симметричную ей относительно любой другой фишки. Докажите, что за несколько таких операций можно добиться того, чтобы фишки стояли в вершинах некоторого выпуклого многоугольника.

10-й класс

1982.31. См. задачу 21.

1982.32. См. задачу 23.

1982.33. См. задачу 28.



1982.34. В тетраэдре $ABCD$ сумма величин углов BAC и BAD равна 180 градусов. AK — биссектриса угла CAD. Найдите величину угла BAK.

1982.35. Докажите, что в вершинах правильного n-угольника можно расставить не равные нулю числа так, чтобы для любого множества вершин исходного многоугольника, являющихся вершинами правильного k-угольника ($k \leqslant n$), сумма стоящих в них чисел была равна нулю.

1982.36.* На окружности отметили $4n$ точек и раскрасили их через одну в красный и синий цвета. Точки каждого цвета разбили на пары и точки каждой пары соединили отрезком того же цвета, что и эти точки (никакие три отрезка при этом не пересеклись в одной точке). Докажите, что найдется по крайней мере n точек пересечения красных отрезков с синими.

Отборочный тур

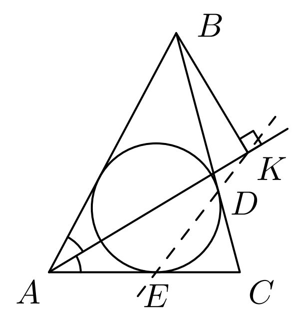
1982.37. Существует ли такое натуральное число k, что из любых 180 вершин правильного 360-угольника с центром в точке O можно выбрать две вершины A и B такие, что величина угла AOB равна k градусов?

1982.38. Квадрат разбили на $9801 = 99^2$ равных квадратиков и отметили их центры — во всех квадратиках, кроме одного углового. Отмеченные точки разбили на пары и точки каждой пары соединили вектором. Докажите, что сумма полученных векторов не равна нуль-вектору.

1982.39. На окружности взяли 10 точек. Какое наибольшее число отрезков с концами в этих точках можно провести, чтобы никакие три не образовывали треугольника с вершинами в отмеченных точках?

1982.40. Петя купил 8 пирожков с рисом и капустой и заплатил за них рубль. Вася купил 9 пирожков и заплатил рубль и одну копейку. Сколько сто́ит пирожок с рисом, если известно, что он дороже пирожка с капустой, и пирожки стоят дороже одной копейки?

1982.41. D и E — точки касания окружности, вписанной в треугольник ABC, со сторонами BC и AC. На биссектрису угла BAC опустили перпендикуляр BK. Докажите, что точки D, E и K лежат на одной прямой.



1982.42. (A_n) — бесконечная последовательность натуральных чисел такая, что $A_{n+k} - A_k$ делится на A_n при любых n и k. Обозначим через B_n произведение $A_1 A_2 \ldots A_n$. Докажите, что B_{n+k} делится на $B_n B_k$ при любых n и k.

1982.43.* На плоскости дано N точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и никакие четыре — на одной окружности. Докажите, что найдется не более $N - 2$ окружностей, каждая из которых проходит через три из данных точек и содержит внутри себя все остальные точки.

1982.44.* Докажите, что множество всех натуральных чисел, больших единицы, нельзя разбить на два непустых множества так, что если числа a и b лежат в одном множестве, то и число $ab - 1$ лежит в том же множестве.