1986

5-й класс

1986.01. В ряд лежат карточки, на которых написаны числа: 7, 8, 9, 4, 5, 6, 1, 2, 3. Разрешается взять несколько подряд лежащих карточек и переставить их в обратном порядке. Как за три таких операции добиться расположения 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

1986.02. На шахматной доске стоят 44 ферзя. Докажите, что каждый из них бьет какого-нибудь другого ферзя.

1986.03. Натуральные числа a и b таковы, что $34a = 43b$. Докажите, что число $a + b$ — составное.

1986.04. Как расположить на плоскости стола несколько пятаков, чтобы каждый из них касался ровно трёх других?

1986.05. По окружности расположено 55 чисел, каждое из которых равно сумме соседних с ним чисел. Докажите, что все числа равны нулю.

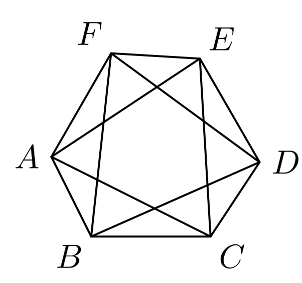
1986.06. а) Найдите семизначное число, все цифры которого различны и которое делится на все эти цифры.

б) Существует ли такое восьмизначное число?

6-й класс

1986.07. См. задачу 1.

1986.08. См. задачу 2.



1986.09. В шестиугольнике $ABCDEF$ треугольники ABC, ABF, FEA, FED, CDB, CDE равны. Докажите, что равны диагонали AD, BE, CF.

1986.10. См. задачу 5.

1986.11. Улитка выползла из начала координат и поползла по плоскости с постоянной скоростью, поворачивая каждые полчаса на 60 градусов.

Докажите, что вернуться в начало координат она сможет только за целое число часов.

1986.12. См. задачу 6.

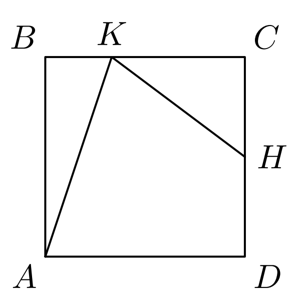
1986.13. Одиннадцать пионеров посещают пять кружков. Докажите, что среди них есть двое, A и B, такие, что все кружки, которые посещает A, посещает и B.

7-й класс

1986.14. См. задачу 5.

1986.15. Натуральные числа a, b, c таковы, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<1$. Докажите, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{41}{42}$.

1986.16. В равнобедренном треугольнике ABC угол при вершине B равен 108 градусов. Биссектриса угла ACB пересекает сторону AB в точке D. Перпендикуляр к этой биссектрисе в точке D пересекает основание AC в точке E. Докажите, что $AE = BD$.



1986.17. См. задачу 6.

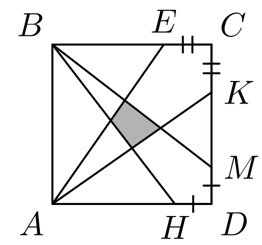
1986.18. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки K и H так, что $|KC| = 2|KB|$ и $|HC| = |HD|$. Докажите равенство углов AKB и AKH.

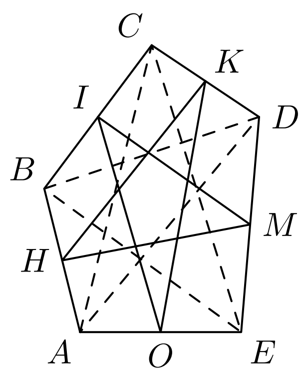
1986.19. Кучка из 25 камней произвольным образом делится на две кучки, любая из имеющихся кучек снова делится на две и т.д., пока каждая кучка не будет состоять из одного камня. При каждом делении какой-либо кучки на две записывается произведение чисел камней в получающихся двух кучках. Докажите, что сумма всех записанных чисел равна 300.

8-й класс

1986.20. Найдите все трехзначные числа, которые в 11 раз больше суммы своих цифр.

1986.21. В квадрате $ABCD$ на стороне BC взята точка E, на стороне CD — точки K и M, на стороне AD — точка H. При этом $CE = CK$, $DM = DH$. Докажите, что вокруг четырехугольника, образованного пересечением углов HBM и EAK, можно описать окружность.





1986.22. Найдите какие-нибудь целые числа A и B такие, что

$$\frac{A}{999} + \frac{B}{1001} = \frac{1}{999999}\,.$$

1986.23. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ точки H, I, K, M, O являются серединами сторон AB, BC, CD, DE и EA соответственно. Докажите, что длина замкнутой ломаной $HKOIMH$ меньше, чем длина ломаной $ACEBDA$.

1986.24. Квадратные трехчлены $x^2+b_1x+c_1$ и $x^2+b_2x+c_2$ имеют целые коэффициенты и общий нецелый корень. Докажите, что эти трехчлены совпадают.

1986.25.* 200 футбольных команд проводят чемпионат. В первый день все команды сыграли по одной игре, во второй день вновь все сыграли по одной игре и т.д. Докажите, что после шестого дня можно указать 34 команды, никакие две из которых не играли друг с другом.

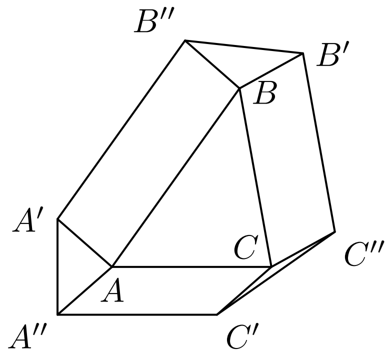
9-й класс

1986.26. См. задачу 20.

1986.27. См. задачу 21.

1986.28. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} a = bcd \\ a + b = cd \\ a + b + c = d \\ a + b + c + d = 1\,. \end{cases}$$



1986.29. На сторонах треугольника ABC построены параллелограммы $AA'B''B$, $BB'C''C$, $CC'A''A$ с равными по длине боковыми сторонами $AA' = BB' = CC' = a$. Найдите a, если известно, что $A'A'' = 3$, $B'B'' = 4$, $C'C'' = 5$.

1986.30. См. задачу 24.

1986.31. Найдите какие-нибудь целые числа A, B и C такие, что

$$\frac{A}{999} + \frac{B}{1000} + \frac{C}{1001} = \frac{1}{999 \cdot 1000 \cdot 1001}\,.$$

10-й класс

1986.32. См. задачу 20.

1986.33. См. задачу 21.

1986.34. Какое минимальное значение может принимать произведение двух положительных чисел a и b, если известно, что $ab = a + b$?

1986.35. Найдите все положительные решения уравнения

$$x^{1986} + 1986^{1985} = x^{1985} + 1986^{1986}\,.$$

1986.36. См. задачу 31.

1986.37. Найдите угол между ребром AB и гранью ACD в трехгранном угле $ABCD$ с вершиной A, если величина угла $BAC - 45°$, $CAD - 90°$, $BAD - 60°$.

Заключительный тур

8-й класс

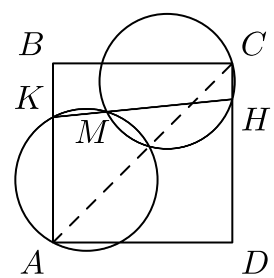
1986.38. Пусть $a_1 = 2$ и $a_{n+1} = a_1 a_2 \ldots a_n + 1$ для $n = 1, 2, \ldots$. Докажите, что

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} < 1\,.$$

1986.39. Докажите, что в любом многоугольнике найдутся сторона BC и вершина A, отличная от B и C, такие, что основание перпендикуляра, опущенного из A на прямую BC, лежит на отрезке BC.

1986.40. Марсианин рождается в полночь и живет ровно 100 суток. Известно, что за всю историю вымершей ныне марсианской цивилизации родилось нечетное число марсиан. Докажите, что было по крайней мере 100 дней, когда число жителей Марса было нечетным.

1986.41. На стороне AB квадрата $ABCD$ выбрана точка K, на стороне CD — точка H, и на отрезке KH — точка M. Докажите, что вторая (отличная от M) точка пересечения окружностей, описанных вокруг треугольников AKM и MHC, лежит на диагонали AC.



1986.42.* В Швамбрании закрыли одну беспосадочную авиалинию. Известно, что после этого от любого швамбранского аэропорта до любого другого можно долететь, быть может, с пересадками. До закрытия линии это можно было сделать, совершив не более, чем n посадок. Докажите, что теперь можно долететь из любого аэропорта в любой другой не более, чем с $2n$ посадками (при их подсчете учитывается и посадка в пункте назначения).

1986.43. Последовательность из 36 нулей и единиц начинается с пяти нулей. Среди пятерок подряд стоящих цифр встречаются все 32 возможных комбинации. Найдите пять последних цифр в последовательности.

1986.44.* Докажите, что на плоскости можно провести несколько прямых и отметить несколько точек так, чтобы на любой прямой лежало ровно 4 отмеченных точки и через каждую отмеченную точку проходило бы ровно 4 прямых.

1986.45.* Имеется лист клетчатой бумаги размером 30×45 клеток. Двое играют в следующую игру: за один ход (ходят по очереди) производится разрез по линии, соединяющей два соседних узла сетки. Первый игрок начинает резать от края листа, а каждый следующий разрез должен продолжать линию, образованную предыдущими разрезами. Выигрывает игрок, после хода которого лист распадается на два куска. Кто выигрывает при правильной игре?

9-й класс

1986.46. См. задачу 38.

1986.47. См. задачу 39.

1986.48. См. задачу 40.

1986.49. См. задачу 41.

1986.50. Множество A состоит из положительных чисел. Известно, что сумма любых двух его элементов также является его элементом, и любой отрезок $[a; b]$, $0 < a < b$, содержит отрезок, целиком состоящий из элементов множества A. Докажите, что A содержит все положительные вещественные числа.

1986.51. Рассмотрим следующий алгоритм:

Шаг 0. Положить $n = m$.

Шаг 1. Если n четно, уменьшить n в два раза. Если n нечетно, увеличить n на единицу.

Шаг 2. Если $n > 1$, перейти к Шагу 1. Если $n = 1$, закончить выполнение алгоритма.

Сколько существует натуральных чисел m, для которых при выполнении этого алгоритма Шаг 1 будет выполняться ровно 15 раз?

1986.52. См. задачу 44.

1986.53.* Король обошел доску 9×9, побывав ровно один раз на каждом ее поле. Маршрут короля не замкнутый и, возможно, самопересекающийся. Какова максимально возможная длина такого маршрута, если длина хода по диагонали равна $\sqrt{2}$, а длина хода по вертикали и горизонтали равна 1?

10-й класс

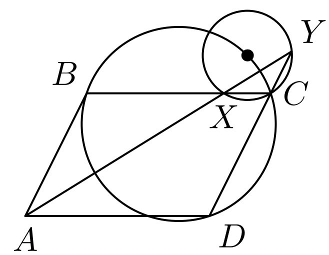
1986.54. Диаметром множества на плоскости называется наибольшее из расстояний между двумя его точками (если такое существует). Известно, что сумма диаметров многоугольников M_1, M_2, …, M_n меньше, чем диаметр их объединения. Докажите, что существует прямая, не пересекающая ни один из многоугольников, по каждую сторону от которой лежит хотя бы один из них.

1986.55. Функция $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна. Для любого вещественного x существует натуральное n такое, что $F(F(\ldots F(x))\ldots) = 1$ (символ F написан n раз). Докажите, что $F(1) = 1$.

1986.56. Докажите, что

$$\frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{9997}+\sqrt{9999}} > 24\,.$$

1986.57. В параллелограмме $ABCD$, не являющемся ромбом, проведена биссектриса угла BAD; X и Y — точки ее пересечения с прямыми BC и CD соответственно. Докажите, что центр окружности, проведенной через точки C, X и Y, лежит на окружности, проведенной через точки B, C и D.



1986.58. Вычислите интеграл $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^3+\sqrt{1+x^6}}$.

1986.59.* Докажите, что на плоскости можно расположить несколько непересекающихся по внутренним точкам кругов так, чтобы всякий круг касался ровно пяти других.

1986.60. Дано:

$$\begin{aligned} u_1 &= ax+by+cz,\ v_1 = ax+bz+cy\,,\\ u_2 &= ay+bz+cx,\ v_2 = az+by+cx\,,\\ u_3 &= az+bx+cy,\ v_3 = ay+bx+cz\,. \end{aligned}$$

где a, b, c, x, y, z — вещественные числа. Известно, что $u_1u_2u_3 = v_1v_2v_3$. Докажите, что перестановкой чисел в тройке (u_1, u_2, u_3) можно получить тройку (v_1, v_2, v_3).

1986.61.* См. задачу 45 для листа бумаги размером 30×30 клеток.