1988

5-й класс

1988.01. В клетках таблицы 3×3 стоят нули. Можно выбрать квадрат 2×2 и увеличить на единицу все стоящие в нем числа. Докажите, что за несколько таких операций не удастся получить таблицу, изображенную на рисунке.

4	9	5
10	18	6
6	13	7

1988.02. Ведущий и каждый из 30 игроков записывают числа от 1 до 30 в некотором порядке. Затем записи сравнивают; если у игрока и у ведущего на одном и том же месте стоят одинаковые числа, то игрок получает очко. Оказалось, что все набрали различные количества очков. Докажите, что чья-то запись совпала с записью ведущего.

1988.03. Можно ли натуральные числа от 1 до 100 выписать в строчку так, чтобы разность любых двух соседних (из большего вычитают меньшее) была не меньше 50?

1988.04. Существуют ли такие целые числа A и B, отличные от нуля, что одно из них делится на их сумму, а другое — на их разность?

1988.05. На столе лежит куча из 1001 камня. Ход состоит в том, что из какой-либо кучи, содержащей более одного камня, выкидывают камень, а затем одну из куч делят на две. Можно ли через несколько ходов оставить на столе только кучи, состоящие из трёх камней?

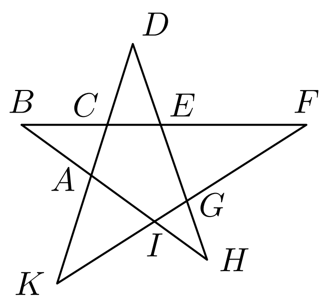
1988.06. Замок состоит из 64 одинаковых квадратных комнат, имеющих по двери в каждой стене и расположенных в виде квадрата 8×8. Полы в комнатах покрашены в белый цвет. Каждое утро маляр совершает прогулку по замку, причем, проходя через комнату, он перекрашивает пол в ней из белого цвета в черный, а из черного – в белый. Возможно ли, что когда-нибудь полы в замке окажутся покрашенными в шахматном порядке в черный и белый цвета?

6-й класс

1988.07. См. задачу 3.

1988.08. См. задачу 1.

1988.09. Каждое из натуральных чисел a, b, c и d делится на натуральное число $ab - cd$. Докажите, что $ab - cd = 1$.

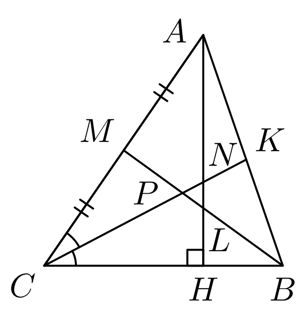


1988.10. Докажите, что звезду нельзя нарисовать так, чтобы выполнялись неравенства $AB < BC, CD < DE, EF < FG, GH < HI, IK < KA$.

1988.11. За круглым столом сидят 25 человек. Им роздано по две карточки. На каждой из 50 карточек написано одно из чисел $1, 2, 3, \ldots, 25$, причем каждое из чисел встречается дважды. Раз в минуту по сигналу ведущего каждый из сидящих передает своему соседу справа ту из своих карточек, на которой написано меньшее число. Если же у кого-то на руках окажутся две карточки с одинаковыми номерами, то процесс заканчивается. Докажите, что это рано или поздно произойдет.

1988.12. На столе лежат 500 спичек. Двое играющих ходят по очереди. За один ход можно взять со стола $1, 2, 4, 8, \ldots$ (любую степень двойки) спичек. Проигрывает тот, кому нечего брать. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнер?

7-й класс



1988.13. Вещественные числа x и y таковы, что $0 \leqslant x, y \leqslant 1$. Докажите, что $\frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} \leqslant 1$.

1988.14. В остроугольном треугольнике ABC высота AH пересекается с медианой BM в точке L, а с биссектрисой CK в точке N. Медиана BM и биссектриса CK пересекаются в точке P (точки L, N, P различны). Докажите, что треугольник LNP не может быть равносторонним.

1988.15. См. задачу 9.

1988.16. См. задачу 11.

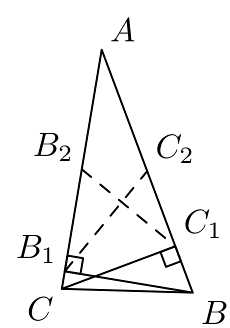
1988.17. См. задачу 10.

1988.18.* На клетчатом листе бумаги размером 21×21 вершины клеток раскрашены в красный и синий цвета. При этом все вершины, находящиеся на верхнем краю листа, и все вершины, находящиеся на правом краю листа, за исключением самой нижней, окрашены в красный цвет. Все остальные вершины на крае окрашены в синий цвет. Докажите, что на этом листе есть клетка с двумя красными и двумя синими вершинами, причем красные вершины находятся на концах одной стороны клетки.

8-й класс

1988.19. $abc = 1$, $a + b + c = 1/a + 1/b + 1/c$. Докажите, что одно из чисел a, b, c равно 1.

1988.20. BB_1 и CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC с углом A, равным 30 градусов; B_2 и C_2 — середины сторон AC и AB соответственно. Докажите, что отрезки B_1C_2 и B_2C_1 перпендикулярны.



1988.21. Найдите 100-значное число без нулевых цифр, делящееся на сумму своих цифр.

1988.22. Имеется стопка из n разноцветных кирпичей. За одну операцию разрешается взять несколько кирпичей снизу и положить их наверх в том же порядке, после чего перевернуть всю стопку. Докажите, что количество разных стопок, которые можно получить с помощью таких операций, не превосходит $2n$.

1988.23. В 120-квартирном доме живут 119 человек. Квартира называется перенаселенной, если в ней живут по крайней мере 15 человек. Каждый день жильцы одной из перенаселенных квартир ссорятся и разъезжаются по разным квартирам. Верно ли, что когда-нибудь переезды прекратятся?

1988.24. а) $x, y, z \geqslant 0$; $x + y + z = 1/2$. Докажите, что

$$\frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1-y}{1+y} \cdot \frac{1-z}{1+z} \geqslant \frac{1}{3}.$$

б) $x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$; $x_1 + \ldots + x_n = 1/2$. Докажите, что

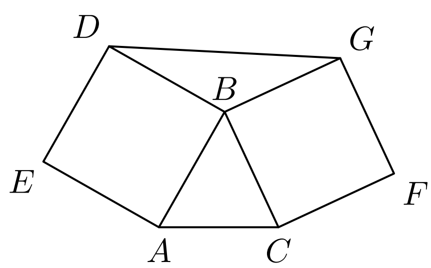
$$\frac{1-x_1}{1+x_1} \cdot \frac{1-x_2}{1+x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1-x_n}{1+x_n} \geqslant \frac{1}{3}.$$

9-й класс

1988.25. a, b, c и d такие целые числа, что

$$ab + cd = -1, \quad ac + bd = -1, \quad ad + bc = -1\,.$$

Найдите a, b, c и d.



1988.26. На сторонах AB и BC треугольника ABC построены во внешнюю сторону квадраты $ABDE$ и $BCFG$. Оказалось, что прямая DG параллельна прямой AC. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

1988.27. Известно, что $a < b < c$. Докажите, что уравнение

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$$

имеет два корня x_1 и x_2, причем $a < x_1 < b < x_2 < c$.

1988.28. а) См. задачу 24б при $n = 2$.
б) См. задачу 24б при $n = 4$.

1988.29. a, b и c — натуральные числа такие, что a^3 делится на b, b^3 делится на c, а c^3 делится на a. Докажите, что $(a+b+c)^{13}$ делится на abc.

1988.30. Все диагонали параллелепипеда равны. Докажите, что он прямоугольный.

10-й класс

1988.31. См. задачу 28а.

1988.32. См. задачу 20.

1988.33. См. задачу 29.

1988.34. Функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы на всей вещественной оси и принимают вещественные значения. Для любых вещественных x и y выполнено равенство $f(x + g(y)) = 2x + y + 5$. Найдите функцию $g(x + f(y))$ (выразите явно через x и y).

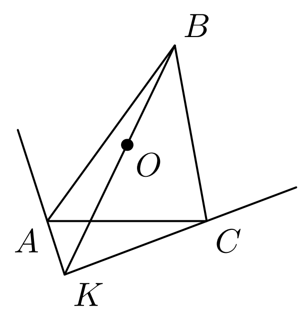
1988.35. Дано 100 последовательных натуральных чисел. Можно ли расставить их по окружности так, чтобы произведение любых двух соседних чисел было точным квадратом?

1988.36. В правильной шестиугольной пирамиде центр описанной сферы лежит на поверхности вписанной сферы. Найдите отношение радиуса описанной сферы к радиусу вписанной сферы.

Заключительный тур

8-й класс

1988.37. Прямая, содержащая сторону AC остроугольного треугольника ABC, симметрично отражается относительно прямых AB и BC. Две полученные прямые пересекаются в точке K. Докажите, что прямая BK проходит через точку O — центр описанной окружности треугольника ABC.



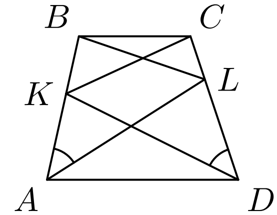
1988.38. Вещественные числа x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 лежат в отрезке $[0; 1]$. Докажите, что

$$(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_4)(x_4 - x_5)(x_5 - x_6)(x_6 - x_1) \leqslant \frac{1}{16}\,.$$

1988.39. Найдите два взаимно простых четырехзначных натуральных числа A и B таких, что для любых натуральных m и n числа A^m и B^n отличаются по крайней мере на 4000.

1988.40. N городов соединены друг с другом $2N - 1$ дорогами с односторонним движением. При этом из любого города можно проехать в любой другой, не нарушая правил.

Докажите, что есть дорога, после закрытия которой это свойство сохранится.



1988.41. В трапеции $ABCD$ (с основаниями BC и AD) на сторонах AB и CD взяты точки K и L. Докажите, что если углы BAL и CDK равны, то равны и углы BLA и CKD.

1988.42. На столе лежат две кучки спичек: в одной — 100 спичек, в другой — 252. Два игрока делают ходы по очереди. За один ход разрешается взять из одной кучки несколько спичек, количество которых является делителем числа спичек в другой кучке. Выигрывает взявший последнюю спичку. Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его соперник?

1988.43. Словом называется произвольная конечная последовательность из нулей и единиц. Утроением слова A называется его троекратное повторение AAA. Например, если A $= 101$, то его утроение — это слово 101101101. Над словами разрешается производить одну из следующих двух операций:

1) вставить в произвольном месте (в том числе приписать в начале или в конце) утроение любого слова;

2) вычеркнуть утроение любого слова.

Так, из слова 0001 можно, например, получить слова 0111001 и 1. Можно ли такими операциями получить слово 01 из слова 10?

1988.44.* В лесу барона Мюнхгаузена растут елки и березы, причем на расстоянии ровно 1 км от каждой елки растет в точности 10 берез. Барон утверждает, что в его лесу елок больше, чем берез. Может ли такое быть?

9-й класс

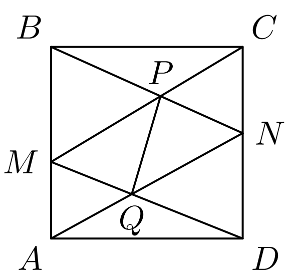
1988.45. См. задачу 37.

1988.46. На шахматной доске расставлено несколько фишек. За один ход одна из фишек сдвигается на свободное соседнее (по вертикали или по горизонтали) поле. После нескольких ходов оказалось, что каждая фишка побывала на всех полях ровно по одному разу и вернулась на исходное поле. Докажите, что был момент, когда ни одна из фишек не стояла на своем исходном поле.

1988.47. a, b, c, d — положительные вещественные числа. Докажите, что

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geqslant \frac{64}{a+b+c+d}\,.$$

1988.48. Каждая улица города Фоминска соединяет два перекрестка. На улицах города введено одностороннее движение. Исполком провел конкурс на проект строительства такой сети бензоколонок, чтобы от каждого перекрестка можно было, не нарушая правил, доехать до одной из бензоколонок, но ни от какой бензоколонки нельзя было доехать ни до какой другой. Докажите, что во всех представленных на конкурс проектах предусматривается строительство одного и того же числа бензоколонок.



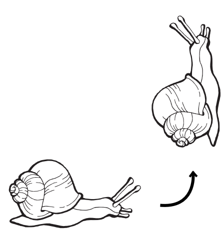
1988.49. В квадрате $ABCD$ на сторонах AB и CD взяты точки M и N. Отрезки CM и BN пересекаются в точке P, а отрезки AN и MD — в точке Q. Докажите, что $|PQ| \geq |AB|/2$.

1988.50.* Последовательность $a_1, a_2, \ldots$ состоит из натуральных чисел, меньших 1988. При этом для любых n и m число $a_m + a_n$ делится на a_{m+n}. Докажите, что эта последовательность — периодическая.

1988.51. См. задачу 43.

1988.52. См. задачу 44.

10-й класс

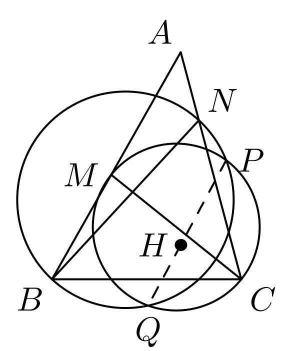


1988.53. Улитка ползет по плоскости, поворачивая после каждого метра пути на 90 градусов. На каком максимальном расстоянии от исходной точки она могла оказаться после того, как проползла 300 метров, сделав всего 99 левых и 200 правых поворотов?

1988.54. Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна. Для каждого вещественного x имеет место равенство $f(x) \cdot f(f(x)) = 1$. Известно, что $f(1000) = 999$. Найдите $f(500)$.

1988.55. См. задачу 39.

1988.56. См. задачу 40.



1988.57. В остроугольном треугольнике ABC на сторонах AB и AC взяты точки M и N. Окружности, построенные на отрезках BN и CM как на диаметрах, пересекаются в точках P и Q. Докажите, что P, Q и точка H пересечения высот треугольника ABC лежат на одной прямой.

1988.58.* Дан многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами. Докажите, что если $P(x) - P'(x) - P''(x) + P'''(x) \geqslant 0$ для любого вещественного x, то $P(x) \geqslant 0$ для любого вещественного x.

1988.59. См. задачу 43.

1988.60.* На плоскости дан выпуклый n-угольник. Пусть a_k — длина его k-й стороны, а d_k — длина его проекции на прямую, содержащую эту сторону ($k = 1, 2, 3, \ldots, n$). Докажите, что

$$2 < \frac{a_1}{d_1} + \frac{a_2}{d_2} + \ldots + \frac{a_n}{d_n} \leqslant 4\,.$$

Комментарий.

В качестве дополнительных (только для тех участников, кто решил все задачи варианта) в 7 и 8 классах предлагались задачи **61** (7), **62** (7) и **63** (8). Однако при официальном сравнении результатов участников эти задачи не учитывались.

1988.61. а) См. задачу 6.

б) Докажите, что маляр может изменить любую раскраску замка размерами $n \times n$ на любую другую, сделав не более $2n^2$ переходов из одной комнаты в другую.

1988.62. Можно ли числа от 1 до 1000 разбить на несколько групп так, чтобы в каждой группе нашлось число, равное трети суммы остальных чисел группы?

1988.63. На доске $n \times n$ сидят $n - 1$ жуков так, что никакие два из них не находятся в соседних (по стороне) клетках. Докажите, что один из них может переползти в соседнюю клетку так, что это условие сохранится.