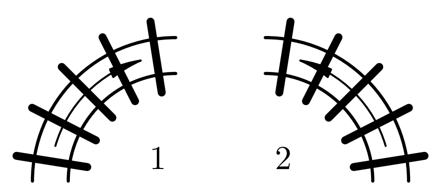
1989

5-й класс

1989.01. Жюри составляет варианты олимпиады для 5, 6, 7, 8, 9 и 10 классов. Члены жюри договорились, что в каждом варианте должно быть 7 задач, ровно 4 из которых не встречаются ни в одном другом варианте. Какое максимальное число задач можно включить в такую олимпиаду?

1989.02. Трамвайные билеты имеют номера от 000 000 до 999 999. Номер называется счастливым, если у него сумма трёх первых цифр равна сумме трёх последних цифр. Докажите, что количество счастливых номеров равно количеству номеров с суммой цифр 27.

1989.03. В комплект детской железной дороги входит несколько рельсовых участков вида 1 и 2, каждый из которых помечен стрелкой. Дорогу разрешается собирать только так, чтобы направления всех стрелок совпадали с направлением движения паровоза. Из комплекта можно правильно сложить замкнутый путь, используя все рельсы. Докажите, что если заменить один из участков вида 1 участком вида 2, то правильный замкнутый путь из всех участков составить не удастся.



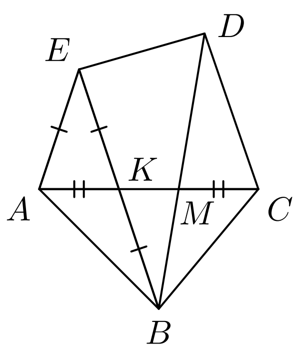
1989.04. Имеется 32 камня попарно разного веса. Докажите, что за 35 взвешиваний на чашечных весах без гирь можно определить самый тяжелый и второй по весу камни.

1989.05. Найдите хотя бы одну пару различных шестизначных чисел такую, что если первое число приписать ко второму, то полученное 12-значное число будет делиться на произведение исходных шестизначных чисел.

1989.06. В клетки доски 10×10 двое по очереди ставят крестики и нолики (каждый может поставить либо крестик, либо нолик). Выигравшим считается игрок, после хода которого на доске окажутся три крестика (или нолика) в ряд — по вертикали, горизонтали или диагонали, причем ряд должен быть без пропусков. Может ли кто-нибудь из игроков всегда обеспечить себе выигрыш, и если может, то кто: начинающий или его соперник?

6-й класс

1989.07. См. задачу 1 для олимпиады только 6–10 классов.



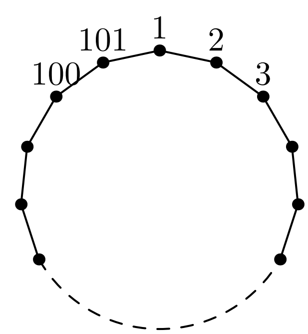
1989.08. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ диагонали BE и BD пересекают диагональ AC в точках K и M соответственно. Докажите, что если $AE = EK = KB$ и $AK = MC$, то $EM = BC$.

1989.09. См. задачу 4 для 64 камней и 68 взвешиваний.

1989.10. Найдите все возможные тройки целых чисел a, b и c такие, что

$$\begin{cases} a^2 + 2b^2 - 2bc = 100 \\ 2ab - c^2 = 100\,. \end{cases}$$

1989.11. Имеется 99 копий правильного 101-угольника, вершины каждой из которых занумерованы по порядку числами от 1 до 101 (см. рисунок). Можно ли сложить эти 99 многоугольников в стопку (их можно и переворачивать) так, чтобы суммы чисел вдоль ребер стопки были одинаковы?



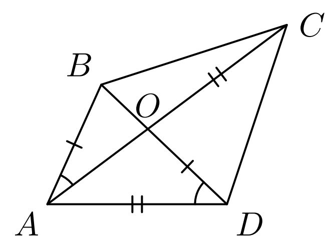
1989.12. Найдите наименьшее натуральное число, большее 1, которое по крайней мере в 600 раз больше каждого своего простого делителя.

1989.13. Дано несколько (не менее двух) ненулевых чисел. Разрешается стереть любые два числа A и B и записать вместо них числа $A + B/2$ и $B - A/2$. Докажите, что после нескольких таких операций нельзя вновь получить исходный набор чисел.

7-й класс

1989.14. За круглым столом сидят $2n$ человек: n физиков и n химиков, причем некоторые из них всегда говорят правду, а остальные всегда лгут. Известно, что количество химиков-лжецов равно количеству физиков-лжецов. На вопрос: “Кто ваш сосед справа?” все сидящие за столом ответили: “Химик”. Докажите, что n четно.

1989.15. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Известно, что $AB = OD$, $AD = CO$, и $\angle BAC = \angle BDA$. Докажите, что $ABCD$ — трапеция.



1989.16. Докажите, что если $x + y + z \geqslant xyz$, то $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xyz$.

1989.17. См. задачу 5.

1989.18. Библиотекарь каждую минуту подходит к полке, на которой стоит 8-томное собрание сочинений, и меняет местами какие-то два соседних тома. Может ли он делать это так, чтобы по истечении некоторого времени оказалось, что все возможные варианты расстановки томов уже реализованы, причем каждый — по разу?

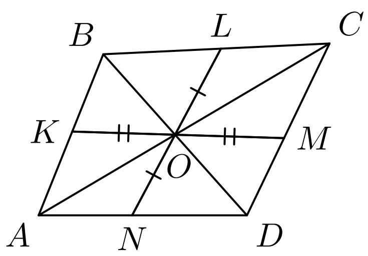
1989.19. Двое играют в следующую игру: на центральном узле клетчатого квадрата 10×10 стоит фишка. За один ход каждый из игроков имеет право переставить ее на любой другой узел квадрата, но при этом длина его хода (т.е. расстояние, на которое он передвинул фишку) должна быть больше, чем длина предыдущего хода, сделанного его партнером. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто из партнеров выигрывает при правильной игре?

1989.20. Существует ли набор из ста различных натуральных чисел, произведение любых пяти из которых делится на сумму этих же пяти чисел?

8-й класс

1989.21. Докажите, что система уравнений $x + y + z = 0$; $1/x + 1/y + 1/z = 0$ не имеет решений в вещественных числах.

1989.22. A — натуральное число, большее 1, а B — натуральный делитель числа $A^2 + 1$. Докажите, что если $B - A > 0$, то $B - A > \sqrt{A}$.



1989.23. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Точки K, L, M и N лежат на сторонах AB, BC, CD и DA соответственно так, что точка O лежит на отрезках KM и LN и делит их пополам. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

1989.24. В клетках бесконечной шахматной доски расставлено m фишек. Для каждой фишки вычисляется произведение количества фишек в ее строке на количество фишек в ее столбце. Докажите, что количество фишек, для которых это число не меньше $10m$, не превосходит $m/10$.

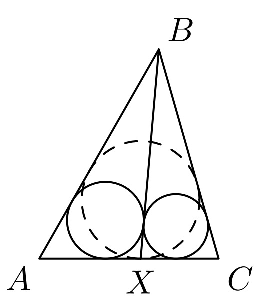
1989.25. По окончании шахматного турнира, проходившего в k кругов, оказалось, что количества очков, набранные участниками, образуют геометрическую прогрессию с натуральным знаменателем, большим 1. Сколько могло быть участников

а) при $k = 1989$?

б) при $k = 1988$?

1989.26. На плоскости проведено N прямых, никакие две из которых не параллельны, и никакие три не пересекаются в одной точке. При каких N заведомо можно поставить у каждой точки пересечения прямых одно из чисел $1, 2, \ldots, N-1$ так, чтобы на любой прямой все эти числа встречались ровно по разу?

9-й класс

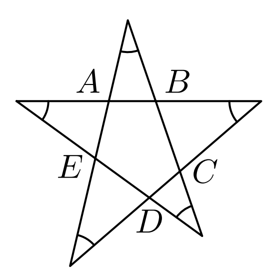


1989.27. См. задачу 21.

1989.28. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка X. Докажите, что если вписанные окружности треугольников ABX и BCX касаются друг друга, то точка X лежит на окружности, вписанной в треугольник ABC.

1989.29. См. задачу 22.

1989.30. Замкнутая пятизвенная ломаная образует равноугольную звезду. Чему равен периметр внутреннего пятиугольника $ABCDE$, если длина исходной ломаной равна 1?

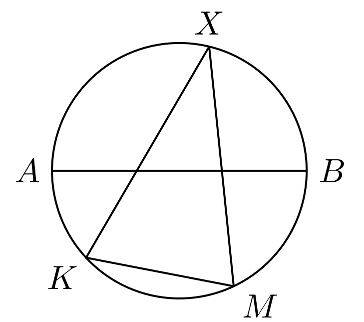


1989.31. Можно ли расставить в клетках таблицы 10×10 числа $+1$, -1 и 0 так, чтобы все 20 сумм в строках и столбцах были различны?

1989.32. См. задачу 25.

9-й класс (ФМШ)[1]

1989.33. См. задачу 21.



1989.34. Хорды XK и XM окружности делят ее диаметр AB на три равные части. Докажите, что $5|KM| \leqslant 3|AB|$.

1989.35. См. задачу 25.

1989.36. См. задачу 30.

1989.37. Выясните, может ли операция $*$, сопоставляющая каждым двум натуральным числам x и y натуральное число $x * y$, обладать одновременно тремя следующими свойствами:
а) $a * b = |a - b| * (a + b)$ при $a \neq b$;
б) $(ac) * (bc) = (a * b)(c * c)$;
в) $(2k + 1) * (2k + 1) = 2k + 1$.

10-й класс

1989.38. Докажите, что ни при каких вещественных a, b и c три числа $(b-c)(bc-a^2)$, $(c-a)(ca-b^2)$, $(a-b)(ab-c^2)$ не могут быть положительными одновременно.

1989.39. См. задачу 28.

1989.40. Изобразите на плоскости множество точек с координатами $(x; y)$, для которых найдутся два неотрицательных числа a и b такие, что наибольшее из чисел a^2, b равно x, а наименьшее из чисел b^2, a равно y.

1989.41. В основании пирамиды лежит равносторонний многоугольник. Докажите, что если все плоские углы при вершине пирамиды равны между собой, то среди треугольных боковых граней пирамиды найдутся две равных.

[1] вариант для физ-мат школ

1989.42. См. задачу 25.

10-й класс (ФМШ)[2]

1989.43. См. задачу 21.

1989.44. Дана операция $*$, сопоставляющая каждым двум целым числам X и Y целое число $X * Y$. Известно, что каждое целое число равно $X*Y$ при некоторых целых X и Y. Докажите, что такая операция не может обладать одновременно двумя следующими свойствами:
а) $A * B = -(B * A)$;
б) $(A * B) * C = A * (B * C)$.

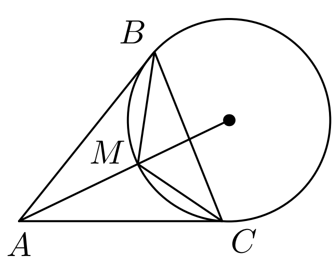
1989.45. См. задачу 41.

1989.46. См. задачу 25.

1989.47. Докажите, что если уравнение $Ax^2 + (C - B)x + (E - D) = 0$ имеет вещественный корень, больший 1, то уравнение $Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$ имеет хотя бы один вещественный корень.

Заключительный тур

8-й класс



1989.48. Внутри треугольника ABC взята точка M, такая что $\angle BMC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC$, и прямая AM содержит центр окружности, описанной около треугольника BMC. Докажите, что M — центр вписанной окружности треугольника ABC.

1989.49. Дан конечный набор различных натуральных чисел, обладающих следующим свойством: все их простые делители не превосходят данного числа n. Докажите, что сумма величин, обратных к этим числам, не превосходит n.

1989.50. k — натуральное число, большее 1. Докажите, что в клетках таблицы размером $k \times k$ нельзя расставить числа $1, 2, 3, \ldots, k^2$ так, чтобы все суммы чисел в строках и столбцах являлись степенями двойки.

[2] вариант для физ-мат школ

1989.51. На полях доски 10×10 стоит 91 белая шашка. Маляр берет одну из них, перекрашивает в черный цвет и ставит на любое свободное поле доски. Затем он опять берет одну из белых шашек, перекрашивает ее в черный цвет и т.д., до тех пор, пока все шашки не станут черными. Докажите, что в какой-то момент на некоторых двух соседних (по стороне) клетках будут стоять шашки разных цветов.

1989.52. Какую максимальную площадь может иметь четырехугольник, длины сторон которого равны 1, 4, 7, 8?

1989.53. Двое играют в следующую игру. На доске написано число 2. Каждый из игроков своим ходом заменяет число n, написанное на доске, на число $n + d$, где d — произвольный делитель числа n, меньший его. Проигрывает тот, кто напишет на доске число, большее 19891989. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнер?

1989.54.* В языке племени Тру-ля-ля словом является любая последовательность из 10 цифр 0 и 1. Известно, что два слова являются синонимами тогда и только тогда, когда одно можно получить из другого серией операций такого вида: из слова вычеркивается несколько подряд стоящих цифр, сумма которых четна, после чего вычеркнутые цифры вписываются на то же самое место, но в обратном порядке. Сколько можно выписать слов языка племени Тру-ля-ля, различающихся по смыслу?

1989.55.* В квадратном зале с зеркальными стенами стоит профессор Смит. Профессор Джонс хочет расставить в зале несколько студентов так, чтобы со своего места Смит не мог увидеть собственного отражения. Удастся ли профессору Джонсу это сделать? (Профессор и студенты считаются точками. Студенты могут стоять у стен и в углах).

9-й класс

1989.56. См. задачу 48.

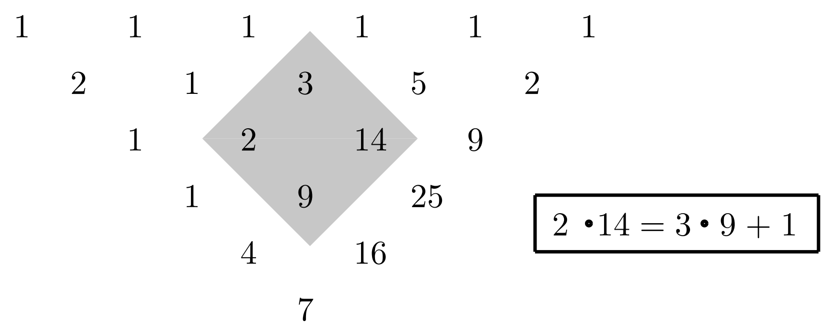
1989.57. Все возможные последовательности из семи цифр (от 0000000 и до 9999999) выписаны одна за другой в некотором порядке. Докажите, что получившееся 70000000-значное число делится на 239.

1989.58. x, y, z — вещественные числа из отрезка $[0; 1]$. Докажите, что

$$2(x^3 + y^3 + z^3) - (x^2y + y^2z + z^2x) \leqslant 3\,.$$

1989.59. См. задачу 51.

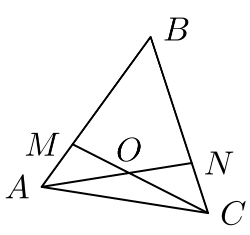
1989.60. Числовой треугольник, первая строка которого состоит из n единиц, а вторая — из $n-1$ произвольных целых чисел (см. пример для $n = 6$ на рисунке), обладает следующим свойством: для любых четырех чисел, образующих четырехугольник $\begin{smallmatrix} & a & \\ b & & c \\ & d & \end{smallmatrix}$ (a и c — соседние в строке), выполняется равенство $ac = bd + 1$. Известно, что все числа в треугольнике отличны от нуля. Докажите, что тогда они все — целые.



1989.61. Последовательность вещественных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ такова, что для любого натурального k выполняется равенство

$$a_{k+1} = \frac{ka_k + 1}{k - a_k}.$$

Докажите, что в этой последовательности бесконечно много как положительных, так и отрицательных чисел.



1989.62.* В треугольнике ABC точка M лежит на стороне AB, точка N — на стороне BC, O — точка пересечения отрезков CM и AN. Известно, что $AM + AN = CM + CN$. Докажите, что $AO + AB = CO + CB$.

1989.63.* Для каких k можно расположить на окружности 100 дуг так, чтобы каждая из них пересекалась ровно с k другими?

1989.64.* Докажите, что если треугольник в задаче 60 составлен из натуральных чисел, то количество различных чисел, встречающихся в нем, не меньше $n/4$.

10-й класс

1989.65. См. задачу 48.

1989.66. См. задачу 49.

1989.67. См. задачу 60.

1989.68. См. задачу 52.

1989.69. Сколько решений в вещественных числах имеет уравнение

$$\sin(\sin(\sin(\sin(\sin(x))))) = x/3\ ?$$

1989.70. Микрокалькулятор “ФН-89” выполняет только две операции: $X \mapsto 2X-1$ и $X \mapsto 2X$. В микрокалькулятор введено некоторое натуральное число. Докажите, что нажимая кнопки, из него можно получить число, являющееся точной пятой степенью.

1989.71. Последовательность вещественных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ такова, что для любых m и n выполняется неравенство

$$|a_m + a_n - a_{m+n}| \leqslant \frac{1}{m+n}\,.$$

Докажите, что эта последовательность — арифметическая прогрессия.

1989.72.* Двое играют в следующую игру. Имеется доска, на которой написано число 1000, и кучка из 1000 спичек. За ход каждый из игроков (ходят по очереди) может либо взять из кучки, либо положить в нее не более 5 спичек (исходно у обоих игроков нет ни одной спички), а затем на доску записывается число спичек в кучке после данного хода. Проигрывает тот, после чьего хода на доске появится уже имеющееся на ней число. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнер?

1989.73. См. задачу 64.