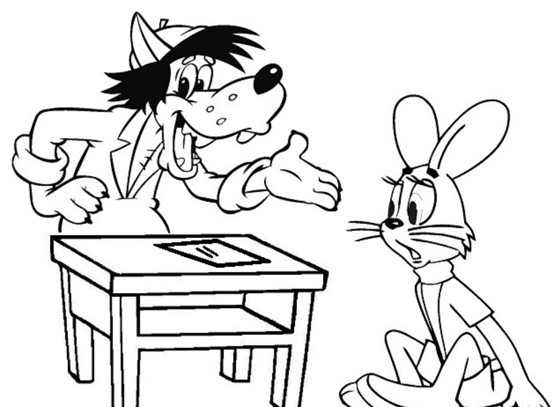
1990

6-й класс

1990.01. Петя купил общую тетрадь объемом 96 листов и пронумеровал все ее страницы по порядку числами от 1 до 192. Вася вырвал из этой тетради какие-то 25 листов и сложил все 50 чисел, которые на них написаны. Докажите, что у него не могла получиться сумма 1990.

1990.02. Имеется 101 монета. Среди них 100 одинаковых настоящих монет и одна фальшивая, отличающаяся от них по весу. Необходимо выяснить, легче или тяжелее фальшивая монета, чем настоящая. Как сделать это с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь?

1990.03. Можно ли прямоугольник размером 55×39 разрезать на прямоугольники размером 5×11?



1990.04. Волк и Заяц играют в следующую игру: на доске написано число, и ход состоит в том, чтобы вычесть из числа какую-либо его ненулевую цифру и написать получившееся число на месте старого. Ходят по очереди. Выигрывает тот, у кого получается ноль. На доске исходно написано число 1234. Первым ходит Волк. Кто выиграет при правильной игре?

1990.05. Петя, Коля и Вася решили 100 задач, причем каждый решил 60 задач. Назовем задачу “трудной”, если ее решил только один из мальчиков. Назовем задачу “легкой”, если ее решили все трое. Докажите, что “трудных” задач больше, чем “легких”, ровно на 20.

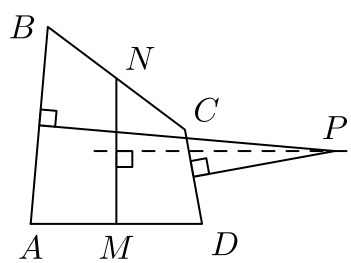
1990.06. В деревне Мартышкино у каждого мальчика все знакомые с ним девочки знакомы между собой. У каждой девочки среди ее знакомых количество мальчиков больше, чем количество девочек. Докажите, что в Мартышкино мальчиков живет не меньше, чем девочек.

7-й класс

1990.07. Джон и Мэри живут в небоскребе, на каждом этаже которого — по 10 квартир. Номер этажа Джона равен номеру квартиры Мэри, а сумма номеров их квартир равна 239. В какой квартире живет Джон?

1990.08. 30 стульев стоят в ряд. Время от времени подходит человек и садится на один из свободных стульев. При этом один из его соседей (если такие есть) встает и уходит. Какое максимальное число стульев может оказаться занятым, если сначала все они свободны?

1990.09. На экране компьютера — число 123. Компьютер каждую минуту прибавляет к числу на экране 102. Программист Федя в любой момент может изменить число на экране, переставив произвольным образом его цифры. Может ли Федя действовать так, чтобы на экране всегда оставалось трехзначное число?



1990.10. В четырехугольнике $ABCD$ $BC = AD$, M — середина AD, N — середина BC. Серединные перпендикуляры к AB и CD пересекаются в точке P. Докажите, что P лежит и на серединном перпендикуляре к отрезку MN.

1990.11. Квадрат 2×2 разрезан на прямоугольники. Докажите, что можно заштриховать несколько из них так, чтобы проекция заштрихованной фигуры на одну из сторон квадрата имела длину не меньше 1, а на другую — не больше 1.

1990.12. См. задачу 6.

1990.13. В некоторых клетках квадратной таблицы 50×50 расставлены числа $+1$ и -1 таким образом, что сумма всех чисел в таблице по абсолютной величине не превосходит 100. Докажите, что в некотором квадрате 25×25 сумма чисел по абсолютной величине не превосходит 25.

8-й класс

1990.14. Дима купил в магазине тетрадь объемом в 96 листов и пронумеровал по порядку все ее страницы числами от 1 до 192. Сережа вырвал из этой тетради 24 листа и сложил все написанные на этих листах 48 чисел. Могло ли у него получиться число 1990?

1990.15. См. задачу 10.

1990.16. Найдите все тройки натуральных чисел (a, b, c) такие, что

$$a^2 + b - c = 100, \quad a + b^2 - c = 124\,.$$

1990.17. В стране Далекой 101 город; города соединены дорогами с односторонним движением так, что любые два города соединены не более, чем одной дорогой. Известно также, что из любого города выходит ровно 40 дорог, и в любой город входит ровно 40 дорог. Докажите, что из каждого города в любой другой можно попасть, проехав не более, чем по трем дорогам.

1990.18. Среди 103 монет две фальшивые, отличающиеся по весу от настоящих. Известно, что все настоящие монеты весят одинаково, равно как и обе фальшивые. За три взвешивания на двухчашечных весах без гирь определите, что тяжелее: настоящая или фальшивая монета.

1990.19. На острове Логика каждый человек либо “лжец”, всегда говорящий неправду, либо “рыцарь”, всегда говорящий правду. Каждый островитянин произнес следующие две фразы:

а) все мои знакомые знакомы между собой;

б) среди моих знакомых лжецов не меньше, чем рыцарей.

Докажите, что на острове рыцарей не меньше, чем лжецов.

1990.20. Сколько существует пар натуральных чисел (m, n), таких что $m, n \leqslant 1000$ и

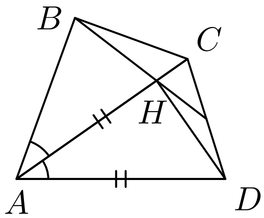
$$\frac{m}{n+1} < \sqrt{2} < \frac{m+1}{n}\ ?$$

9-й класс

1990.21. x и y — произвольные натуральные числа. Может ли число $x! + y!$ оканчиваться цифрами $\ldots 1990$?

1990.22. Существует ли треугольник, все длины сторон которого — целые числа, а длина одной из медиан равна единице?

1990.23. Докажите, что в любой арифметической прогрессии, члены которой — натуральные числа, есть два члена с одинаковой суммой цифр.



1990.24. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ угол B — прямой, а длина диагонали AC, являющейся биссектрисой угла A, равна длине стороны AD. В треугольнике ADC провели высоту DH. Докажите, что прямая BH делит отрезок CD пополам.

1990.25. Вещественные числа a, b и c лежат в отрезке $[0; 1]$. Докажите, что

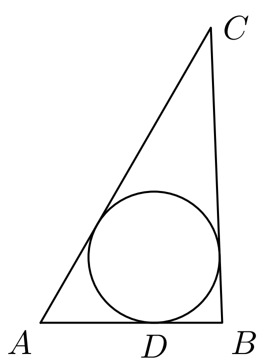
$$\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ac}+\frac{c}{1+ab}\leqslant 2\,.$$

1990.26. См. задачу 37 а) и б).

10, 11-е классы

1990.27. Найдите все решения системы уравнений:

$$\begin{cases} x^2+y^2=6z\\ y^2+z^2=6x\\ z^2+x^2=6y\,. \end{cases}$$



1990.28. Окружность, вписанная в треугольник ABC, делит его сторону AB на отрезки AD и DB с длинами 5 и 3 соответственно. Величина угла A равна 60°. Найдите длину стороны BC.

1990.29. См. задачу 23.

1990.30. См. задачу 22.

1990.31. Дано четыре различных натуральных числа. Докажите, что их удвоенное произведение больше, чем сумма всех попарных произведений этих чисел.

1990.32. Можно ли плоскость покрыть без наложения квадратами с длинами сторон 1, 2, 4, 8, 16, $\ldots$, если каждый квадрат разрешается использовать не более а) 10 раз?; б) 1 раза?

10-й класс (ФМШ)[1]

1990.33. Можно ли из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, использовав каждую по разу, составить шестизначное число, делящееся на 11?

1990.34. См. задачу 24.

1990.35. Дан многочлен F с целыми коэффициентами такой, что $F(2)$ делится на 5, а $F(5)$ делится на 2. Докажите, что $F(7)$ делится на 10.

1990.36. См. задачу 25.

1990.37. Клетчатая доска 10×10 покрыта n квадратиками 2×2, стороны которых идут по линиям сетки. Докажите, что один из квадратиков можно убрать так, что оставшиеся будут по-прежнему покрывать всю доску, если

а) $n = 55$;

б) $n = 45$.

в)* Постарайтесь найти как можно меньшее значение n, при котором утверждение задачи верно (естественно, в том случае, если формулировка осмысленна).

11-й класс (ФМШ)[2]

1990.38. См. задачу 33.

1990.39. См. задачу 24.

1990.40. См. задачу 35.

1990.41. Положительное вещественное число x таково, что

$$x^n = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1\,.$$

Докажите, что $2 > x > 2 - \frac{1}{n}$.

1990.42. Докажите, что пространство можно разбить на правильные октаэдры и тетраэдры с целыми длинами ребер так, чтобы среди них не нашлось десяти многогранников с одинаковыми длинами ребер.

[1] вариант для физ-мат школ

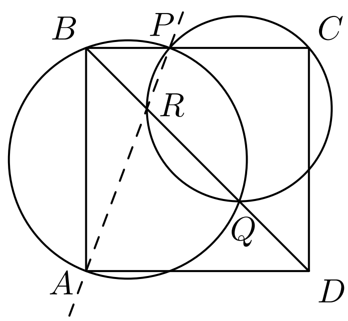
[2] вариант для физ-мат школ

Заключительный тур

9-й класс

1990.43. Натуральные числа a и b таковы, что $a^2 + ab + 1$ делится на $b^2 + ba + 1$. Докажите, что $a = b$.

1990.44. В отрезке находится несколько меньших отрезков, покрывающих его. Докажите, что левые половины этих отрезков покрывают не менее половины длины исходного отрезка.



1990.45. На стороне BC квадрата $ABCD$ взята произвольная точка P, через A, B и P проведена окружность, пересекающая диагональ BD еще раз в точке Q. Через C, P и Q проведена окружность, которая пересекается с BD еще раз в точке R. Докажите, что точки A, R и P лежат на одной прямой.

1990.46. Рассмотрим все возможные наборы чисел из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, не содержащие двух соседних чисел. Докажите, что сумма квадратов произведений чисел в этих наборах равна $(n + 1)! - 1$.

1990.47. Вершины вписанного четырехугольника $ABCD$ находятся в узлах сетки листа бумаги в клетку (с длиной стороны клетки 1). Известно, что $ABCD$ — не трапеция. Докажите, что $|AC \cdot AD - BC \cdot BD| \geqslant 1$.

1990.48. В государстве АБ, которое состоит из двух республик А и Б, любая дорога соединяет два города из разных республик. Известно, что из любого города выходит не более 10 дорог. Докажите, что на карте государства АБ каждую дорогу можно покрасить одним из 10 данных цветов так, чтобы любые две дороги, выходящие из одного города, были покрашены в разные цвета.

1990.49.* Хозяйка испекла для гостей пирог. За столом может оказаться либо p человек, либо q, где p и q взаимно просты. На какое минимальное количество кусков (не обязательно равных) нужно заранее разрезать пирог, чтобы в любом случае его можно было раздать поровну?

1990.50.* По окружности расставлено 20 чисел. Разрешается заменить тройку идущих подряд чисел x, y, z на тройку $x + y$, $-y$, $z + y$ (именно в таком порядке). Можно ли при помощи этих операций получить из набора

$$\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 9,\ 10,\ -1,\ -2,\ -3,\ \ldots,\ -9,\ -10\}$$

набор

$$\{10,\ 9, 8,\ \ldots,\ 2,\ 1,\ -10,\ -9,\ -8,\ \ldots,\ -2,\ -1\}$$

(числа указаны по ходу часовой стрелки)?

10-й класс

1990.51. См. задачу 43.

1990.52. См. задачу 44.

1990.53. См. задачу 45.

1990.54. Алеша и Сережа играют в следующую игру (первым ходит Алеша; ходы делаются поочередно). Каждый ход состоит в том, что игрок красит одно из еще не покрашенных полей доски 25×25, причем Алеша пользуется только белой краской, а Сережа — черной. Может ли Алеша независимо от того, как играет его партнер, добиться того, чтобы в конце игры (т.е. когда вся доска полностью покрашена) все белые поля можно было обойти королем (вставать на одно и то же поле несколько раз разрешается)?

1990.55. Вершины четырехугольника $ABCD$ находятся в узлах сетки листа бумаги в клетку (с длиной стороны клетки 1). Известно, что углы A и C в четырехугольнике равны, а углы B и D различны. Докажите, что $|AB \cdot BC - CD \cdot DA| \geqslant 1$.

1990.56.* На полке в беспорядке стоит 100-томное собрание сочинений Л.Н. Толстого. Разрешается взять любые два тома с номерами разной четности и поменять их местами. За какое минимальное число таких перестановок всегда можно расставить тома по порядку?

1990.57.* Дан многочлен $F(x)$ с целыми коэффициентами, причем известно, что $F(n)$ делится на одно из целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$ для любого целого n. Докажите, что из этих чисел можно выбрать одно число так, что для любого целого n значение $F(n)$ будет делиться на него.

1990.58.* В отрезке $[0; 1]$ отмечено 22 точки. Разрешается заменять любые две из этих точек на середину соединяющего их отрезка. Докажите, что выполнив 20 таких операций, можно добиться того, чтобы две оставшиеся точки находились на расстоянии, не превышающем $0,001$.

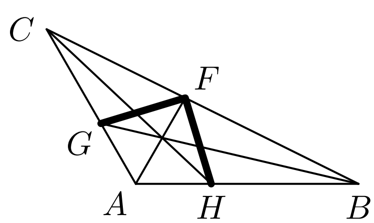
11-й класс

1990.59. Натуральные числа a и n больше единицы. Докажите, что количество натуральных чисел, меньших числа $a^n - 1$ и взаимно простых с ним, делится на n.

1990.60. В отрезке находится несколько меньших отрезков, покрывающих его. У каждого из них отбросили половину: левую или правую. Докажите, что оставшиеся половины покрывают не менее трети длины исходного отрезка.

1990.61. Существует ли на плоскости шестиугольник (возможно, невыпуклый), все диагонали которого, кроме одной, равны по длине?

1990.62. У клетчатой доски 100×100 склеили верхний край с нижним, а также правый край с левым, после чего доска приобрела вид “бублика”. Можно ли в ее клетках расставить 50 ладей — красных, синих и зеленых — так, чтобы каждая красная ладья била не менее двух синих, каждая синяя — не менее двух зеленых, и каждая зеленая — не менее двух красных ладей?



1990.63. В треугольнике ABC, величина угла A которого равна $120°$, провели биссектрисы AF, BG и CH. Докажите, что угол GFH — прямой.

1990.64.* В королевстве Олимпия 100 городов, и каждые два из них соединены ровно одной дорогой с односторонним движением. Выяснилось, что не из каждого города можно проехать в любой другой с соблюдением правил движения. Докажите, что король может выбрать один из городов и, изменив направления всех дорог, входящих и выходящих из него, добиться того, чтобы из каждого города в каждый можно было проехать с соблюдением правил движения.

1990.65. Непрерывная функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такова, что для любого вещественного x выполняется равенство $f(x + f(x)) = f(x)$. Докажите, что функция f постоянна.

1990.66.* По окружности расставлено несколько чисел, сумма которых положительна. Разрешается заменить тройку идущих подряд чисел x, y, z на тройку $x+y$, $-y$, $z+y$ (именно в таком порядке). Докажите, что при помощи этих операций из данного набора чисел можно получить ровно один набор, состоящий только из неотрицательных чисел.