Кратко о Санкт-Петербургской олимпиаде

Санкт-Петербургская (Ленинградская) городская олимпиада не является старейшим математическим соревнованием для школьников[1], хотя, судя по всему, она — самая старая **городская** математическая **олимпиада** школьников. Заключительный тур первой ленинградской олимпиады состоялся 18 апреля 1934 г. (см. [52]) — а буквально через несколько месяцев, в июне того же года, была проведена городская математическая олимпиада в Тбилиси (см. [47]).

Борис Делоне, Григорий Фихтенгольц, Владимир Смирнов, Владимир Тартаковский, Дмитрий Фаддеев, Онуфрий Житомирский — "отцы-основатели" Ленинградской Математической Олимпиады

Это замечательное соревнование было придумано и организовано усилиями выдающихся ленинградских математиков Б.Н. Делоне и Г.М. Фихтенгольца при поддержке и участии В.И. Смирнова, В.А. Тартаковского,

[1] Таковым, видимо, является Венгерский математический конкурс Этвёша-Кюршака, который был впервые проведён в 1894 году

О.К. Житомирского и Д.К. Фаддеева. Идея оказалась настолько успешной и популярной, что в следующем году (при активном участии Б.Н. Делоне, переехавшего в Москву в январе 1935 года) была проведена и первая Московская математическая олимпиада школьников. Стоит упомянуть, что уже через два года и в Ленинграде и в Москве были опубликованы первые в стране сборники задач для подготовки к математическим олимпиадам [1] и [24].

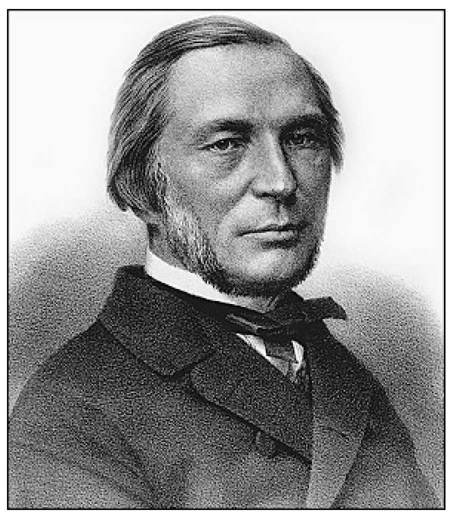
Здесь нам хотелось бы кратко напомнить читателям о том, какую роль Санкт-Петербург сыграл в становлении российской науки вообще и математики в частности. Началось всё, конечно же, с того, что в 1724 году император Пётр Первый основал в Санкт-Петербурге первую российскую академию наук.

Петербургская академия наук. Гравюра XIX века

В первые же годы в неё были приглашены такие великолепные математики как братья Николай и Даниил Бернулли, а также Христиан Гольдбах. Последний вошёл в историю математики в основном благодаря знаменитой **проблеме Гольдбаха** в теории чисел. Однако он также стал первым в истории России математиком-криптографом и помимо звания академика мог похвалиться тем, что многие годы являлся тайным советником Коллегии иностранных дел и сотрудником так называемого “чёрного кабинета”. Братья Бернулли были знамениты, в частности, своими исследованиями в области дифференциальных уравнений, в механике и гидродинамике. Даниил Бернулли стал одним из основателей математической физики, но при этом он увлекался также и вопросами теории вероятностей, посвятив одну из своих работ так называемому **Санкт-Петербургскому парадоксу**, названному в честь нашего города.

Но, безусловно, никто в XVIII веке не сделал столько для российской и мировой математики, как друг и коллега этих замечательных учёных, один из гигантов современной математики Леонард Эйлер, который провёл в Петербурге более тридцати лет своей фантастически продуктивной жизни. Достаточно будет сказать, что Эйлер занимался не только математикой, но и механикой, физикой, астрономией, химией и географией. Он написал два десятка фундаментальных монографий и опубликовал около 850 работ, охвативших такие разнообразные области математики, как математический анализ и теория функций, дифференциальные уравнения, приближённые вычисления, классическая и дифференциальная геометрия, комбинаторика и теория графов. Влияние, оказанное им на математику той эпохи, практически невозможно переоценить.

Леонард Эйлер



Пафнутий Чебышёв

В течение XIX века в северной столице работали такие выдающиеся российские математики как Михаил Остроградский и Виктор Буняковский, а затем и наиболее выдающийся российский математик своего времени Пафнутий Чебышёв, который, вместе со своими многочисленными учениками, заложил основы петербургской математической школы. Интересно, что помимо теории чисел (чего стоит одно лишь доказательство **постулата Бертрана**), теории вероятностей и теории приближённых вычислений (знаменитые **многочлены Чебышёва**) П. Л. Чебышёв очень много времени посвятил инженерной деятельности, создав массу разнообразных механизмов, включая инвалидную коляску и первый в мире арифмометр непрерывного действия.

А вот перечислять и оценивать знаменитых петербургских и ленинградских математиков XX века мы не будем — их количество уже столь велико, что нам пришлось бы посвятить их именам и научным достижениям все остальные страницы этой книги.

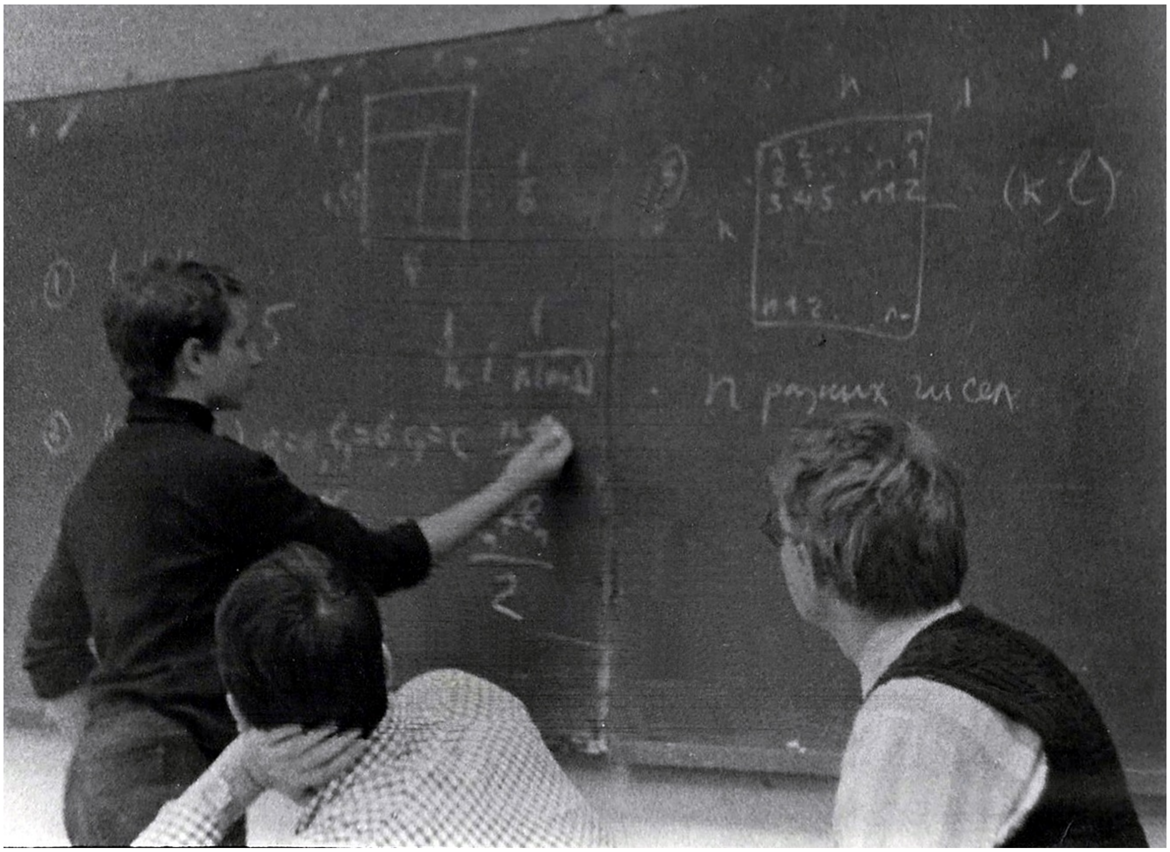
* * *

Вернёмся к теме нашего сборника — то есть к математическим соревнованиях. Успехи ленинградских и петербургских школьников на математических олимпиадах самого высокого уровня вызвали естественный интерес; поэтому мы попробуем здесь кратко проанализировать причины этого феномена.

Наиболее очевидная и определяющая причина — система внеклассного математического образования, фундамент которой был заложен в Ленинграде в 1930-е годы. Эта система, с некоторыми изменениями, функционирует в нашем городе до сих пор; именно ей питерские школьники и обязаны своими успехами в многочисленных всероссийских и международных соревнованиях. Она состояла из нескольких компонент, которые мы попробуем сейчас перечислить.

Первая и, пожалуй, первичная компонента — это ставшие впоследствии чрезвычайно распространёнными и популярными *математические кружки*. Их вели молодые преподаватели, аспиранты и студенты математико-механического факультета (мат-меха) ленинградского университета. Исходная идея состояла в проведении еженедельных семинаров по внешкольной математике для одарённых ребят, которые хотели начать изучение высшей математики ещё до поступления в университет или в другие учебные заведения. Сначала семинары были организованы в стиле университетских лекций, где преподаватели рассказывали о какой-то области элементарной математики или разбирали решение интересной задачи. Вскоре, однако, стало ясно, что лекции надо прерывать на вопросы, ответы, обсуждение альтернативных идей, ошибок и т. д. В результате занятия кружков постепенно приняли ту интерактивную форму, которая и по сей день является наиболее эффективной и популярной для подобных занятий.

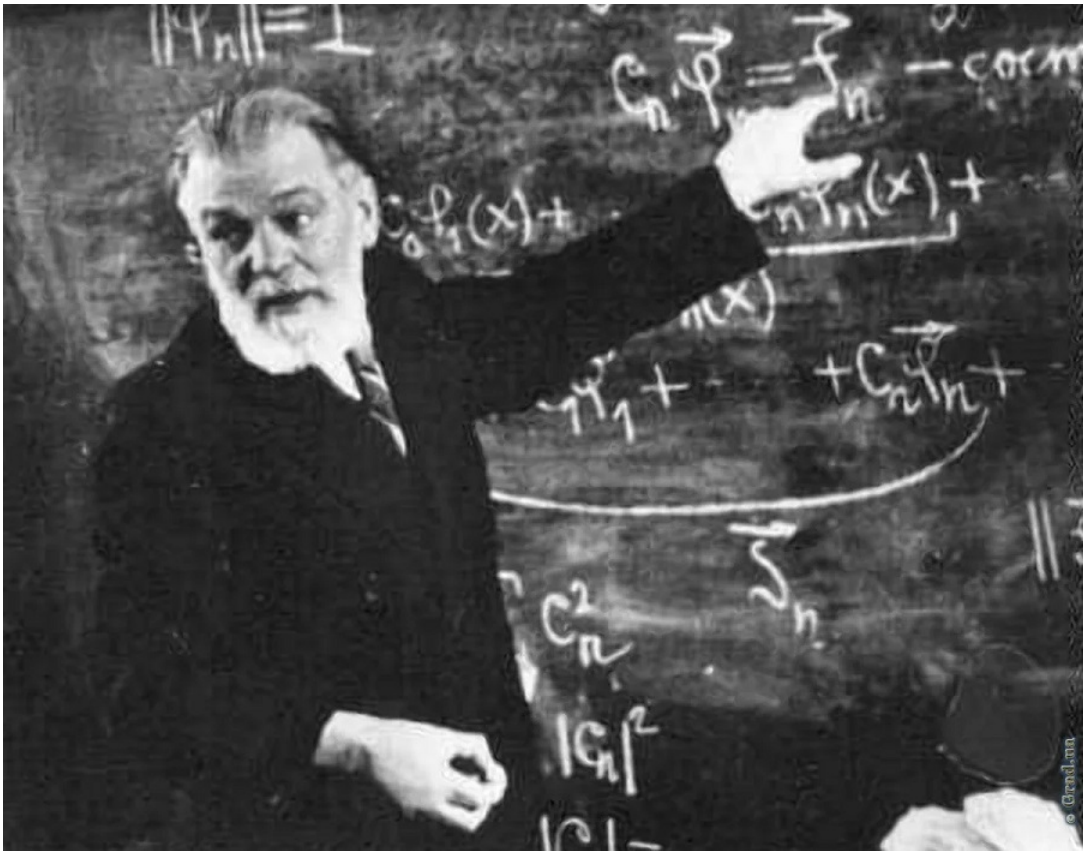
После окончания Великой Отечественной Войны кружки постепенно восстановили свою работу. За последовавшие сорок лет они последовательно разрослись до такой степени, что практически любой городской школьник от пятого класса и старше, заинтересованный в расширении своего математического кругозора, мог найти нужный ему кружок — зачастую даже в пределах своего района.



Занятие кружка Юношеской Математической Школы при ЛГУ (1986)

Примерно до середины 1960-х годов занятиям кружкам сопутствовали лекции так называемого математического лектория. Их читали профессора и доценты мат-меха, и каждая лекция была посвящена какой-то конкретной небольшой области математики, которая была достаточно элементарна для понимания старшеклассниками, но при этом могла быть исследована в направлении высшей абстрактной математики.

Второй компонентой стали многочисленные учителя-энтузиасты, кто организовывал в своих школах так называемые факультативы. Обычно они были посвящены темам стандартного школьного курса алгебры или геометрии, или решению конкурсных задач. В любом случае, такие факультативы давали сообразительным ребятам возможность увидеть, что математика есть нечто большее, чем решение однообразных уравнений или затверживание никак не связанных между собой определений и фактов про тригонометрические функции, геометрические фигуры или многочлены.



Лекцию читает профессор Г. М. Фихтенгольц (1950-е гг.)

Третья компонента появилась в начале 1960-х годов, когда были созданы специализированные физико-математические школы. Спрос на квалифицированных математиков, физиков, химиков к тому моменту был настолько велик, что необходимость расширения и улучшения школьного преподавания всех естественных наук стала очевидна. Такие школы создавались по всей стране, и конечно же, Ленинград не остался в стороне. Почти десяток городских школ были переведены на такое специализированное обучение, и ещё одна новая школа (физико-математический интернат № 45) была организована преподавателями мат-меха ЛГУ. Наиболее успешными стали школы так называемой "большой тройки" — школы № 30, № 45 и № 239, в которые поступали наиболее подготовленные и заинтересованные школьники.

Четвёртой компонентой стали разнообразные математические соревнования — наиболее интересным и престижным из них была, конечно, Ленинградская (впоследствии Санкт-Петербургская) городская олимпиада.

Затем появились многочисленные конкурсы, проводившиеся и вузами и физико-математическими школами, и даже некоторыми городскими газетами. Были и другие факторы, внесшие свой важный вклад в систему внеклассного научного образования, но в рамках данного предисловия мы не будем погружаться в столь детализированное изучение этого вопроса.[2]

Результатом всего этого стал настоящий “просветительский взрыв”, произошедший в физико-математическом сообществе Ленинграда. Порождённая им волна захватила и увлекла десятки тысяч школьников Ленинграда, которые с энтузиазмом погрузились в исследование захватывающих тайн современной науки. На данный момент практически все работающие профессиональные математики, получившие школьное образование в Ленинграде (Петербурге), были “инициированы” в высокую науку через кружки и олимпиады нашего города[3].

Чтобы продемонстрировать конкретные достижения ленинградских и петербургских школьников в официальных математических соревнованиях, мы приведём здесь несколько любопытных цифр, касающихся их участия в Международных математических олимпиадах (ММО) в 1962–2021 годах (то есть на протяжении шестидесяти лет).

1) Во всех командах СССР или России, за исключением лишь двух годов (1977 и 1981) был хотя бы один школьник из Ленинграда (Петербурга);
2) Семнадцать раз — включая феноменальный интервал длиной в **одиннадцать** лет с 1987 по 1997 год — **по крайней мере половина** команды СССР (России) на ММО состояла из школьников северной столицы; в 1995 году был установлен своеобразный рекорд: пятеро из шести (!) российских участников ММО были петербуржцами;
3) Первым советским школьником, принявшим участие в трёх ММО (результат: три золотые медали), стал ученик ленинградской школы № 239 **Сергей Иванов**; через два года это достижение было повторено ученицей той же школы **Женей Малинниковой**, которая стала первой девушкой, трижды поехавшей на ММО[4];

[2] Некоторые из этих факторов описаны в предисловии к книге [33].

[3] Вполне возможно, что очень редкие исключения и существуют, но авторам о них не известно.

[4] Отметим, что и Сергей Иванов и Евгения Малинникова впоследствии стали профессиональными математиками высочайшего уровня.

4) В итоге за эти годы на **58** международных олимпиадах питерские школьники заняли **128** из **386** мест в советской (российской) национальной сборной.

Чтобы читателям было немного проще представить себе масштабность этих “спортивных” достижений, укажем, что в 1992–2021 годах в Санкт-Петербурге жило примерно **4** % населения Российской Федерации; при этом наш город занимал почти **40** % мест в командах России на ММО. Соответственно, в советскую эпоху (1962–1991), население Ленинграда равнялось примерно **1.8** % населения Советского Союза, а доля ленинградских школьников в командах СССР составила **28** %.

Команда России на ММО-1995; пять (!) участников из Петербурга — Дмитрий Запорожец (2), Сергей Норин (3), Вероника Есаулова (4), Илья Кацев (5), Дмитрий Челкак (6) (нумерация слева направо)

За прошедшие с тех пор годы очень многое менялось в структуре олимпиады, равно как и в системе её проведения, не говоря уже о характере самих задач. Неизменным оставалось только одно, определяющее для Ленинградской (Санкт-Петербургской) математической городской олимпиады, свойство: она всегда была *устной.*

Традиция устной олимпиады — сугубо ленинградско-петербургский феномен. Произошло это в силу того, что уже существовавшая к тому времени система работы в математических кружках (которая, в свою очередь, была основана на университетской традиции устных экзаменов) была естественным образом перенесена на олимпиаду. Занятия в кружках проводились, конечно, устно (лекции, доклады, решение задач, активное обсуждение и обмен мнениями), что и привело к идее проведения олимпиады в аналогичной форме. Надо сказать, что созданная ещё до войны и затем постепенно расширявшаяся сеть кружков и школьных факультативов оказала огромное влияние на всё математическое образование в Ленинграде (Санкт-Петербурге) и, в частности, на олимпиаду школьников.

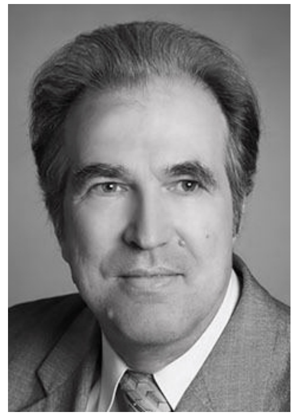
Другой отличительной чертой Санкт-Петербургской олимпиады по математике является новизна предлагаемых на ней задач. Эти задачи не извлекаются из старых и хорошо забытых книг или вариантов олимпиад двадцатилетней давности. Для каждого тура жюри старается подобрать новые, нигде ранее не встречавшиеся задачи. И обычно это удаётся. Члены жюри придумывают задачи специально для олимпиады и “обкатывают” их на своих коллегах. Задача, которая, по мнению хотя бы одного члена жюри, известна или встречалась где-либо в книгах или на каких-либо математических соревнованиях, безжалостно вычеркивается из списков. Многие провинциальные олимпиады нашей страны, турниры и фестивали юных математиков и другие соревнования используют в своей работе материалы Санкт-Петербургской олимпиады по математике. Причина проста: организаторы этих олимпиад видят в материалах нашей олимпиады не только коллекцию оригинальных задач, но и объективный показатель уровня современной математической олимпиады. В этом смысле Санкт-Петербургская олимпиада является одним из “законодателей мод” в олимпиадном движении нашей страны.

Хотя математические олимпиады и стали очень распространенным явлением, но как модели лучших кутюрье, показываемые на демонстрациях мод, мало подходят для повседневной носки, так и задачи последних туров нашей олимпиады далеки от уровня школьной контрольной работы. При работе с этой книгой обязательно следует учитывать, что задачи второго и отборочного туров рассчитаны на самых одарённых школьников сильнейшего в олимпиадном отношении города России, а уровень олимпиады

239-й школы (см. параграф “Дополнительные задачи”) ещё выше.

* * *

За тридцать лет, прошедших с того дня, когда наш город опять стал Санкт-Петербургом, жюри городской олимпиады по математике возглавляли два известных российских математика — А.С. Меркурьев[5] (1992–2001) и Ю.А. Матиясевич (2002–2021).



Александр Меркурьев и Юрий Матиясевич — председатели жюри Санкт-Петербургской математической олимпиады

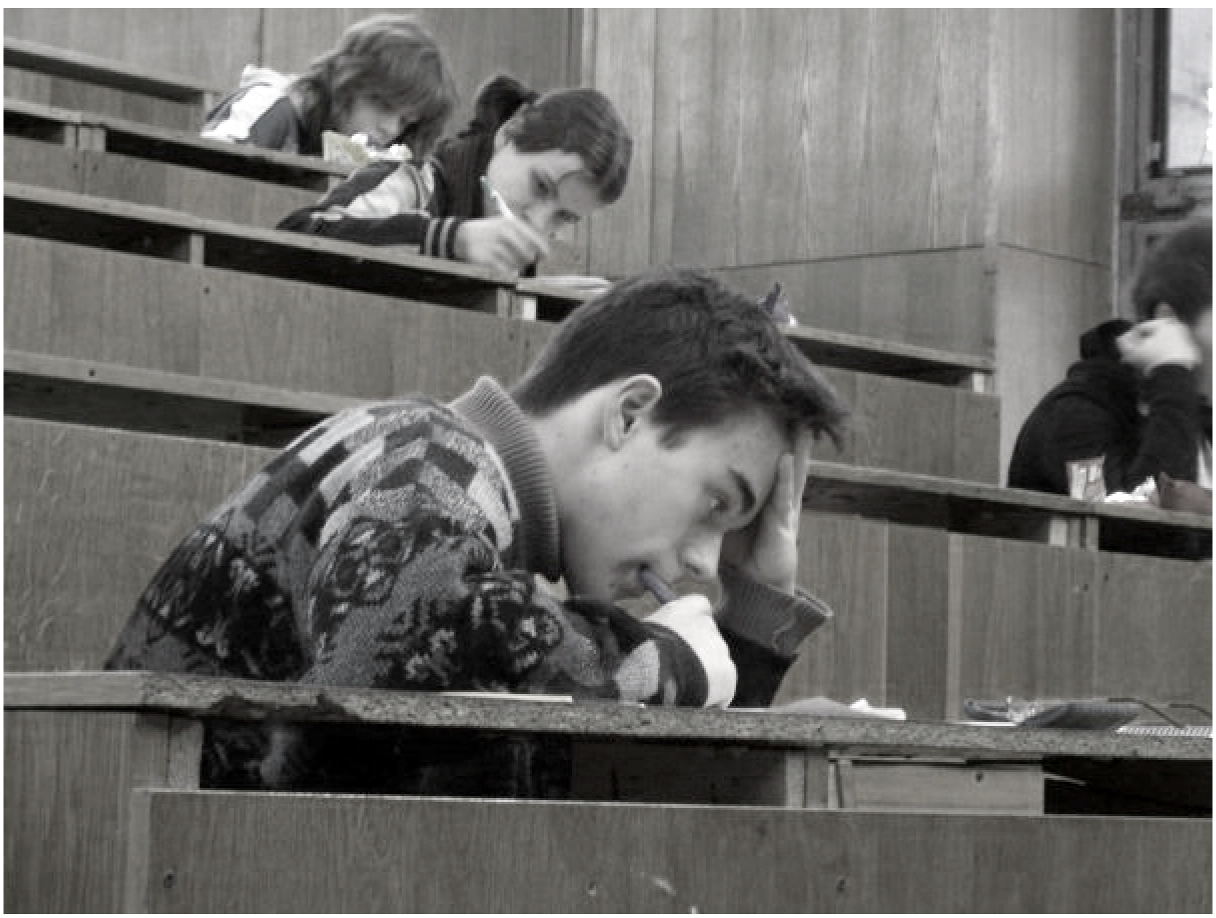
Ответственными секретарями жюри СПбМО в эти годы были Д.В. Фомин[5] (1992–1994), К.П. Кохась (1994–2010) и Д.А. Ростовский (2010–2021).

Дмитрий Фомин, Константин Кохась, Дмитрий Ростовский — секретари жюри Санкт-Петербургской математической олимпиады

До 2008 года Санкт-Петербургская олимпиада по математике состоя-

[5] А.С. Меркурьев возглавлял жюри городской олимпиады с 1981 года, а Д.В. Фомин выполнял обязанности секретаря жюри с 1986 года.

ла из трёх туров. Первый (**районный**) тур проводится одновременно во всех районах города по задачам, составленным жюри городской олимпиады. Организацией этого тура занимаются работники районных методических кабинетов. Это, даже по меркам многомиллионного города, массовая олимпиада — в ней участвует 10–15 тысяч школьников 6–11 классов. По результатам первого тура определяется состав участников следующего, второго (**городского**) тура, в котором участвуют примерно 100 школьников от каждого класса. Этот этап, проходящий в Российском государственном педагогическом университете им. А. И. Герцена (6–8 классы) и в Санкт-Петербургском государственном университете (9–11 классы), определяет победителей Санкт-Петербургской городской олимпиады.



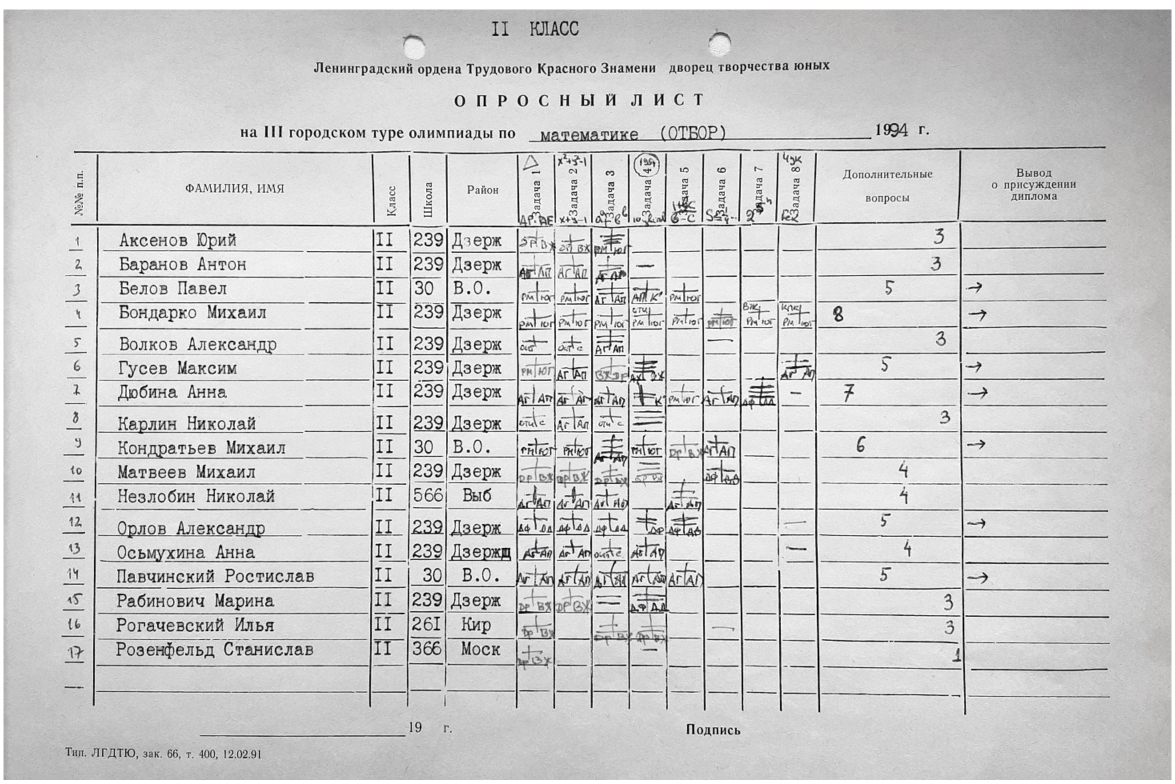
Не так-то это просто ... “Выводная” аудитория 11 класса на СПбМО-2008; на переднем ряду — Вячеслав Соколов, победитель олимпиады 10 класса

Третий (**отборочный**) тур служит только для формирования команды города на Всероссийскую олимпиаду. На него приглашаются школьники

9–11 классов, хорошо выступившие на втором туре — обычно от пятнадцати до тридцати участников по каждому классу.

Первый тур Санкт-Петербургской олимпиады — письменный, и длится он три часа. Задачи этого этапа подбираются так, чтобы их могло решить много участников, для решения было достаточно знаний школьной программы, а сами решения можно было бы сравнительно просто записать.

Второй и отборочный туры С.-Петербургской олимпиады по математике, — **УСТНЫЕ**. Слово *устная* не означает, что школьники должны решать задачи в уме. "Устность" олимпиады состоит лишь в способе изложения решения. Если участник решает задачу, то он должен рассказать решение одному из многочисленных членов жюри. Таким образом, школьники могут, не затрачивая времени на тщательную запись решений, поговорить с квалифицированным математиком, понять, что такое доказательство или контрпример, использовать в своих решениях сложные, труднообъяснимые построения, получить возможность исправить свое решение прямо во время изложения — тут, конечно, тоже бывают промахи.



II КЛАСС

Ленинградский ордена Трудового Красного Знамени дворец творчества юных

ОПРОСНЫЙ ЛИСТ

на III городском туре олимпиады по математике (ОТБОР) 1994 г.

№№ п.п.	ФАМИЛИЯ, ИМЯ	Класс	Школа	Район	Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Задача 7	Задача 8	Дополнительные вопросы	Вывод о присуждении диплома
1	Аксенов Юрий	II	239	Дзерж									3	
2	Баранов Антон	II	239	Дзерж									3	
3	Белов Павел	II	30	В.О.									5	→
4	Бондарко Михаил	II	239	Дзерж									8	→
5	Волков Александр	II	239	Дзерж									3	
6	Гусев Максим	II	239	Дзерж									5	→
7	Дюбина Анна	II	239	Дзерж									7	→
8	Карлин Николай	II	239	Дзерж									3	
9	Кондратьев Михаил	II	30	В.О.									6	→
10	Матвеев Михаил	II	239	Дзерж									4	
11	Незлобин Николай	II	566	Выб									4	
12	Орлов Александр	II	239	Дзерж									5	→
13	Осьмухина Анна	II	239	Дзерж									4	
14	Павчинский Ростислав	II	30	В.О.									5	→
15	Рабинович Марина	II	239	Дзерж									3	
16	Рогачевский Илья	II	261	Кир									3	
17	Розенфельд Станислав	II	366	Моск									1	

19 г. Подпись

Тип. ЛГДТЮ, зак. 66, т. 400, 12.02.91

Протокол отбора-1994.

Обычно, если ошибка не очень существенна, то отвечающий успевает закрыть брешь в решении в течение небольшого промежутка времени (порядка одной минуты). Если же ошибку исправить не удалось, в протокол ставится минус, но право рассказывать решение какой-либо задачи школьник теряет только тогда, когда у него появится третий минус по этой задаче. Количество минусов у участника не учитывается при подведении итогов. В отличие от письменных олимпиад, возможны только два вида результатов по каждой задаче: "решена" или "не решена". Полезные соображения, неполные решения, и т. п. не засчитываются.

В начале второго тура участники получают условия четырёх задач варианта (из семи; в шестом классе — из шести). Тех, кто в течение трёх часов сумел решить три задачи (в шестом классе, или в случае, если вариант оказался слишком сложным — две задачи), переводят в другую аудиторию (так называемый *вывод*), где им дают условия остальных задач и ещё один час времени.

На отборочном туре участники получают сразу все 8 задач варианта. Длительность олимпиады — 5 часов.

Команда Санкт-Петербурга на Межреспубликанскую (СНГ) олимпиаду школьников по математике 1992 года.

К сожалению, в 2008 году система Всероссийской олимпиады (составной частью которой является Санкт-Петербургская олимпиада школьников) была реорганизована.[6] Поэтому, начиная с 2009 года, команда Санкт-Петербурга на Всероссийскую олимпиаду стала определяться по результатам так называемого регионального тура. Задачи этого этапа подготавливаются центральной комиссией и представляют собой единый вариант, предлагаемый школьникам одновременно во всех регионах Российской Федерации. Участие в региональном туре определяется по итогам первого тура местной олимпиады.

После такой реорганизации и второй (городской) и третий (отборочный) туры СПбМО превратились в "тупиковые" соревнования. С тяжёлым сердцем оргкомитет Санкт-Петербургской олимпиады принял решение полностью отменить отборочный тур (за его полной ненадобностью в рамках новой системы), сохраняя при этом второй тур — теперь именно по его итогам школьникам вручаются дипломы победителей СПбМО. Другая причина именно такого решения состояла в желании спасти важнейшую историческую традицию Санкт-Петербурга, **устную** городскую олимпиаду по математике.

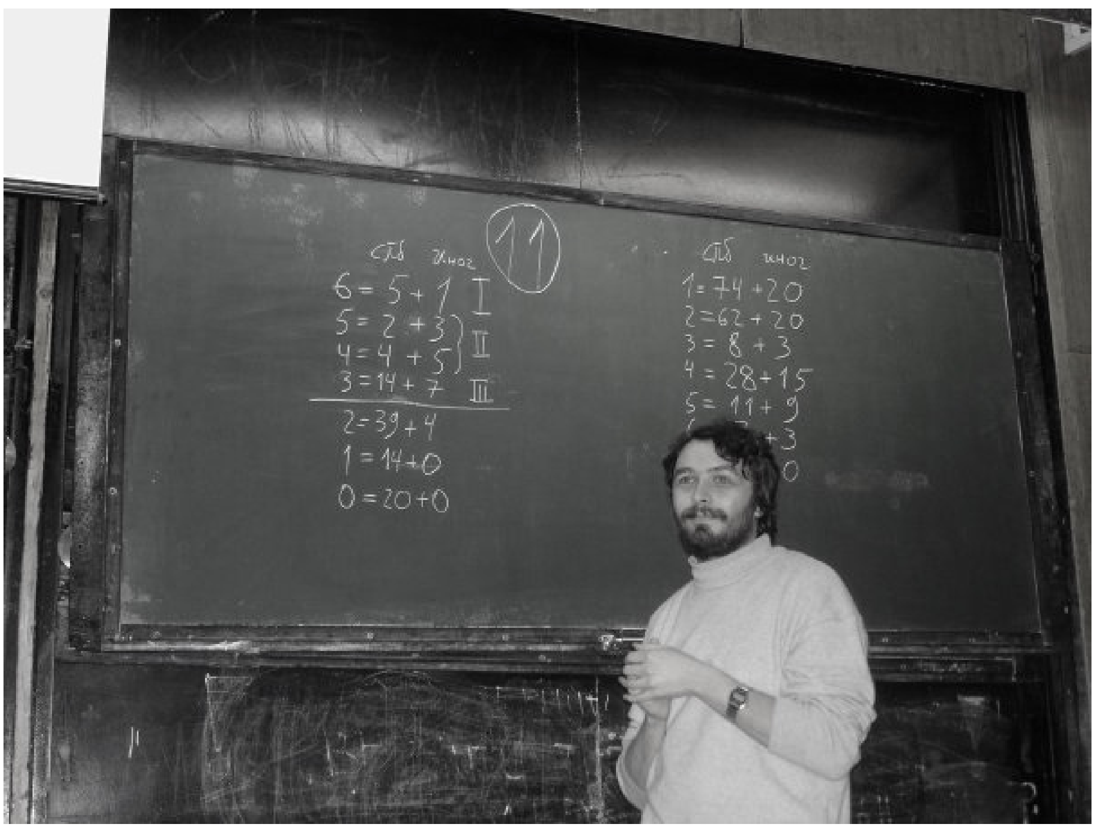
Отметим, что не все предлагаемые в этой книге решения задач удовлетворяют требованиям членов жюри, проверяющих работы первого тура. Если бы авторы этого сборника написали такие решения в настоящей олимпиадной работе, им, возможно, не удалось бы пройти на следующий тур — см., например, решение задачи **2000.02**. Мы надеемся, однако, что для человека, читающего эту книгу, главная цель — не "вывести авторов на чистую воду", а познакомиться с новыми идеями и приемами, удовлетворить любопытство, чему-нибудь научиться или, в крайнем случае, получить сеанс шоковой терапии.

Различные пропуски и/или умолчания, встречающиеся в решениях, рассчитаны на вдумчивого читателя. В отличие от участника олимпиады, авторы данного издания вправе рассчитывать на присутствие у читателя некоторого интеллекта и естественного желания самому заполнить не так уж и редко встречающиеся "дырки" в решениях. Кроме того, опущенные детали часто неинтересны, а идея решения при таком сокращении становится более понятной.

Надо сказать, что умение решать задачи и способность записывать решение — это совершенно разные вещи. Многие школьники, вероятно, почувствовали это уже на первом туре. Очень часто жюри, хотя и с большой неохотой, вынуждено установить критерий прохода на второй тур по схе-

[6] Мы пишем здесь "к сожалению" по той простой причине, что на наш взгляд никаких положительных изменений ни для Санкт-Петербурга, ни для России в целом, эта реформа не принесла.

ме “более двух задач”, что означает “две задачи и полезные соображения по одной из оставшихся”. “Полезными соображениями” могут быть правильный (но без необходимых пояснений) ответ, разбор одного из нескольких случаев, очень неряшливо написанное решение — математически неряшливое, а не в смысле почерка. (Неразборчиво или небрежно написанную работу члены жюри стараются оценить объективно, потому что по себе знают, что способности к математике и хороший почерк — качества вполне независимые.) Какое из соображений следует считать полезным, а какое нет — жюри обсуждает это на заседании по подведению итогов олимпиады, и окончательная формулировка может быть, опять-таки, довольно расплывчатой. Таким образом, необходимость чётко излагать свои мысли на бумаге является характерной особенностью письменной олимпиады и, как нам кажется, одним из основных недостатков письменных олимпиад вообще, особенно в младших классах.



Олимпиада 2008 года, заседание жюри. Докладывает старший по 11 классу А. И. Храбров

Читателям, которых интересует более подробная история Ленинградской городской олимпиады школьников по математике, мы очень рекомендуем прочесть главу

"Исторический Очерк" **из книги [19]. Эту книжку (или её электронную версию) можно купить в магазине издательства МЦНМО.**

Литература

Санкт-Петербургские математические олимпиады

[1] *Задачи, предлагавшиеся на 1-й и 2-й арифметических олимпиадах.* Л. (**1936**)

[2] Макеев В. В., Фомин Д. В. *Задачи Санкт-Петербургской городской олимпиады по математике. 1992 год.* СПб.: Изд-во СПбГУ (**1992**)

[3] Кохась К. П., Фомин Д. В. *Задачи Санкт-Петербургской городской олимпиады по математике. 1993 год.* СПб.: Изд-во СПбГУ (**1993**)

[4] Кириченко А. Л., Фомин Д. В. *Ленинградские математические олимпиады (1990–91 гг.).* СПб.: Изд-во СПбГДТЮ (**1993**)

[5] D.V.Fomin, A.L.Kirichenko *Leningrad Mathematical Olympiads. 1987–1991.* Westford: MathPro Press (**1993**)

[6] Фомин Д. В. *Санкт-Петербургские математические олимпиады.* СПб.: Политехника (**1994**)

[7] Берлов С. Л., Иванов С. И., Карпов Д. В. и др. *Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике 2000 года.* СПб.: Изд-во СПбГУ (**2000**)

[8] Рукшин С. Е. *Математические соревнования в Ленинграде — Санкт-Петербурге.* Ростов-на-Дону: изд. центр МарТ (**2000**)

[9] Берлов С. Л., Иванов С. И., Карпов Д. В. и др. *Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике.* СПб.: Изд-во СПбГУ (**2001**)

[10] Кохась К. П., Иванов С. В., Берлов С. Л. и др. *Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике.* СПб.: Невский диалект (**2002**)

[11] Кохась К. П., Иванов С. В., Храбров А. И. и др. *Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике 2003 года.* СПб.: Невский диалект; БХВ-Петербург (**2003**)

[12] Берлов С. Л., Иванов С. И., Кохась К. П. *Петербургские математические олимпиады. (1994–99 гг.)* СПб.–М.–Краснодар: Лань (**2004**)

[13] Кохась К. П., Храбров А. И., Берлов С. Л. и др. *Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике 2004 года.* СПб.: Невский диалект; БХВ-Петербург (**2004**)

[14] Кохась К. П., Фомин Д. В. и др. *Петербургские математические олимпиады, 1961–1993.* СПб.: Лань (**2005**)

[15] Кохась К. П., Храбров А. И., Берлов С. Л. и др. *Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике 2005 года.* СПб.: Невский диалект; БХВ-Петербург (**2005**)

[16] Храбров А. И., Иванов С. В., Берлов С. Л. и др. *Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике 2006 года.* СПб.: Невский диалект; БХВ-Петербург (**2006**)

[17] Петров Ф. В., Кохась К. П., Берлов С. Л. и др. *Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике 2007 года.* СПб.: Невский диалект; БХВ-Петербург (**2007**)

[18] Берлов С. Л., Кохась К. П., Храбров А. И. и др. *Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике 2008 года.* СПб.: Невский диалект; БХВ-Петербург (**2008**)

[19] Фомин Д. В., Кохась К. П. *Ленинградские Математические Олимпиады. 1961–1991.* М.: МЦНМО (**2022**)

Популярная математика, сборники задач и др.

[20] Айерленд К., Роузен М. *Классическое введение в современную теорию чисел.* М.: Мир (**1987**)

[21] Балк М. Б. *Геометрические приложения понятия о центре тяжести.* М.: Физматгиз (**1959**)

[22] Бизам Д., Герцег Я. *Игра и логика.* М.: Мир (**1975**)

[23] Бизам Д., Герцег Я. *Многоцветная логика.* М.: Мир (**1978**)

[24] Бончковский Р. Н. *Московские математические олимпиады 1935 и 1936 гг.* М.–Л.: ОНТИ (**1936**)

[25] Бухштаб А. А. *Теория чисел.* М., Просвещение (**1966**)

[26] Ван-дер-Варден, Б. Л. *Алгебра.* М.: Мир (**1976**)

[27] Воробьёв Н. Н. *Числа Фибоначчи.* М.: Наука (**1984**)

[28] Fomin D. V., Kirichenko A. L. *Leningrad Mathematical Olympiads.* Mathematics Competitions. . Vol. 5. No. 1. (**1992**)

[29] Guy R. *Unsolved problems in Number Theory.* Third Edition. Springer-Verlag, New York (**2004**)

[30] Гарднер М. *Математические головоломки и развлечения.* М.: Мир (**1971**)

[31] Гарднер М. *Математические досуги.* М.: Мир (**1972**)

[32] Гарднер М. *Математические новеллы.* М.: Мир (**1974**)

[33] Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В. *Ленинградские математические кружки.* М: МЦНМО (**2021**)

[34] Гильберт Д., Кон-Фоссен С. *Наглядная геометрия.* М: Наука (**1981**)

[35] Голомб С. *Полимино.* М: Мир (**1975**)

[36] Elkies N., Kuperberg G., Larsen M., Propp J. *Alternating sign matrices and domino tilings.* I. J. Algebraic Combin. Vol. 1., pp. 111–132 (**1992**)

[37] Коксетер Г., Грейтцер С *Новые встречи с геометрией.* М.: Наука (**1978**)

[38] Курант Р., Роббинс Г. *Что такое математика?* М.: Просвещение (**1968**)

[39] Кэрролл Л. *История с узелками.* М.: Мир (**1985**)

[40] Кюршак Й., Нейкомм Д., Хайоги Д., Шурани Я. *Венгерские математические олимпиады.* М.: Мир (**1976**)

[41] Леман А. А. *Сборник задач московских математических олимпиад.* М.: Просвещение (**1965**)

[42] Оре, О. *Теория графов.* М: Гл. ред. физ-мат. лит. (**1980**)

[43] Оре, О. *Приглашение в теорию чисел.* М: Едиториал УРСС (**2003**)

[44] Оре, О. *Графы и их применение.* М: Едиториал УРСС (**2015**)

[45] Прасолов В. В. *Задачи по планиметрии.* М.: МЦНМО (**2001**)

[46] Радемахер Г., Теплиц О. *Числа и фигуры.* М.: Физматгиз (**1962**)

[47] Розов Н. Х. *Традиции математической олимпиады в Грузии.* Матем.просвещение, серия 3, **15**, М.: Изд-во МЦНМО (**2011**)

[48] Сачков В. Н. *Комбинаторные методы дискретной математики.* М.: Наука (**1977**)

[49] Седракян Н. М., Авоян А. М. *Неравенства. Методы доказательства.* М.: Физматлит (**2002**)

[50] Смаллиан Р. *Как же называется эта книга?* М.: Мир (**1981**)

[51] Уфнаровский В.А. *Математический аквариум.* Ижевск: РХД (**2000**)

[52] Чистяков И. И. *Математическая олимпиада Ленинградского государственного университета им. А.С.Бубнова.* Матем.просвещение, выпуск № 3. М.: Объединённое научно-техническое издательство НКТП СССР (**1935**)

[53] Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. *Избранные задачи и теоремы планиметрии.* М.: Наука (**1967**)

[54] Яглом И. М. *Геометрические преобразования. I. Движения и преобразования подобия.* М.: Гостехиздат (**1955**)

[55] Яглом И. М. *Геометрические преобразования. II. Линейные и круговые преобразования.* М.: Гостехиздат (**1956**)

[56] Яглом И. М., Болтянский В. Г. *Выпуклые фигуры.* М.: Гостехиздат (**1951**)