

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра физики высоких энергий
и элементарных частиц

Мнёв Павел Николаевич
**О функциональных детерминантах однопетлевого приближения
метода фонового поля в калибровочных теориях**

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ
Научный руководитель:
акад. Л.Д.Фаддеев

Санкт-Петербург
2005

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. План изложения. Мы собираемся придерживаться следующего плана изложения. В 1.2 мы вкратце напомним, откуда возникают функциональные детерминанты в теории поля и объясним, какие именно нас интересуют (детерминанты, появляющиеся в однопетлевом эффективном действии теории Янга-Миллса). В 1.3 мы обрисуем метод собственного времени (он же метод теплового ядра) и объясним, что для вычисления детерминанта какого-то оператора достаточно знать для него след теплового ядра. В рассказе о разложении Сили-деВитта (1.4) мы в основном следуем работе [2]. В 1.5 будет написано представление для теплового ядра через интеграл по траекториям, которым мы будем активно пользоваться впоследствии. В 1.6 мы приведем замечательный результат Гейзенберга, Эйлера и других о тепловом ядре в ковариантном постоянном поле. На этом вводная часть заканчивается. В 2.1, 2.3 мы рассказываем, каким образом можно написать интеграл по путям для теплового ядра ковариантного лапласиана для калибровочной группы $SU(2)$. При этом используется формула Дьяконова-Петрова для вильсоновской петли ([5], [6]). В 2.2 мы приводим доказательство этой формулы, не прибегающее к регуляризации действия кинетическим членом. Это доказательство достаточно поучительно и опирается на работу [7]. После этого (3.1) мы переходим к следующему сюжету, посвященному "градиентному" разложению для теплового ядра ковариантного лапласиана при совпадающих точках в абелевом поле медленно меняющейся напряженности. Это разложение, как объяснено в 3.2, возникает в виде ряда теории возмущений для некоторого одномерного континуального интеграла. В 3.3 мы выведем диаграммную технику этой теории возмущений. Полученный результат представляется естественным обобщением результата для ковариантно постоянного поля в абелевом случае.

1.2. Функциональные детерминанты . Функциональные детерминанты естественным образом возникают в квантовой теории поля как однопетлевые поправки к эффективному действию во внешнем поле. В частности, в квантовой электродинамике однопетлевое эффективное действие электронов в присутствии внешнего электромагнитного поля (лагранжиан Гейзенберга-Эйлера) имеет вид

$$(1) \quad S^{(1)} = -\frac{1}{2} \ln \det(-\not{\nabla}^2 - m^2)$$

Здесь и далее мы пишем результаты для евклидовой теории поля; $\nabla_\mu = \partial_\mu - iA_\mu$ — ковариантная производная в поле A_μ , $\not{\nabla} = \gamma_\mu \nabla_\mu$ — ковариантный оператор Дирака. Для скалярной электродинамики лагранжиан Гейзенберга-Эйлера принимает вид

$$(2) \quad S^{(1)} = \frac{1}{2} \ln \det(-\nabla^2 - m^2)$$

Наконец, однопетлевое эффективное действие теории Янга-Миллса

$$(3) \quad S^{(1)} = \frac{1}{2} \ln \det(-\nabla^2 + 2iF_{\mu\nu}) - \ln \det(-\nabla^2) - \sum_{j=1}^{n_f} \frac{1}{2} \ln \det(-\not{\nabla}^2 - m_j^2)$$

состоит из вкладов глюонов, духов и фермионов (в порядке, в котором они написаны в (3)). Здесь $A_\mu = A_\mu^a T^a$ — уже неабелево калибровочное поле, T^a — эрмитовы генераторы алгебры Ли калибровочной группы, $F_{\mu\nu}$ — напряженность (кривизна) поля A_μ , n_f — число фермионов и m_j их массы.

1.3. Метод собственного времени . Для вычисления функциональных детерминантов существует следующий метод, восходящий к В.А.Фоку [1] (метод собственного времени): сопоставим дифференциальному оператору M т.н. тепловое ядро

$$(4) \quad K_M(x, y|t) = \langle x | e^{-Mt} | y \rangle$$

Как подсказывает название, тепловое ядро удовлетворяет "уравнению теплопроводности":

$$(5) \quad (\partial_t + M)_x K(x, y|t) = 0$$

с начальным условием

$$(6) \quad K_M(x, y|0) = \delta(x - y)$$

Для оператора $M = -\partial^2$, (5) оказывается настоящим уравнением теплопроводности, известным из термодинамики.

По тепловому ядру можно вычислить детерминант M :

$$(7) \quad \ln \det M - \ln \det M_0 = - \int_0^\infty \frac{dt}{t} \text{tr}(e^{-Mt} - e^{-M_0 t}) = - \int_0^\infty \frac{dt}{t} (K_M(t) - K_{M_0}(t))$$

Мы здесь использовали обозначение $K_M(t) = \text{tr} e^{-Mt} = \int dx K_M(x, x|t)$ для следа теплового ядра. Интересующие нас операторы зависят от внешнего поля $M = M[A_\mu]$, и в качестве M_0 удобно выбрать $M[0]$. Таким образом, в (7) мы вычисляем зависимость $\ln \det M$ от внешнего поля и выбрасываем из детерминанта бесконечную константу.

Функция Грина оператора M также может быть выражена через тепловое ядро:

$$(8) \quad M^{-1}(x, y) = \int_0^\infty dt K_M(x, y|t)$$

Плотность спектра оператора M связана с тепловым ядром преобразованием Лапласа:

$$(9) \quad K_M(t) = \int_{\lambda_{\min}}^\infty \rho(\lambda) e^{-\lambda t} d\lambda,$$

где $\rho(\lambda)$ — спектральная плотность, а λ_{\min} — минимальное собственное значение M . Поэтому, в следе теплового ядра $K_M(t)$ содержится лишь информация о спектре M , в то время как в самом $K_M(x, y|t)$ — еще и информация о собственных функциях.

1.4. Разложение Сили-деВитта . Для случая эллиптического оператора (см. [2]) $M = -\nabla_x^2 + B(x)$ можно написать разложение $K_M(x, y|t)$ по степеням t при $t \rightarrow 0$ (разложение Сили-деВитта):

$$(10) \quad K_M(x, y|t) = (4\pi t)^{-d/2} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \sum_{n=0}^\infty a_M^n(x, y) t^n,$$

где d — размерность пространства, а коэффициенты $a_M^n(x, y)$ — гладкие функции x и y , удовлетворяющие следующим уравнениям спуска:

$$(11) \quad n a_M^n(x, y) + (x - y)_\mu \nabla_\mu a_M^n(x, y) = -M_x a_M^{n-1}(x, y),$$

$$(12) \quad (x - y)_\mu \nabla_\mu a_M^0(x, y) = 0$$

и начальному условию $a_M^0(x, x) = 1$. Из (12) следует, что

$$(13) \quad a_M^0(x, y) = \mathcal{P} \exp(i \int_x^y A_\mu(x') dx')$$

— вильсоновская линия, вычисленная вдоль отрезка из y в x . Из (11) следуют выражения для величин типа $\nabla_{\rho_1} \cdots \nabla_{\rho_k} a_M^n(x, x)$ через $B(x)$ и $F_{\mu\nu}$. В частности,

$$(14) \quad a_M^1(x, x) = -B(x)$$

$$(15) \quad a_M^2(x, x) = -\frac{1}{12} F_{\alpha\beta}(x) F_{\alpha\beta}(x) + \frac{1}{2} B(x)^2 - \frac{1}{6} \nabla^2 B(x)$$

Разложение (10) позволяет вычислять ультрафиолетовые расходимости детерминантов, а также ультрафиолетовые асимптотики пропагаторов. Однако, для вычисления конечной части детерминанта (10) не достаточно.

1.5. Представление в виде интеграла по путям . Можно также использовать (10), (14) для вывода интегрального представления для теплового ядра:

$$(16) \quad K_M(x, y|t) = \int dx'_{n-1} \cdots dx'_1 \langle x | e^{-Mt/n} | x'_{n-1} \rangle \langle x'_{n-1} | \cdots | x'_1 \rangle \langle x'_1 | e^{-Mt/n} | y \rangle$$

Устремляя $n \rightarrow \infty$ и используя (10), (14), получим

$$(17) \quad K_M(x, y|t) = \int_{x'(0)=y}^{x'(t)=x} \mathcal{D}x'(\tau) \mathcal{P} \exp \left(\int_0^t d\tau \left(-\frac{\dot{x}'^2}{4} + iA_\mu(x') \dot{x}'_\mu - B(x') \right) \right)$$

— представление в виде фейнмановского интеграла по путям. Для случая $M = -\nabla^2$ в абелевом калибровочном поле A_μ , упорядоченная экспонента в (17) становится обычной экспонентой, и мы получаем для теплового ядра квантово-механический континуальный интеграл со скалярным действием

$$(18) \quad K_M(x, y|t) = \int_{x'(0)=y}^{x'(t)=x} \mathcal{D}x'(\tau) \exp \left(\int_0^t d\tau \left(-\frac{\dot{x}'^2}{4} + iA_\mu(x') \dot{x}'_\mu \right) \right)$$

1.6. Ковариантно постоянное поле . Существуют специальные конфигурации калибровочного поля, в которых тепловые ядра вычисляются точно (см., например, обзор [3]). Самый известный пример такой ситуации — случай ковариантно постоянного поля, изучавшийся Гейзенбергом, Эйлером, Вайскопфом, Швингером и другими.

Ковариантно постоянное поле (см. [4]) определяется как удовлетворяющее условию

$$(19) \quad \nabla_\alpha F_{\beta\gamma}(x) = 0$$

для любых α, β, γ и x . Из (19) немедленно вытекает, что компоненты тензора напряженности (взятые в одной точке) должны коммутировать между собой:

$$(20) \quad [F_{\alpha\beta}, F_{\gamma\delta}] = 0$$

В калибровке Фока-Швингера (Фурье-двойственной к калибровке Лоренца) $x_\mu A_\mu(x) = 0$ условие (19) означает просто постоянство компонент тензора напряженности

$$(21) \quad \partial_\alpha F_{\beta\gamma} = 0$$

вместе с условием их взаимной коммутативности (20). Потенциал поля в этой калибровке имеет вид

$$(22) \quad A_\mu(x) = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} x_\nu$$

В ковариантно постоянном поле интеграл (17) оказывается гауссовым и вычисляется точно (существуют выводы и без использования континуального интеграла).

Результаты для интересующих нас операторов (в калибровке Фока-Швингера) таковы:

$$(23) \quad K_{-\nabla^2}(x, y|t) = (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} \left(\text{Det} \frac{\sin Ft}{Ft} \right)^{-1/2} \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{4t} (x-y)_\mu (Ft \text{ctg} Ft)_{\mu\nu} (x-y)_\nu - \frac{i}{2} x_\mu F_{\mu\nu} y_\nu \right\}$$

$$(24) \quad K_{-\nabla^2 + 2iF_{\mu\nu}}(x, y|t) = K_{-\nabla^2}(x, y|t) (e^{-2iFt})_{\mu\nu}$$

$$(25) \quad K_{-\nabla^2}(x, y|t) = K_{-\nabla^2}(x, y|t) \left(e^{-\frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]F_{\mu\nu}} \right)_{\alpha\beta},$$

где γ_μ — матрицы Дирака, α и β — спинорные индексы, Det означает детерминант по лоренцовым индексам.

Остальные известные случаи, когда тепловые ядра вычисляются точно, более специальные. Для них всякий раз оказывается, что уравнение теплопроводности (5) сводится к гипергеометрическому уравнению (см. [3]).

Относительно случая ковариантно постоянного поля для калибровочной группы $SU(N)$ можно сказать следующее. Так как $[F_{\alpha\beta}, F_{\gamma\delta}] = 0$, можно разложить $F_{\mu\nu}$ по базису подалгебры Картана в $su(N)$:

$$F_{\mu\nu} = \sum_{k=1}^{N-1} F_{\mu\nu}^k h^k$$

Мы предполагаем, что h_k орто-нормированы по форме Киллинга. Например, для присоединенного представления $\frac{1}{N} \text{tr} h^k h^l = \delta^{kl}$. Тогда для следа теплового ядра будем иметь

$$(26) \quad K_M(t|F_{\mu\nu}) = \sum_{\lambda} K_M(t|F_{\mu\nu}^k \lambda^k),$$

причем суммирование ведется по всем весам λ того представления $su(N)$, в котором находится $F_{\mu\nu}$. Тепловые ядра в правой части (26) — для абелева поля $F_{\mu\nu}^k \lambda^k$.

2. КОНТИНУАЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ ДЛЯ ТЕПЛООВОГО ЯДРА В $SU(2)$ -КАЛИБРОВОЧНОМ ПОЛЕ

2.1. Тепловое ядро и формула Дьяконова-Петрова для вильсоновской петли. Рассмотрим тепловое ядро оператора $-\nabla^2$ в поле $A_\mu^J = A_\mu^a T^a$, где T^a — эрмитовы генераторы представления алгебры Ли $su(2)$ спина J . Интегральное представление (17) для теплового ядра принимает вид

$$(27) \quad K(x, y|t) = \int_{x'(0)=y}^{x'(t)=x} \mathcal{D}x'(\tau) \exp \left(-\int_0^t d\tau \frac{\dot{x}'^2}{4} \right) \mathcal{P} \exp \left(i \int_0^t d\tau A_\mu^J \dot{x}'_\mu \right),$$

а для следа теплового ядра

$$(28) \quad K(t) = \text{tr} e^{t\nabla^2} = \int dy \text{tr} K(y, y|t) \\ = \int_{x(0)=x(t)} \mathcal{D}x(\tau) \exp \left(-\int_0^t d\tau \frac{\dot{x}^2}{4} \right) \text{tr} \mathcal{P} \exp \left(i \int_0^t d\tau A_\mu^J \dot{x}_\mu \right)$$

Здесь tr означает след по калибровочным индексам.

Оказывается, выражение (28) можно преобразовать к виду с обычной экспонентой скалярного действия. Цена этого преобразования — введение нового поля

$U(\tau)$, живущего на отрезке $\tau \in [0, t]$, со значениями в группе $SU(2)$. Для этого нам нужна формула Дьяконова и Петрова для вильсоновской петли [5]:

$$(29) \quad \text{tr } \mathcal{P} \exp \left(i \int_0^t d\tau A_\mu^J \dot{x}_\mu \right) = \int_{U(0)=U(t)} \mathcal{D}U(\tau) \exp \left\{ i J \int_0^t d\tau \text{tr} [\sigma_3 (U^+ A_\mu \dot{x}_\mu U + iU^+ \dot{U})] \right\}$$

Здесь имеется в виду интегрирование по всем $U(\tau)$ с периодическими граничными условиями, $A_\mu \equiv A_\mu^{\frac{1}{2}}$ — калибровочное поле в фундаментальном представлении, σ_3 — третья матрица Паули.

2.2. Доказательство формулы для вильсоновской петли . Приведем простое доказательство формулы (29) без регуляризации континуального интеграла обычным кинетическим членом. Обозначим

$$(30) \quad I = \int_{U(0)=U(t)} \mathcal{D}U(\tau) \exp \left\{ i J \int_0^t d\tau \text{tr} [\sigma_3 (U^+ A U + iU^+ \dot{U})] \right\},$$

где $A(\tau) = A_\mu(\tau) \dot{x}_\mu(\tau)$. Попробуем прямо вычислить (30). В экспоненте здесь стоит калибровочное преобразование A . Поэтому, если мы сделаем унитарный зависящий от τ поворот слева в переменной интегрирования $U(\tau) = \Lambda(\tau) U'(\tau)$ (мера $\mathcal{D}U(\tau)$ инвариантна при таких заменах), получим снова интеграл вида (30), где вместо $A(\tau)$ будет стоять калибровочно преобразованное $A' = \Lambda^+ A \Lambda + i\Lambda^+ \dot{\Lambda}$. Однако, чтобы после замены переменных осталось неизменным периодическое граничное условие $U(0) = U(t)$, мы должны ограничиться периодическими $\Lambda(\tau)$.

Самое простое, к чему можно привести произвольное $A(\tau)$ периодическим калибровочным преобразованием — это постоянное поле, направленное вдоль третьей оси в $su(2)$. Именно, такой поворот имеет вид

$$(31) \quad U(\tau) = V(\tau) e^{-i\tau B/t} W U'(\tau),$$

где $V(\tau) = \mathcal{P} \exp(i \int_0^\tau d\tau' A(\tau'))$, $B = -i \ln V(t)$ — постоянная матрица из $su(2)$, $W \in SU(2)$ — постоянный поворот, такой что $B = bW \frac{\sigma_3}{2} W^+$, где $b = \|B\| = \sqrt{2 \text{tr} B^2}$ — норма B . При такой замене новое калибровочное поле $A' = \frac{b}{i} \frac{\sigma_3}{2}$. Как и было обещано, оно постоянно и направлено вдоль третьей оси.

Итак, мы привели (30) к виду

$$(32) \quad I = \int_{U(0)=U(t)} \mathcal{D}U(\tau) \exp \left\{ i J \int_0^t d\tau \text{tr} [\sigma_3 (\frac{b}{t} U^+ \frac{\sigma_3}{2} U + iU^+ \dot{U})] \right\}$$

Можно также изменить масштаб собственного времени $\tau \rightarrow \frac{b}{i} \tau$:

$$(33) \quad I = \int_{U(0)=U(b)} \mathcal{D}U(\tau) \exp \left\{ i J \int_0^b d\tau \text{tr} [\sigma_3 (U^+ \frac{\sigma_3}{2} U + iU^+ \dot{U})] \right\}$$

Теперь удобно перейти от интегрирования по калибровочной группе к интегрированию по сфере - орбите $SU(2)$. Параметризуем $U(\tau)$ углами Эйлера [6]:

$$(34) \quad U = e^{-i\phi\sigma_3/2} e^{-i\theta\sigma_2/2} e^{-i\psi\sigma_3/2}$$

Выражение в экспоненте записывается как

$$(35) \quad i J \int_0^b d\tau (\cos \theta + (\cos \theta - 1) \dot{\phi} + (\dot{\phi} + \dot{\psi}))$$

Слагаемое $(\dot{\phi} + \dot{\psi})$ на самом деле дает в экспоненту вклад, кратный $2\pi i$, и поэтому не важен. Тем самым, подинтегральное выражение в (33) не зависит от угла ψ . Мера имеет вид

$$\mathcal{D}U(\tau) = \prod_{\tau} \frac{d\phi(\tau) d\cos\theta(\tau) d\psi(\tau)}{\text{Vol}_{SU(2)}}$$

Поэтому, интеграл по $\mathcal{D}\psi(\tau)$ берется тривиально и остается интеграл по сфере:

$$(36) \quad I = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\phi(b)=\phi(0)+2\pi n, \theta(b)=\theta(0)}^{\infty} \mathcal{D}\phi(\tau) \mathcal{D}\cos\theta(\tau) \exp \left\{ iJ \int_0^b d\tau (\dot{\phi}(\cos\theta - 1) + \cos\theta) \right\}$$

Здесь мы разделили пространство интегрирования по числу намоток вокруг третьей оси. Интеграл (36) по петлям на сфере вычислен в [7]. Идея вычисления следующая. Напишем дискретизованную версию (36):

$$(37) \quad I = J^N \int_0^{2\pi} d\phi_N \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^{N-1} d\phi_k \int_{-1}^1 \prod_{k=1}^N d\cos\theta_k \times \exp \left\{ iJ \sum_{k=1}^N [(\phi_k - \phi_{k-1})(\cos\theta_k - 1) + \frac{b}{N} \cos\theta_k] \right\}$$

Здесь имеется в виду граничное условие $\phi_N = \phi_0 + 2\pi n$, причем по числу намоток n надо просуммировать. Множитель перед интегралом J^N происходит из симплектической формы $Jd\phi d\cos\theta$ на сфере радиуса J . Интегралы по ϕ_k берутся немедленно и дают δ -функции:

$$(38) \quad I = J \int_{-1}^1 \prod_{k=1}^N d\cos\theta_k \prod_{k=1}^{N-1} \delta(\cos\theta_k - \cos\theta_{k+1}) \times \exp(iJ \sum_{k=1}^N \frac{b}{N} \cos\theta_k) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(2\pi i J n (\cos\theta_N - 1))$$

Последний множитель возникает из-за суммы по числу намоток. Итак, у нас остался N -кратный интеграл и $N-1$ δ -функция. Еще одна δ -функция неявно содержится в последнем множителе, так как

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n x} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - m)$$

Используя это, получим

$$(39) \quad I = J \int_{-1}^1 d\cos\theta_N e^{iJb\cos\theta_N} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(J(\cos\theta_N - 1) - m)$$

Две из δ -функций здесь попадают на концы интервала интегрирования. Регуляризация, предложенная в [7], расширяет этот интервал: $\int_{-1}^1 d\cos\theta_N \rightarrow \int_{-1-\epsilon}^{1+\epsilon} d\cos\theta_N$. Тогда вклад дают $2J+1$ δ -функций:

$$(40) \quad I = \sum_{m=0}^{2J} e^{iJb(1-\frac{m}{J})} = \sum_{l=-J}^J e^{ilb} = \text{tr } \rho_J(\exp(ib\frac{\sigma_3}{2})),$$

где ρ_J — представление спина J . Поскольку $b\frac{\sigma_3}{2}$ подобно B в $SU(2)$, имеем

$$I = \text{tr } \rho_J(e^{iB}) = \text{tr } \rho_J \left\{ \mathcal{P} \exp \left(i \int_0^t d\tau A(\tau) \right) \right\},$$

что и требовалось доказать.

Приведенное вычисление (36) поучительно во-первых тем, что это одновременно способ понять континуальный интеграл, в котором мера не сосредоточена на гладких траекториях. Во-вторых, оно показывает, что вклад дают только траектории, лежащие на $(2J + 1)$ параллели на сфере:

$$(41) \quad \cos \theta(\tau) = l/J$$

При этом все параллели имеют единичный вес: мы могли бы взять в (36) вместо гамильтониана $J \cos \theta$ любую функцию $h(\cos \theta, \tau)$ и получили бы

$$(42) \quad \int \mathcal{D}\phi(\tau) \mathcal{D} \cos \theta(\tau) \exp \left\{ i \int_0^b d\tau (J\dot{\phi}(\cos \theta - 1) + h(\cos \theta, \tau)) \right\} = \sum_{l=-J}^J \exp \left(i \int_0^b d\tau h\left(\frac{l}{J}, \tau\right) \right)$$

Мы могли бы с самого начала в (30) перейти к интегрированию по сфере. Чтобы построение выглядело красивее геометрически, выберем в качестве переменной на сфере единичный вектор

$$\vec{n} = \text{tr} \sigma_3 U^+ \frac{\vec{\sigma}}{2} U$$

или, в терминах углов Эйлера, $\vec{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$. Как и прежде, первые два угла Эйлера образуют обычную сферическую систему координат. Калибровочное поле A в фундаментальном представлении имеет вид $A = A^a \frac{\sigma^a}{2}$. Теперь мы можем написать (30) в виде

$$(43) \quad \int_{\vec{n}(0)=\vec{n}(t)} \mathcal{D}\vec{n}(\tau) \exp \left\{ iJ \int_0^t d\tau [\vec{A} \cdot \vec{n} + \dot{\phi}(\cos \theta - 1)] \right\}$$

Кинетический член не записать инвариантно через \vec{n} , поэтому он оставлен, как и раньше, в координатном виде. Поворот (31), который приводил нас к постоянному полю, в терминах $\vec{n}(\tau)$ имеет вид

$$\vec{n}(\tau) = \rho_1 \left\{ V(\tau) e^{-i\tau B/t} W \right\} \vec{n}'(\tau)$$

Напомним, что ρ_1 означает у нас представление спина 1. Таким образом, мера в (43) сосредоточена на прообразе параллелей (41) при нашем повороте.

2.3. Интеграл для теплового ядра . Теперь, когда мы достаточно поговорили о формуле для вильсоновской петли, используем ее в (28):

$$(44) \quad K(t) = \int \mathcal{D}x(\tau) \mathcal{D}U(\tau) \exp \left\{ \int_0^t d\tau \left(-\frac{\dot{x}^2}{4} + iJ \text{tr} \sigma_3 (U^+ A_\mu U \dot{x}_\mu + iU^+ \dot{U}) \right) \right\}$$

Здесь подразумеваются периодические граничные условия: $x(0) = x(t)$, $U(0) = U(t)$. Таким образом, мы представили $K(t)$ в виде интеграла по петлям в пространстве $\mathbb{R}^d \times SU(2)$, причем кинетический член имеет обычный, фейнмановский вид по пространственным направлениям и вид действия Весса-Зумино в направлении калибровочной группы.

2.4. Случай ковариантно постоянного поля . Попробуем теперь увидеть прямо из (44) результат для ковариантно постоянного поля с калибровочной группой $SU(2)$. Как мы знаем, в калибровке Фока-Швингера напряженность $F_{\mu\nu}$ будет постоянна, а ее компоненты должны коммутировать друг с другом. Поскольку $su(2)$ имеет ранг 1, все компоненты тензора напряженности лежат на одной прямой в $su(2)$. Постоянным калибровочным преобразованием можно привести напряженность к виду $F_{\mu\nu} = \hat{F}_{\mu\nu} \frac{\sigma_3}{2}$, где $\hat{F}_{\mu\nu}$ — числовая матрица. Пользуясь (22), будем иметь $A_\mu(x) =$

$-\frac{1}{2}\hat{F}_{\mu\nu}x_\nu\frac{\sigma_3}{2}$. Подставляя это A_μ в (44) и используя параметризацию U углами Эйлера, получим

$$(45) \quad K(t) = \int \mathcal{D}x(\tau)\mathcal{D}\phi(\tau)\mathcal{D}\cos\theta(\tau) \times \exp\left\{\int_0^t d\tau\left(-\frac{\dot{x}^2}{4} + iJ\left(-\frac{1}{2}\hat{F}_{\mu\nu}\dot{x}_\mu x_\nu \cos\theta + \dot{\phi}(\cos\theta - 1)\right)\right)\right\}$$

Интеграл по сфере здесь в точности имеет вид (42). То есть, мера локализуется на параллели (41):

$$(46) \quad K(t) = \sum_{l=-J}^J \int \mathcal{D}x(\tau) \exp\left\{\int_0^t d\tau\left(-\frac{\dot{x}^2}{4} - il\frac{1}{2}\hat{F}_{\mu\nu}\dot{x}_\mu x_\nu\right)\right\}$$

Здесь каждое слагаемое в правой части — след теплового ядра в абелевом калибровочном поле с постоянной напряженностью $l\hat{F}_{\mu\nu}$. Таким образом, мы получили выражение вида (26) для случая группы $su(2)$ в представлении спина J . Чтобы получить из (46) окончательное явное выражение для $K(t)$, остается взять гауссов интеграл по $x(\tau)$:

$$K(t) = \sum_{l=-J}^J V(4\pi t)^{-d/2} \left(\text{Det}\frac{\sin l\hat{F}t}{l\hat{F}t}\right)^{-1/2},$$

где V — объем пространства.

3. ГРАДИЕНТНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ТЕПЛОВОГО ЯДРА ОПЕРАТОРА $-\nabla^2$ В АБЕЛЕВОМ КАЛИБРОВОЧНОМ ПОЛЕ МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩЕЙСЯ НАПРЯЖЕННОСТИ

3.1. Мотивация . Обратимся теперь к следующему сюжету. Как бы ни было хорошо разложение Сили-деВитта (10), оно не годится для вычисления конечной части детерминанта, так как его нельзя интегрировать по t почленно — все такие интегралы расходятся инфракрасно (на пределе $t \rightarrow \infty$). С другой стороны, хотя результаты (23)–(25) работают только в специальном случае — в случае ковариантно постоянного поля, их прекрасно можно интегрировать по t и получать не расходящиеся выражения для детерминантов. Поэтому возникает соблазн написать для произвольного поля что-нибудь типа

$$(47) \quad K_M(x, y|t; F) \sim \int dx' K_M(x, y|t; F|_{x'}),$$

то есть, приблизить точное тепловое ядро проинтегрированными по пространству ответами (23)–(25) для ковариантно постоянного поля.

Чтобы максимально упростить себе жизнь, мы будем рассматривать тепловое ядро оператора $-\nabla^2$ в абелевом поле и при совпадающих точках. Как мы увидим, в этом случае можно написать некоторое разложение для $K(y, y|t)$, нулевым членом которого будет (47). Этот ряд будет иметь смысл, то есть, каждый следующий член будет малой поправкой к предыдущим, для случая поля медленно меняющейся напряженности.

3.2. Теория возмущений для интеграла по путям . Итак, воспользуемся представлением теплового ядра в виде интеграла по путям (18):

$$(48) \quad K(y, y|it) = \int_{x(0)=x(t)=y} \mathcal{D}x(\tau) \exp\left\{i\int_0^t d\tau\left(\frac{\dot{x}^2}{4} + A_\mu\dot{x}_\mu\right)\right\}$$

Мы выбрали собственное время мнимым в (48), чтобы иметь вещественное действие. Заметим, что задачу вычисления $K(x, y|it) = \langle x|e^{it\nabla^2}|y\rangle$ можно понимать как

квантово-механическую — мы вычисляем амплитуду перехода из y в x для заряженной нерелятивистской частицы в магнитном поле $F_{\mu\nu}$ в $d+1$ -мерном пространстве-времени. Причем, магнитное поле стационарно, то есть не зависит от t .

В калибровке Фока-Швингера $(x - y)_\mu A_\mu(x) = 0$ поле A_μ можно выразить через напряженность:

$$(49) \quad A_\mu(x) = - \int_0^1 dz s_\nu z F_{\mu\nu}(y + zs) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)} s_\nu s_{\rho_1} \cdots s_{\rho_n} \partial_{\rho_1} \cdots \partial_{\rho_n} F_{\mu\nu}(y)$$

Здесь мы использовали обозначение $s = x - y$. Теперь мы подставим (49) в (48) и сделаем сдвиг в переменной интегрирования $x(\tau) \rightarrow s(\tau) = x(\tau) - y$:

$$(50) \quad K(y, y|it) = \int_{s(0)=s(t)=0} \mathcal{D}s(\tau) \exp \left(i \int_0^t d\tau (L_0 + L_{\text{int}}) \right),$$

где

$$(51) \quad L_0 = \frac{\dot{s}^2}{4} - \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \dot{s}_\mu s_\nu$$

— квадратичная по $s(\tau)$ ("свободная") часть лагранжиана, и

$$(52) \quad L_{\text{int}} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)} \dot{s}_\mu s_\nu s_{\rho_1} \cdots s_{\rho_n} \partial_{\rho_1} \cdots \partial_{\rho_n} F_{\mu\nu}$$

— "взаимодействие". При этом напряженность $F_{\mu\nu}$ и все ее производные берутся в точке y . В случае, когда напряженность меняется в окрестности y достаточно медленно, мы можем считать, что взаимодействие мало по сравнению со свободной частью действия. Тогда можно вычислять (50) по теории возмущений. Ясно, что низшим приближением окажется гауссова часть (50), то есть, как раз, результат (23) для поля постоянной напряженности:

$$(53) \quad K(y, y|it) = (4\pi it)^{-d/2} \left(\text{Det} \frac{\sinh Ft}{Ft} \right)^{-1/2} + (\text{петлевые поправки})$$

Это именно то представление, которого нам хотелось в (47).

3.3. Правила Фейнмана . Свободную часть действия удобно представлять в виде

$$S_0[s] = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau s_\mu \Delta_{\mu\nu} s_\nu,$$

где

$$\Delta_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \partial_\tau^2 + F_{\mu\nu} \partial_\tau$$

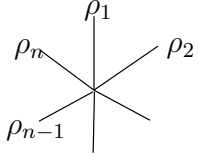
— оператор квадратичной флуктуации действия в (48) вокруг траектории $s(\tau) = 0$. Функция Грина для $\Delta_{\mu\nu}$ имеет вид

$$(54) \quad G_{\mu\nu}(\tau, \tau') = \Delta_{\mu\nu}^{-1}(\tau, \tau') = \left(2e^{F(\tau-\tau')} \frac{\sinh F\tau_{<} \sinh F(t-\tau_{>})}{F \sinh Ft} \right)_{\mu\nu}$$

Здесь $\tau_{<}$ и $\tau_{>}$ — соответственно, меньшее и большее из τ и τ' . Теперь мы можем написать фейнмановские правила для вычисления (48). Пропагатор мы фактически только что нашли:

$$\overline{\mu, \tau} \quad \nu, \tau' = iG_{\mu\nu}(\tau, \tau')$$

Вершины существуют всех валентностей $n \geq 3$. В симметризованном виде они выглядят как



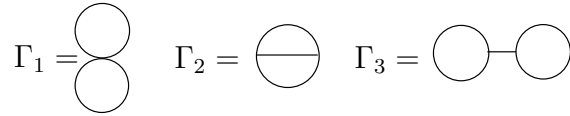
$$= i \frac{n-1}{n!} \sum_{\pi} \partial_{\rho_{\pi(1)}} \cdots \partial_{\rho_{\pi(n-2)}} F_{\rho_{\pi(n-1)} \rho_{\pi(n)}} \partial_{\tau}^{\pi(n)}$$

Здесь суммирование ведется по всем перестановкам π чисел от 1 до n ; производная $\partial_{\tau}^{\pi(n)}$ дифференцирует по τ линию номер $\pi(n)$.

3.4. Двухпетлевые поправки для теплового ядра . Поправки к (53) начинаются с двухпетлевых вакуумных диаграмм:

$$(55) \quad K(y, y|it) = (4\pi it)^{-d/2} \left(\text{Det} \frac{\sinh Ft}{Ft} \right)^{-1/2} (1 + \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \cdots),$$

где



Приведем значения этих диаграмм:

$$(56) \quad \Gamma_1 = -\frac{i}{8} \partial_{(\rho} \partial_{\sigma} F_{\nu)\mu} \int d\tau G_{\dot{\mu}\nu} G_{\rho\sigma}$$

$$(57) \quad \Gamma_2 = \frac{i}{18} \partial_{(\rho} F_{\nu)\mu} \partial_{(\rho'} F_{\nu')\mu'} \int d\tau d\tau' (2G_{\dot{\mu}\dot{\mu}'} G_{\nu\nu'} G_{\rho\rho'} + 4G_{\dot{\mu}\nu'} G_{\nu\dot{\mu}'} G_{\rho\rho'})$$

$$(58) \quad \Gamma_3 = \frac{i}{18} \partial_{(\rho} F_{\nu)\mu} \partial_{(\rho'} F_{\nu')\mu'} \int d\tau d\tau' (G_{\dot{\mu}\dot{\mu}'} G_{\nu\rho} G_{\nu'\rho'} + 4G_{\dot{\mu}\nu'} G_{\nu\rho} G_{\dot{\mu}'\rho'} + 4G_{\nu\nu'} G_{\dot{\mu}\rho} G_{\dot{\mu}'\rho'})$$

Здесь по индексам в круглых скобочках понимается симметризация. Система обозначений для функций Грина такая: $G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}(\tau, \tau')$, $G_{\dot{\mu}\nu} = \partial_{\tau} G_{\mu\nu}(\tau, \tau')$ и т.д. То есть, не штрихованному индексу соответствует собственное время τ , штрихованному — τ' , если у индекса стоит точка, нужно продифференцировать по соответствующему времени. Следует отметить, что нужный нам объект $G_{\dot{\mu}\nu} = \partial_{\tau} G_{\mu\nu}(\tau, \tau')|_{\tau'=\tau}$ сам по себе плохо определен: производная берется как раз в точке, где функция Грина не дифференцируема. На самом деле, следует определить

$$G_{\dot{\mu}\nu} = \frac{1}{2} \left(\lim_{\tau' \rightarrow \tau-0} + \lim_{\tau' \rightarrow \tau+0} \right) \partial_{\tau} G_{\mu\nu}(\tau, \tau')$$

Это можно увидеть, например, из того, что

$$G_{\dot{\mu}\nu} + G_{\dot{\nu}\mu} = \langle \dot{s}_{\mu} s_{\nu} + s_{\mu} \dot{s}_{\nu} \rangle_{S_0} = \partial_{\tau} G_{\mu\nu}(\tau, \tau)$$

Приведем значение самой простой нетривиальной диаграммы в более явном виде (после интегрирования по τ):

$$(59) \quad \Gamma_1 = -\frac{i}{8} \partial_{(\rho} \partial_{\sigma} F_{\nu)\mu} \left\{ F_2^{-1} \left(t \coth F_1 t \coth F_2 t - \frac{F_1^3 \coth F_1 t - F_2^3 \coth F_2 t}{F_1 F_2 (F_1^2 - F_2^2)} \right) \right\}_{\rho\sigma}^{\mu\nu},$$

где $F_1 = F \otimes 1$ и $F_2 = 1 \otimes F$ — матрицы, действующие на $\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$, причем индексы μ, ν относятся к первому пространству, а σ, ρ — ко второму. Выражения такого типа можно получить для любой диаграммы, так как произведения пропагаторов зависят от собственных времен как экспоненциальные полиномы. Поэтому интегралы по собственным временам вычисляются элементарно. Видно кроме того, что с усложнением диаграмм усложняются возникающие в них лоренцовы структуры.

3.5. О применимости градиентного разложения . О применимости разложения (55) можно сказать следующее. Пусть l — характерное расстояние, на котором напряженность поля успевает заметно измениться: $\partial_{\rho_1} \cdots \partial_{\rho_n} F_{\mu\nu} \sim l^{-n} \|F\|$, где $\|F\|$ — величина порядка компонент тензора напряженности. Гауссова мера в (50) сосредоточена на траекториях с $s \sim \|F\|^{-1/2}$, $\dot{s} \sim \|F\|^{1/2}$ (в предположении, что $t\|F\| \sim 1$). Таким образом, действие взаимодействия S_{int} будет мало на носителе гауссовой меры при $l \gg \|F^{-1/2}\|$ и диаграмма с L петлями будет иметь порядок $(l\|F\|^{1/2})^{2(1-L)}$. Поэтому разложение (55) можно понимать как ряд Тэйлора по степеням малого параметра $(l\|F\|^{1/2})^{-2}$ с естественной группировкой диаграмм по числу петель.

Кроме этих соображений, к пределу поля медленно меняющейся напряженности можно подойти формально. Пусть наше поле теперь называется $\tilde{A}_\mu(\tilde{x})$, а его напряженность — $\tilde{F}_{\mu\nu}(\tilde{x})$. В интересующем нас пределе $\tilde{F}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = F_{\mu\nu}(x)$, где $\tilde{x} = Nx$ и мы интересуемся случаем $N \rightarrow \infty$. Для A_μ отсюда следует $\tilde{A}_\mu(\tilde{x}) = NA_\mu(x)$ и, наконец, для теплового ядра

$$\begin{aligned}
 K(\tilde{y}, \tilde{y}|it) &= \int_{\tilde{x}(0)=\tilde{x}(t)=\tilde{y}} \mathcal{D}\tilde{x}(\tau) \exp \left\{ i \int_0^t d\tau \left(\frac{\dot{\tilde{x}}'^2}{4} + \tilde{A}_\mu \dot{\tilde{x}}_\mu \right) \right\} \\
 (60) \qquad &= N^{-d} \int_{x(0)=x(t)=y} \mathcal{D}x(\tau) \exp \left\{ iN^2 \int_0^t d\tau \left(\frac{\dot{x}'^2}{4} + A_\mu \dot{x}_\mu \right) \right\}
 \end{aligned}$$

Теперь перед действием у нас явно возник большой параметр N^2 , имеющий смысл обратной постоянной Планка. Результатом вычисления (60) по теории возмущений будет снова разложение (55), но теперь перед каждой диаграммой будет стоять коэффициент $N^{2(1-L)}$, где L — число петель. Итак, наше градиентное разложение стало рядом Тэйлора по малому параметру $1/N^2$.

Можно понимать (55) как пересуммированное разложение Сили-деВитта (10): в нулевом члене собраны все вклады без производных напряженности, в двухпетлевой поправке — все вклады с двумя производными и т.д. Очевидная польза этого пересуммирования, например, в том, что разложение (55) можно интегрировать по t почленно, чтобы вычислять детерминант.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В.А.Фок, "Собственное время в классической и квантовой механике", Изв. Акад. Наук СССР (физ.) **4-5** (1937) 551-568
- [2] I.Jack and H.Osborn, Nucl.Phys. **B207**, 474 (1982)
- [3] G.Dunne, hep-th/0406216
- [4] J.-P. Börnsen and A. van de Ven, hep-th/0211246
- [5] D.Diakonov and V.Petrov, Sov.Phys. JETP Lett. **49**, 284 (1989); Phys.Lett.**B224**, 131 (1989)
- [6] D.Diakonov and V.Petrov, hep-lat/0008004
- [7] A.Alekseev, L.Faddeev and S.Shatashvili, J.Geom.Phys. **5**, 391 (1989)