САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра физики высоких энергий
и элементарных частиц

Мнёв Павел Николаевич

Построение R-матрицы для частного случая модели Росохатиуса

КУРСОВАЯ РАБОТА

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., вед. н. с. ПОМИ РАН Е. К. Склянин

Санкт-Петербург
2001

Модель Росохатиуса — это классическая интегрируемая (в смысле Лиувилля) модель гамильтоновой механики. Гамильтониан модели Росохатиуса выглядит следующим образом:

$$H(x,y) = \frac{1}{2}\sum y_i^2 + \sum \frac{\mu_i^2}{x_i^2} + \sum \alpha_i x_i^2 \tag{1}$$

Все интегралы движения этой системы (включая сам гамильтониан) можно получить как спектральные инварианты так называемого L-оператора:

$$L(u) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{u-\alpha_i} \left\{ \begin{bmatrix} x_i y_i & -y_i^2 \\ x_i^2 & -x_i y_i \end{bmatrix} + \sqrt{-2}\mu_i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2\frac{\mu_i^2}{x_i^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \tag{2}$$

В статье [1] найден двойственный L-оператор для этой системы. Два L-оператора $L(u)$ и $\mathcal{L}(v)$ называются двойственными, если выполняется

$$\det(v - L(u)) = f(u,v)\det(u - \mathcal{L}(v)),$$

где $f(u,v)$ — какая-то функция, не зависящая от динамических переменных. Этот новый L-оператор выглядит так:

$$L(u) = A + \frac{1}{u}\Omega + \frac{1}{u^2}\Gamma, \tag{3}$$

где A — диагональная матрица $n \times n$ с элементами $A_{jj} = \alpha_j$,

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(-(x_i y_j - x_j y_i) - \sqrt{-2}\left(\frac{\mu_i}{x_i}x_j + \frac{\mu_j}{x_j}x_i \right) \right) \tag{4}$$

и

$$\Gamma_{ij} = \frac{1}{2}x_i x_j. \tag{5}$$

В настоящей работе для некоторого частного случая модели ($\mu_j = 0$) найдены R-матрицы для указанного L-оператора, то есть, две числовых (не зависящих от динамических переменных) матрицы r_1 и r_2, задающих алгебру Пуассона модели следующим образом:

$$\{\overset{1}{L}(u), \overset{2}{L}(v)\} = [r_1(u,v), \overset{1}{L}(u)] + [r_2(u,v), \overset{2}{L}(v)] \tag{6}$$

Здесь подразумевается, что левая и правая часть выражения — матрицы $n^2 \times n^2$, действующие в пространстве тензорного произведения

$\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$. Значок 1 сверху над матрицей означает, что она действует только в первом пространстве, 2 — что только во втором. То есть,

$$\overset{1}{L}(u) = L(u) \otimes \mathbf{1} \text{ и } \overset{2}{L}(v) = \mathbf{1} \otimes L(v)$$

Матрицы r_1 и r_2 действуют нетривиально в обоих пространствах.

Чтобы обозначения стали понятнее, можно расписать равенство (6) покомпонентно:

$$\{\overset{1}{L}(u), \overset{2}{L}(v)\}^{i_1 j_1}_{i_2 j_2} = \{L_{i_1 j_1}(u), L_{i_2 j_2}(v)\} = [r_1(u,v), \overset{1}{L}(u)]^{i_1 j_1}_{i_2 j_2} + [r_2(u,v), \overset{2}{L}(v)]^{i_1 j_1}_{i_2 j_2}$$

Верхние индексы здесь относятся к первому пространству, нижние — ко второму.

Идея, как искать R-матрицы, состоит в том, чтобы проверить следующий анзатц:

$$r_1(u,v) = \alpha(u,v)\mathcal{P} + \beta(u,v)\mathcal{K},\ r_2(u,v) = \gamma(u,v)\mathcal{P} + \delta(u,v)\mathcal{K}, \tag{7}$$

где $\mathcal{P}^{i_1 j_1}_{i_2 j_2} = \delta_{i_1 j_2}\delta_{j_1 i_2}$ — матрица перестановки, $\mathcal{K}^{i_1 j_1}_{i_2 j_2} = \delta_{i_1 i_2}\delta_{j_1 j_2}$, а α, β, γ, δ — какие-то числовые функции u и v.

Найдём компоненты $\{\overset{1}{L}(u), \overset{2}{L}(v)\}$:

$$\{\overset{1}{L}(u), \overset{2}{L}(v)\} = \left\{\frac{1}{u}\overset{1}{\Omega} + \frac{1}{u^2}\overset{1}{\Gamma}, \frac{1}{v}\overset{2}{\Omega} + \frac{1}{v^2}\overset{2}{\Gamma}\right\} = \frac{1}{uv}\{\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}\} + \frac{1}{u^2 v}\{\overset{1}{\Gamma}, \overset{2}{\Omega}\} + \frac{1}{uv^2}\{\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Gamma}\}$$

$$\begin{aligned}
&\{\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}\}^{i_1 j_1}_{i_2 j_2} = \\
&= \left\{-\frac{1}{2}(x_{i_1} y_{j_1} - y_{i_1} x_{j_1}) - \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\frac{\mu_{j_1}}{x_{j_1}} x_{i_1} + \frac{\mu_{i_1}}{x_{i_1}} x_{j_1}\right),\right. \\
&\qquad\qquad \left. -\frac{1}{2}(x_{i_2} y_{j_2} - y_{i_2} x_{j_2}) - \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\frac{\mu_{j_2}}{x_{j_2}} x_{i_2} + \frac{\mu_{i_2}}{x_{i_2}} x_{j_2}\right)\right\} = \\
&= \frac{1}{4}\{x_{i_1} y_{j_1} - x_{j_1} y_{i_1}, x_{i_2} y_{j_2} - x_{j_2} y_{i_2}\} + \frac{i}{2\sqrt{2}}\left\{\frac{\mu_{j_1}}{x_{j_1}} x_{i_1} + \frac{\mu_{i_1}}{x_{i_1}} x_{j_1}, x_{i_2} y_{j_2} - x_{j_2} y_{i_2}\right\} - \\
&\qquad\qquad - \frac{i}{2\sqrt{2}}\left\{\frac{\mu_{j_2}}{x_{j_2}} x_{i_2} + \frac{\mu_{i_2}}{x_{i_2}} x_{j_2}, x_{i_1} y_{j_1} - x_{j_1} y_{i_1}\right\} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}(\delta_{i_1j_2}y_{j_1}x_{i_2} - \delta_{j_1i_2}x_{i_1}y_{j_2} - \delta_{i_1i_2}y_{j_1}x_{j_2} + \delta_{j_1j_2}x_{i_1}y_{i_2} - $$
$$- \delta_{j_1j_2}y_{i_1}x_{i_2} + \delta_{i_1i_2}x_{j_1}y_{j_2} + \delta_{j_1i_2}y_{i_1}x_{j_2} - \delta_{i_1j_2}x_{j_1}y_{i_2}) +$$
$$+ \frac{i}{2\sqrt{2}}(\frac{\mu_{j_1}}{x_{j_1}}x_{i_2}\delta_{i_1j_2} - \frac{\mu_{j_1}}{x_{j_1}^2}x_{i_1}x_{i_2}\delta_{j_1j_2} - \frac{\mu_{j_1}}{x_{j_1}}x_{j_2}\delta_{i_1i_2} + \frac{\mu_{j_1}}{x_{j_1}^2}x_{i_1}x_{j_2}\delta_{j_1i_2} +$$
$$+ \frac{\mu_{i_1}}{x_{i_1}}x_{i_2}\delta_{j_1j_2} - \frac{\mu_{i_1}}{x_{i_1}^2}x_{j_1}x_{i_2}\delta_{i_1j_2} - \frac{\mu_{i_1}}{x_{i_1}}x_{j_2}\delta_{j_1i_2} + \frac{\mu_{i_1}}{x_{i_1}^2}x_{j_1}x_{j_2}\delta_{i_1i_2}) -$$
$$- \frac{i}{2\sqrt{2}}(1 \leftrightarrow 2) =$$
$$= \frac{1}{4}(\delta_{i_1i_2}(x_{j_1}y_{j_2} - y_{j_1}x_{j_2}) - \delta_{i_1j_2}(x_{j_1}y_{i_2} - y_{j_1}x_{i_2}) -$$
$$- \delta_{j_1i_2}(x_{i_1}y_{j_2} - y_{i_1}x_{j_2}) + \delta_{j_1j_2}(x_{i_1}y_{i_2} - y_{i_1}x_{i_2})) +$$
$$+ \frac{i}{2\sqrt{2}}\left(\delta_{i_1i_2}\left(-\frac{\mu_{j_1}}{x_{j_1}}x_{j_2} + \frac{\mu_{j_2}}{x_{j_2}}x_{j_1}\right) -\right.$$
$$- \delta_{i_1j_2}\left(\frac{\mu_{i_1}}{x_{i_1}^2}x_{j_1}x_{i_2} - \frac{\mu_{j_1}}{x_{j_1}}x_{i_2} + \frac{\mu_{j_2}}{x_{j_2}^2}x_{j_1}x_{i_2} - \frac{\mu_{i_2}}{x_{i_2}}x_{j_1}\right) +$$
$$\left.+\delta_{j_1i_2}\left(\frac{\mu_{j_1}}{x_{j_1}^2}x_{i_1}x_{j_2} - \frac{\mu_{i_1}}{x_{i_1}}x_{j_2} + \frac{\mu_{i_2}}{x_{i_2}^2}x_{i_1}x_{j_2} - \frac{\mu_{j_2}}{x_{j_2}}x_{i_1}\right) - \delta_{j_1j_2}\left(-\frac{\mu_{i_1}}{x_{i_1}}x_{i_2} + \frac{\mu_{i_2}}{x_{i_2}}x_{i_1}\right)\right)$$
$$\{\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Gamma}\}^{i_1j_1}_{i_2j_2} = \frac{1}{4}\{x_{i_1}y_{j_1} - y_{i_1}x_{j_1}, x_{i_2}y_{j_2}\} =$$
$$\frac{1}{4}(\delta_{i_1i_2}x_{j_1}x_{j_2} + \delta_{i_1j_2}x_{j_1}x_{i_2} - \delta_{j_1i_2}x_{i_1}x_{j_2} - \delta_{j_1j_2}x_{i_1}x_{i_2})$$
$$\{\overset{1}{\Gamma}, \overset{2}{\Omega}\}^{i_1j_1}_{i_2j_2} = -\{\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Gamma}\}^{i_2j_2}_{i_1j_1} = -\frac{1}{4}(\delta_{i_1i_2}x_{j_1}x_{j_2} - \delta_{i_1j_2}x_{j_1}x_{i_2} + \delta_{j_1i_2}x_{i_1}x_{j_2} - \delta_{j_1j_2}x_{i_1}x_{i_2})$$

Теперь найдём компоненты $\mathcal{B} = [r_1, \overset{1}{L}(u)] + [r_2, \overset{2}{L}(v)]$:

$$[\mathcal{P}, \overset{1}{L}(u)]^{i_1j_1}_{i_2j_2} = \mathcal{P}^{i_1k_1}_{i_2k_2}(\overset{1}{L})^{k_1j_1}_{k_2j_2} - (\overset{1}{L})^{i_1k_1}_{i_2k_2}\mathcal{P}^{k_1j_1}_{k_2j_2} =$$
$$\delta_{i_1k_2}\delta_{k_1i_2}L_{k_1j_1}\delta_{k_2j_2} - L_{i_1k_1}\delta_{i_2k_2}\delta_{k_1j_2}\delta_{j_1k_2} =$$
$$= L_{i_2j_1}(u)\delta_{i_1j_2} - L_{i_1j_2}(u)\delta_{j_1i_2}$$
$$[\mathcal{P}, \overset{2}{L}(v)]^{i_1j_1}_{i_2j_2} = \delta_{i_1k_2}\delta_{k_1i_2}\delta_{k_1j_1}L_{k_2j_2} - \delta_{i_1k_1}L_{i_2k_2}\delta_{k_1j_2}\delta_{j_1k_2} = L_{i_1j_2}(v)\delta_{j_1i_2} - L_{i_2j_1}(v)\delta_{i_1j_2}$$
$$[\mathcal{K}, \overset{1}{L}(u)]^{i_1j_1}_{i_2j_2} = \delta_{i_1i_2}\delta_{k_1k_2}L_{k_1j_1}\delta_{k_2j_2} - L_{i_1k_1}\delta_{i_2k_2}\delta_{k_1k_2}\delta_{j_1j_2} = \delta_{i_1i_2}L_{j_2j_1}(u) - \delta_{j_1j_2}L_{i_1i_2}(u)$$
$$[\mathcal{K}, \overset{2}{L}(v)]^{i_1j_1}_{i_2j_2} = \delta_{i_1i_2}\delta_{k_1k_2}\delta_{k_1j_1}L_{k_2j_2} - \delta_{i_1k_1}L_{i_2k_2}\delta_{k_1k_2}\delta_{j_1j_2} = \delta_{i_1i_2}L_{j_1j_2}(v) - \delta_{j_1j_2}L_{i_2i_1}(v)$$
$$\Rightarrow \mathcal{B}^{i_1j_1}_{i_2j_2} = [\alpha\mathcal{P} + \beta\mathcal{K}, \overset{1}{L}(u)] + [\gamma\mathcal{P} + \delta\mathcal{K}, \overset{2}{L}(v)] =$$
$$= \delta_{i_1i_2}(\beta L_{j_2j_1}(u) + \delta L_{j_1j_2}(v)) + \delta_{i_1j_2}(\alpha L_{i_2j_1}(u) - \gamma L_{i_2j_1}(v)) -$$
$$- \delta_{j_1i_2}(\alpha L_{i_1j_2}(u) - \gamma L_{i_1j_2}(v)) - \delta_{j_1j_2}(\beta L_{i_1i_2}(u) + \delta L_{i_2i_1}(v))$$

Сравнивая коэффициенты при $\delta_{i_1i_2}$ в $\{\overset{1}{L}(u), \overset{2}{L}(v)\}^{i_1j_1}_{i_2j_2}$ и в $\mathcal{B}^{i_1j_1}_{i_2j_2}$, находим:

$$\beta L_{j_2 j_1}(u) + \delta L_{j_1 j_2}(v) = (\beta+\delta)\alpha_{j_1}\cdot\delta_{j_1 j_2} +$$
$$+\frac{\beta}{u}\left(-\frac{1}{2}(x_{j_2}y_{j_1} - y_{j_2}x_{j_1}) - \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\frac{\mu_{j_2}}{x_{j_2}}x_{j_1} + \frac{\mu_{j_1}}{x_{j_1}}x_{j_2}\right)\right) +$$
$$+\frac{\delta}{v}\left(-\frac{1}{2}(x_{j_1}y_{j_2} - y_{j_1}x_{j_2}) - \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\frac{\mu_{j_1}}{x_{j_1}}x_{j_2} + \frac{\mu_{j_2}}{x_{j_2}}x_{j_1}\right)\right) - \frac{\beta}{u^2}\frac{x_{j_1}x_{j_2}}{2} - \frac{\delta}{v^2}\frac{x_{j_1}x_{j_2}}{2} =$$
$$= \frac{1}{uv}\left(\frac{1}{4}(x_{j_1}y_{j_2} - y_{j_1}x_{j_2}) + \frac{i}{2\sqrt{2}}\left(-\frac{\mu_{j_1}}{x_{j_1}}x_{j_2} + \frac{\mu_{j_2}}{x_{j_2}}x_{j_1}\right)\right) - \frac{1}{u^2v}\frac{x_{j_1}x_{j_2}}{4} + \frac{1}{uv^2}\frac{x_{j_1}x_{j_2}}{4} \tag{8}$$

Отсюда: $\delta = -\beta$,

$$\beta\left(-\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2}\right)\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{u^2v} + \frac{1}{uv^2}\right) \Longrightarrow \beta = \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{uv^2} - \frac{1}{u^2v}}{\frac{1}{v^2} - \frac{1}{u^2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{u+v}$$

Видно, что равенства в (8) можно добиться лишь при $\mu_j = 0$ для всех j, — в противном случае анзатц оказывается неприменим. Если же это условие выполнено, то указанным выбором β и δ мы получаем равенство в (8).

Теперь сравним коэффициенты при $\delta_{i_1 j_2}$ в $\{\overset{1}{L}(u), \overset{2}{L}(v)\}^{i_1 j_1}_{i_2 j_2}$ и в $\mathcal{B}^{i_1 j_1}_{i_2 j_2}$:

$$\alpha L_{i_2 j_1}(u) - \gamma L_{i_2 j_1}(v) = (\alpha-\gamma)\alpha_{j_1}\cdot\delta_{i_2 j_1} -$$
$$-\left(\frac{\alpha}{u} - \frac{\gamma}{v}\right)\left(\frac{1}{2}(x_{i_2}y_{j_1} - y_{i_2}x_{j_1}) - \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\frac{\mu_{i_2}}{x_{i_2}}x_{j_1} + \frac{\mu_{j_1}}{x_{j_1}}x_{i_2}\right)\right) - \left(\frac{\alpha}{u^2} - \frac{\gamma}{v^2}\right)\frac{x_{i_2}x_{j_1}}{2} =$$
$$= \frac{1}{uv}\left(-\frac{1}{4}(x_{j_1}y_{i_2} - y_{j_1}x_{i_2}) - \frac{i}{2\sqrt{2}}\left(2\frac{\mu_{i_1}}{x_{i_1}^2}x_{j_1}x_{i_2} - \frac{\mu_{j_1}}{x_{j_1}}x_{i_2} - \frac{\mu_{i_2}}{x_{i_2}}x_{j_1}\right)\right) +$$
$$+\left(\frac{1}{u^2v} + \frac{1}{uv^2}\right)\frac{x_{j_1}x_{i_2}}{4} \tag{9}$$

Это равенство выполняется при $\mu_j = 0$, $\alpha = \gamma = \frac{1}{2(u-v)}$. Сравнение коэффициентов при $\delta_{j_1 i_2}$ и $\delta_{j_1 j_2}$ никаких новых соотношений для $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ не даёт. Итак, мы получили, что R-матрицы для L-оператора модели Росохатиуса, найденного в [1], при условии $\mu_j = 0$ имеют вид

$$r_1 = \frac{1}{2(u-v)}\mathcal{P} + \frac{1}{2(u+v)}\mathcal{K},\ r_2 = \frac{1}{2(u-v)}\mathcal{P} - \frac{1}{2(u+v)}\mathcal{K}$$

Список литературы

[1] Adams M. R., Hanard J., Hurtubise J., *Dual Moment maps into Loop Algebras*, Lett. Math. Phys., **20**, (1990), 249-308.