САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
им. В. А. Стеклова РАН

На правах рукописи

МНЁВ ПАВЕЛ НИКОЛАЕВИЧ

ДИСКРЕТНАЯ *BF*-ТЕОРИЯ

01.01.03 — математическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание учёной степени кандидата
физико–математических наук

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ:
академик РАН
Фаддеев Л. Д.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2008

Содержание

Основные обозначения.

- $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{F}$ и т.д. — $\mathbb{Z}$-градуированные многообразия.
- $\mathrm{Fun}(\mathcal{M})$ — алгебра функций на $\mathcal{M}$.
- $V[k]$ — сдвиг градуировки $\mathbb{Z}$-градуированного векторного пространства. При этом градуировка *функций* на V сдвигается на $+k$ (соответственно, градуировка самих векторов V — на $-k$).
- $\Omega^\bullet(\mathcal{M})$ — алгебра дифференциальных форм на $\mathcal{M}$.
- $S^\bullet$, $\Lambda^\bullet$ — симметрическая и внешняя алгебра.
- ϵ или gh — грассманова степень (духовое число).
- $T[1]\mathcal{M}$, $T^*[-1]\mathcal{M}$ — касательное и кокасательное расслоение со сдвинутой градуировкой слоя.
- $< \bullet, \bullet >$ — каноническое спаривание между $\mathbb{Z}$-градуированным векторным пространством V и двойственным V^*. Обычно предполагается, что первый аргумент — из V^*, второй — из V.
- ω — нечётная симплектическая форма (только в разделе 2; в дальнейшем обозначение ω закрепляется за супер-связностью).
- μ, ρ — мера на $\mathbb{Z}$-градуированном многообразии и её плотность.
- (z^a) — общая система координат.
- (x^i, ξ_i) — система координат Дарбу.
- (Φ^a, Φ^+_a) — (начиная с 3.3) система координат Дарбу, связанная с “физическим” лагранжевым подмногообразием (БРСТ-полей).
- $\{\bullet, \bullet\}$ — анти-скобка.
- Δ — БВ-лапласиан.
- $\mathcal{L}$ — лагранжево подмногообразие.
- Ψ — фиксирующий калибровку фермион.
- $\hbar$ — инфинитезимальный параметр (постоянная Планка).
- S_{cl}, S — классическое действие и БВ-действие, S^k — коэффициент при $\hbar^k$ в S (“k-петлевая часть S”).
- ω, p — супер-поля BF-теории (начиная с 3.4).
- $[\bullet, \bullet]$ — коммутатор, всегда понимаемый в супер-смысле.
- $\theta(x)$ — функция Хэвисайда: $\theta(x) = 1$ при $x > 0$ и $\theta(x) = 0$ при $x < 0$.
- $C^m_n = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$ — биномиальный коэффициент.
- $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли калибровочной группы G.
- Ξ — клеточный комплекс (обычно, триангуляция многообразия или кубическое клеточное разбиение многообразия), $C^\bullet(\Xi)$ — комплекс клеточных коцепей на Ξ.

- $H^\bullet(V)$ — когомологии $\mathbb{Z}$-градуированного векторного пространства V, $H^\bullet(M)$ — когомологии де Рама многообразия M.
- Δ^n — стандартный n-симплекс с барицентрическими координатами $(t_0, \dots, t_n)$, $t_0 + \dots + t_n = 1$, $t_0 \geq 0, \dots, t_n \geq 0$, I^n — стандартный n-куб с декартовыми координатами $(t_1, \dots, t_n)$, $0 \leq t_1 \leq 1, \dots, 0 \leq t_n \leq 1$.
- σ — симплекс триангуляции, ζ — клетка кубического клеточного комплекса.
- I или $[0,1]$ — единичный отрезок, $\mathcal{S}^n$ — n-сфера, $\mathbb{T}^n$ — n-тор, KB — бутылка Клейна.
- B_n — числа Бернулли, $B_n(t)$ — полиномы Бернулли.
- ι — вложение, r — ретракция, K — цепная гомотопия.
- R — генератор инфинитезимального канонического преобразования.
- Q — когомологическое векторное поле (БРСТ-оператор).
- $l_{(n)}, q_{(n)}$ — классические и квантовые n-арные операции.
- χ_σ — форма Уитни, ассоциированная с симплексом σ.

1. Введение

Данная работа содержит результаты, полученные автором в рамках работы над симплициальной программой А. Лосева для топологических квантовых теорий поля. Цель программы — эквивалентная замена топологической теории поля в лагранжевом формализме на симплициальный (или, в более общей ситуации, клеточный) вариант. При этом бесконечномерное пространство полей топологической теории заменяется на некоторое конечномерное пространство, связанное с триангуляцией (или с более общим клеточным разбиением). Действие топологической теории заменяется на некоторую функцию (симплициальное действие) на этом конечномерном пространстве. Наблюдаемые топологической теории также должны быть заменены на симплициальные аналоги. При этом замена топологической теории поля на её симплициальную версию должна быть эквивалентной, т.е. корреляторы наблюдаемых должны переходить в корреляторы соответствующих симплициальных наблюдаемых (при этом не предполагается переходить к пределу измельчения триангуляции: любая триангуляция должна давать точный ответ). Обладая симплициальным эквивалентом топологической теории поля, мы можем вычислять корреляторы последней с помощью конечномерных интегралов, а не континуальных.

Одной из целей симплициальной программы является построение симплициальной версии теории Черна-Саймонса (дающей инварианты узлов и 3-многообразий [30]) и пуассоновой сигма-модели (обслуживающей деформационное квантование Концевича [19], [10]). В данной работе рассматривается более простая (однако, тесно связанная с обеими перечисленными выше) модель топологической теории поля: BF-теория. Кроме того, существенное упрощение состоит в том, что мы не рассматриваем наблюдаемые. Роль корреляторов для нас играет "эффективное действие на когомологиях де Рама многообразия" — интересный топологический инвариант многообразия, который может быть вычислен из симплициальной версии BF-теории (раздел 7.1).

Классическое действие BF-теории на компактном ориентируемом многообразии M имеет вид

$$S_{cl} = \mathrm{tr} \int_M B \wedge F_A$$

где $F_A = dA + A \wedge A$ есть кривизна связности A. Классические поля теории есть связность A в тривиальном главном G-расслоении на M и поле B — $\mathfrak{g}$-значная $(\dim M - 2)$-форма на M. Здесь G — компактная группа Ли (калибровочная группа) и $\mathfrak{g}$ — её алгебра Ли. BF-теория определена для многообразия M произвольной размерности, причём M разрешено иметь границу (переходя к канонической BF-теории, см. раздел 3.4, мы также разрешаем неориентируемые M; во избежание путаницы заметим, что слово "канонический" здесь не имеет отношения к каноническому квантованию). Классическое действие

BF-теории имеет довольно сложную (приводимую и открытую на втором этаже башни приводимости) калибровочную симметрию в размерностях ≥ 4, и для решения задачи фиксации калибровки необходим формализм Баталина-Вилковыского. В формализме Баталина-Вилковыского (в дальнейшем — "БВ-формализм") классические поля A и B заменяются на БВ-супер-поля $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ — две неоднородные $\mathfrak{g}$-значные дифференциальные формы на M (являющиеся удобным способом собрать вместе исходные классические поля, духи для всех этажей башни приводимости калибровочной симметрии, антиполя к классическим полям и антиполя к духам). В терминах супер-полей $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ мастер-действие (оно же БВ-действие), имеет вид

$$S = \mathrm{tr} \int_M \tilde{B} \wedge (d\tilde{A} + \tilde{A} \wedge \tilde{A})$$

Симплициальный эквивалент BF-теории естественно строить на уровне мастер-действия и пространства БВ-полей (а не классического действия и классического пространства полей). В качестве пространства (симплициальных) БВ-полей для триангуляции Ξ многообразия M берётся некоторое конечномерное пространство $\mathcal{F}_\Xi$, строящееся по пространству $C^\bullet(\Xi, \mathfrak{g})$ $\mathfrak{g}$-значных клеточных коцепей на Ξ (которые играют роль симплициального аналога $\mathfrak{g}$-значных дифференциальных форм на M). Именно, $\mathcal{F}_\Xi$ строится как нечётное кокасательное расслоение, к сдвинутому по градуировке пространству клеточных коцепей: $\mathcal{F}_\Xi = T^*[-1](C^\bullet(\Xi, \mathfrak{g})[1])$. В качестве координат в базе $\mathcal{F}_\Xi$ используется симплициальное супер-поле ω_Ξ — неоднородная $\mathfrak{g}$-значная клеточная коцепь, компонентам разных степеней которой приписаны духовые числа, так что выполнено $\deg + \mathrm{gh} = 1$; в качестве координат в слое используется второе симплициальное супер-поле p_Ξ — неоднородная $\mathfrak{g}^*$-значная клеточная цепь, компонентам которой также приписаны духовые числа, так что выполнено $\deg + \mathrm{gh} = -2$. Здесь ω_Ξ — симплициальный аналог БВ-супер-поля $\tilde{A}$ топологической BF-теории, а p_Ξ — симплициальный аналог $\tilde{B}_\flat$, т.е. БВ-супер-поля $\tilde{B}$ топологической BF-теории, с опущенным индексом по отношению к спариванию $\mathrm{tr} \int_M \bullet \wedge \bullet$ (формулировка топологической BF-теории в терминах полей $A, B_\flat$ с мастер-действием $S = < \tilde{B}_\flat, d\tilde{A} + \frac{1}{2}[\tilde{A}, \tilde{A}] >$ иногда называется "канонической" BF-теорией).

В качестве симплициального БВ-действия предлагается взять эффективное действие, индуцированное на $\mathcal{F}_\Xi$. Имеется ввиду, что мы разделяем бесконечномерное пространство БВ-полей топологической BF-теории на M (точнее, её канонического варианта) на инфракрасную и ультрафиолетовую части

$$\mathcal{F}_M = \mathcal{F}' \oplus \mathcal{F}''$$

причём инфракрасная часть есть $\mathcal{F}' \cong \mathcal{F}_\Xi$ (ультрафиолетовая часть пространства $\mathcal{F}_M$, тем самым, бесконечномерна). Эффективное действие S_Ξ на инфракрасных полях следует определить с помощью континуального интеграла по ультрафиолетовым полям. Это стандартная конструкция квантовой теории поля, и ясно, в каком смысле она приводит к эквивалентному действию: квантовые флуктуации в ультрафиолетовых направлениях уже учтены в S_Ξ. Однако, поскольку мы имеем дело с калибровочной теорией в БВ-формализме, конструкция эффективного действия должна быть модифицирована (стандартная конструкция давала бы пертурбативно-неопределённый интеграл по $\mathcal{F}''$). Именно, следует выбрать лагранжево подмногообразие в пространстве ультрафиолетовых полей $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}''$ и определять эффективное БВ-действие на $\mathcal{F}'$ как континуальный интеграл по $\mathcal{L}$, а не по всему $\mathcal{F}''$. Интегралы такого типа называются БВ-интегралами и выбор $\mathcal{L}$ есть выбор калибровки для БВ-интеграла. Конструкция эффективного БВ-действия обсуждается в разделе 4.2. Главные особенности этой конструкции: во-первых, она переводит решения мастер-уравнения в решения мастер уравнения на инфракрасных полях. Во-вторых, зависимость от выбора $\mathcal{L}$ контролируется, а именно, изменение $\mathcal{L}$ приводит к каноническому преобразованию для эффективного действия. Для интересующего нас случая индуцирования эффективного действия для топологической BF-теории на пространстве инфракрасных БВ-полей $\mathcal{F}_\Xi$ предлагается строить лагранжево подмногообразие $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}''$ с помощью оператора цепной гомотопии K_Ξ, стягивающей комплекс де Рама многообразия M на подкомплекс форм Уитни триангуляции Ξ, изоморфный комплексу клеточных коцепей на Ξ (разделы 4.3, 5.1, 5.2). Оператор K_Ξ “склеивается” из некоторых явно заданных операторов (операторов Дюпона) для отдельных симплексов Ξ. Важным свойством эффективного действия для BF-теории является то, что соответствующий БВ-интеграл раскладывается в ряд по диаграммам Фейнмана, содержащий только древесные и однопетлевые диаграммы (раздел 4.3, Теорема 5).

Конструкция K_Ξ или, иначе, выбор калибровки для БВ-интеграла, определяющего индуцирование, приводят к другому важному свойству симплициального действия S_Ξ — симплициальной локальности (раздел 5.3, Теорема 7): S_Ξ представляется в виде суммы вкладов отдельных симплексов триангуляции $S_\Xi = \sum_{\sigma\in\Xi} \bar{S}_\sigma$. При этом вклады $\bar{S}_\sigma$ зависят только от сужения полей ω_Ξ, p_Ξ симплициальной BF-теории на данный симплекс σ. Вклады $\bar{S}_\sigma$ можно восстановить, зная симплициальное действие для одного симплекса Δ^D со стандартной триангуляцией для каждой размерности $D \geq 0$. Таким образом, благодаря симплициальной локальности, задача вычисления симплициального действия S_Ξ для произвольной триангуляции Ξ произвольного многообразия M сводится к серии универсальных вычислений: требуется вычислить симплициальное действие S_{Δ^D} для стандартного симплекса Δ^D в каждой размерности $D \geq 0$.

В размерности $D = 0$ задача вычисления S_{Δ^D} оказывается тривиальной, в размерности $D = 1$ (индуцирование эффективного действие для отрезка) не вполне тривиальной, однако точно разрешимой (раздел 5.5, Теорема 8). Факт точной вычислимости здесь связан с тем, что действие топологической BF-теории на отрезке, суженное на лагранжево подмногообразие $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}''$, по которому вычисляется БВ-интеграл, оказывается квадратичным, а значит, сам БВ-интеграл — гауссовым. Для симплекса старшей размерности $D \geq 2$ такого упрощения не происходит, и мы не знаем, как получить точный результат. Однако, можно получить пертурбативный ответ (раздел 5.6, Теорема 9) для S_{Δ^D}, т.е. предъявить начальный отрезок степенного разложения по полям, вычисляя несколько первых фейнмановских диаграмм для соответствующего БВ-интеграла. В разделе 5.6 мы демонстрируем технику, позволяющую вычислять древесные фейнмановские диаграммы для симплекса общей размерности и частично восстанавливать значения петлевых диаграмм (также в общей размерности) по древесным. Явное вычисление петлевых диаграмм технически намного сложнее. На примере простейшей нетривиальной петлевой диаграммы для $D = 2$ такое вычисление продемонстрировано в разделе 5.6.1. Имея пертурбативный ответ для Δ^D с некоторой точностью, мы знаем симплициальное BF-действие для произвольной триангуляции Ξ произвольного многообразия M с той же точностью, и с той же точностью можем отсюда получить эффективное действие на когомологиях де Рама многообразия M, вычисляя (теперь уже конечномерный) БВ-интеграл. Пример, когда M есть окружность и Ξ — её клеточное разбиение на два отрезка и две точки, разобран в разделе 7.3.1 (здесь мы вычисляем точный ответ, а не пертурбативный, поскольку симплициальное действие в размерностях $D = 0, 1$ нам известно точно).

В разделе 6 мы рассматриваем конструкцию дискретной BF-теории для кубического клеточного разбиения Ξ многообразия M (т.е. все клетки Ξ — кубы разных размерностей и клеткам разрешено примыкать только по грани). Эта конструкция мало отличается от симплициальной BF-теории, в частности здесь выполнено свойство клеточной локальности для клеточного действия (раздел 6.2, Теорема 10), полностью аналогичное симплициальному случаю. Тем самым, вычисление S_Ξ для произвольного кубического клеточного разбиения Ξ произвольного многообразия M сводится к серии универсальных вычислений клеточных действий S_{I^D} для кубов I^D в каждой размерности $D \geq 0$. Отличительной особенностью кубического случая от симплициального является свойство факторизации фейнмановских диаграмм для S_{I^D} (раздел 6.3, Теорема 11), существенно упрощающая пертурбативные вычисления для S_{ID}. Несмотря на это упрощение, мы, как и в случае D-симплекса, не можем написать точный ответ для S_{ID} при $D \geq 2$. Однако, оказывается, что ограничения действия S_{ID} на некоторые специальные подпространства в пространстве клеточных полей (например, подпространство полей, удовлетворяющих условию периодичности) могут быть точно вычислены. Таким образом возникает набор примеров многообразий M со специальными клеточными разбиениями Ξ, для которых клеточное действие вычисляется в точности (например, тор, цилиндр, бутылка Клейна — см. раздел 6.4). Из этих примеров могут быть получены примеры многообразий, для которых точно вычисляется эффективное BF-действие на когомологиях (раздел 7.3). Также в разделе 7.2 мы доказываем некоторые свойства эффективного действия на когомологиях, позволяющие расширить класс примеров многообразий, для которых оно может быть точно вычислено.

Процедура индуцирования эффективного действия для BF-теории, частными случаями которой являются переход от топологической BF-теории на многообразии M к дискретной теории на триангуляции (или кубическом клеточном разбиении) Ξ, и переход от дискретной теории на триангуляции к эффективной теории на когомологиях де Рама M, имеет также алгебраическую интерпретацию. Именно, действие топологической BF-теории может быть понято, как производящая функция для структуры DGLA (дифференциальной градуированной алгебры Ли) на пространстве $\Omega^\bullet(M, \mathfrak{g})$ $\mathfrak{g}$-значных дифференциальных форм на M (раздел 4.1). Далее, симплициальное действие на триангуляции (или кубическом комплексе) Ξ можно интерпретировать, как производящую функцию для "qL_∞"-структуры на пространстве $C^\bullet(\Xi, \mathfrak{g})$ $\mathfrak{g}$-значных клеточных коцепей на Ξ (раздел 4.4). Эта структура является некоторым естественным "однопетлевым" вариантом L_∞-алгебры. При этом БВ-интеграл, определяющий переход от действия топологической BF-теории к действию S_Ξ, можно понять как задающий "гомотопический перенос" алгебраической структуры с пространства дифференциальных форм $\Omega^\bullet(M, \mathfrak{g})$ на пространство коцепей $C^\bullet(\Xi, \mathfrak{g})$. Мы попытались прояснить эту идею в разделе 4.5. В этих терминах интерпретируется также переход от дискретной BF-теории к эффективной теории на когомологиях, или от исходной топологической BF-теории к эффективной теории на когомологиях. Инвариант многообразия M, даваемый BF-теорией,— эффективное действие на когомологиях, рассматриваемое с точностью до канонических преобразований, может быть в алгебраической интерпретации понят как "гомотопический тип алгебры $\mathfrak{g}$-значных дифференциальных форм на M, как qL_∞-алгебры" (см. разделы 4.5.1, 7.1).

1.1. **Основные результаты.** Основными результатами данной работы мы считаем следующие:

- Утверждение о симплициальной локальности симплициального действия (раздел 5.3, Теорема 7): для всякой триангуляции Ξ всякого многообразия M симплициальное BF-действие $S_\Xi(\omega_\Xi, p_\Xi)$ раскладывается в сумму по симплексам триангуляции $\sigma \in \Xi$ локальных вкладов $\bar{S}_\sigma$ — некоторых универсальных функций (зависящих только от размерности σ), вычисленных на сужениях симплициальных полей ω_Ξ, p_Ξ на симплекс σ. Точнее, симплициальные поля представляются в виде $\omega_\Xi = \sum_{\sigma\in\Xi} e_\sigma \omega^\sigma$, $p_\Xi = \sum_{\sigma\in\Xi} p_\sigma e^\sigma$, где $\{e_\sigma\}, \{e^\sigma\}$ — базисные коцепи и базисные цепи на Ξ, ассоциированные с симплексами $\sigma \in \Xi$. При этом переменные $\omega^\sigma \in \mathfrak{g}$ и $p_\sigma \in \mathfrak{g}^*$ (им также приписаны некоторые духовые числа, зависящие от размерности σ). Тогда утверждение о симплициальной локальности говорит, что симплициальное действие S_Ξ представляется в виде

$$S_\Xi(\omega_\Xi, p_\Xi) = \sum_{\sigma\in\Xi} \bar{S}_\sigma(\{\omega^{\sigma'}\}_{\sigma'\subset\sigma}, p_\sigma)$$

  (детальное обсуждение — см. в разделе 5.3). Совершенно аналогичное утверждение выполняется также для случая клеточного действия S_Ξ для кубического клеточного разбиеня Ξ многообразия M (раздел 6.2, Теорема 10).

- Явный ответ для симплициального BF-действия на 1-симплексе Δ^1 со стандартной триангуляцией (раздел 5.5, Теорема 8):

$$S_{\Delta^1}(\omega^0, \omega^1, \omega^{01}, p_0, p_1, p_{01}) = \left\langle p_0, \frac{1}{2}[\omega^0, \omega^0] \right\rangle_{\mathfrak{g}} + \left\langle p_1, \frac{1}{2}[\omega^1, \omega^1] \right\rangle_{\mathfrak{g}} +$$
$$+ \left\langle p_{01}, \frac{1}{2}[\omega^{01}, \omega^0 + \omega^1] + \left(\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}{2} \coth \frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}{2} \right) \circ (\omega^1 - \omega^0) \right\rangle_{\mathfrak{g}} + \hbar\, \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}} \log \left(\frac{\sinh \frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}{2}}{\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}{2}} \right)$$

- Пертурбативный результат для симплициального BF-действия для D-симплекса Δ^D со стандартной триангуляцией (раздел 5.6, Теорема 9):

$$S_{\Delta^D}(\{\omega^\sigma\}_{\sigma\subset\Delta^D}, \{p_\sigma\}_{\sigma\subset\Delta^D}) = \sum_{\sigma,\sigma_1\subset\Delta^D} c^\sigma_{\sigma_1} < p_\sigma, \omega^{\sigma_1} >_{\mathfrak{g}} +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{\sigma,\sigma_1,\sigma_2\subset\Delta^D} c^\sigma_{\sigma_1,\sigma_2} < p_\sigma, [\omega^{\sigma_1}, \omega^{\sigma_2}] >_{\mathfrak{g}} + \frac{1}{2} \sum_{\sigma,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\subset\Delta^D} c^\sigma_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3} < p_\sigma, [\omega^{\sigma_1}, [\omega^{\sigma_2}, \omega^{\sigma_3}]] >_{\mathfrak{g}} +$$
$$+ \hbar \frac{1}{2} \sum_{\sigma_1,\sigma_2\subset\Delta^D} q_{\sigma_1,\sigma_2} \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}_{\omega^{\sigma_1}} \mathrm{ad}_{\omega^{\sigma_2}}) + O(p\omega^4 + \hbar\omega^3)$$

  где $<,>_{\mathfrak{g}}$ есть спаривание между $\mathfrak{g}^*$ и $\mathfrak{g}$, и $\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}$ — след в присоединённом представлении $\mathfrak{g}$. Комбинаторные коэффициенты $c^\sigma_{\sigma_1}$, $c^\sigma_{\sigma_1,\sigma_2}$, $c^\sigma_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3}, q_{\sigma_1,\sigma_2}$ зависят от комбинаторики пересечения граней в Δ^D и их возможные значения есть

$$\begin{aligned} c^{\sigma}_{\sigma_1} &\in \{0, \pm 1\} \\ c^{\sigma}_{\sigma_1,\sigma_2} &\in \{0, \pm\frac{|\sigma_1|!\,|\sigma_2|!}{(|\sigma_1|+|\sigma_2|+1)!}\} \\ c^{\sigma}_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3} &\in \{0, \pm\frac{|\sigma_1|!\,|\sigma_2|!\,|\sigma_3|!}{(|\sigma_2|+|\sigma_3|+1)\cdot(|\sigma_1|+|\sigma_2|+|\sigma_3|+1)!}\} \\ q_{\sigma_1,\sigma_2} &\in \{0, \hat{\mathcal{A}}_D + (D-1)\hat{\mathcal{B}}_D, \pm\hat{\mathcal{B}}_D\} \end{aligned}$$

где $|\sigma|$ — размерность симплекса, конкретное значение каждого коэффициента зависит от комбинаторики пересечения граней и их взаимных ориентаций (точная формулировка результата дана в разделе 5.6). Для $\hat{\mathcal{A}}_D$ известно выражение

$$\hat{\mathcal{A}}_D = \sum_{n=1}^{D} C^{n-1}_{D-1}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2(n+2)}$$

для $\hat{\mathcal{B}}_D$ известны лишь значения в низких размерностях $D \leq 3$:

$$\hat{\mathcal{B}}_0 = \hat{\mathcal{B}}_1 = 0,\ \hat{\mathcal{B}}_2 = \frac{1}{270},\ \hat{\mathcal{B}}_3 = \frac{1}{270} - \frac{1}{648}$$

(см. явное вычисление в разделе 5.6.1).

- Факторизационная теорема и пертурбативный ответ для клеточного BF-действия S_{I^D} для D-куба I^D (раздел 6.3, Теорема 11). Факторизационная теорема означает, что задача вычисления фейнмановских диаграмм для S_{I^D} сводится к задаче вычисления фейнмановских диаграмм для отрезка $I = \Delta^1$, однако с усложнённым пропагатором $K^{\lambda,\psi}$ (см. раздел 6.1), который есть не просто цепная гомотопия для отрезка, а линейная комбинация цепной гомотопии, проекции на формы Уитни и единицы.
- Набор примеров явно вычислимого клеточного действия (раздел 6.4, Утверждение 15) и примеры явно вычислимого эффективного действия на когомологиях (раздел 7.3). Здесь наиболее интересные примеры — окружность $M = \mathcal{S}^1$:

$$S_{H^\bullet(\mathcal{S}^1,\mathfrak{g})} =< p_+, \frac{1}{2}[\omega^+,\omega^+] >_{\mathfrak{g}} + < p_I, [\omega^I,\omega^+] >_{\mathfrak{g}} + \hbar\,\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}} \log\left(\frac{\sinh\frac{\mathrm{ad}_{\omega^I}}{2}}{\frac{\mathrm{ad}_{\omega^I}}{2}}\right)$$

(здесь индексы "+" и "I" у полей соответствуют базису $e_+ = 1,\ e_I = dt$ в когомологиях де Рама окружности $H^\bullet(\mathcal{S}^1)$) и бутылка Клейна $M = \mathrm{KB}$:

$$S_{H^\bullet(\mathrm{KB},\mathfrak{g})} =< p_{++}, \frac{1}{2}[\omega^{++},\omega^{++}] >_{\mathfrak{g}} + < p_{I+}, [\omega^{I+},\omega^{++}] >_{\mathfrak{g}} - \hbar\,\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}} \log\left(\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{I+}}}{2}\coth\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{I+}}}{2}\right)$$

(индексы "++", "$I+$" соответствуют базису $e_{++} = 1$, $e_{I+} = dt_1$ в $H^\bullet(\mathrm{KB})$).

1.2. **План работы.** Разделы 2, 3 являются вводными. Разделы 4 и 5 — центральные в данной работе: в 4 мы вводим необходимые конструкции на абстрактном уровне, в 5 — применяем их к построению симплициальной версии топологической BF-теории. В разделах 6 и 7 мы разрабатываем технику, позволяющую в специальных случаях получать точные ответы для эффективного BF-действия на когомологиях: в разделе 6 обсуждается дискретная BF-теория на кубическом клеточном разбиении многообразия и свойство факторизации фейнмановских диаграмм, в разделе 7 мы обсуждаем эффективное действие на когомологиях и некоторые примеры, когда оно точно вычисляется.

Теперь мы дадим более развёрнутый комментарий содержания работы по разделам.

- 1: Введение.
- 2: Мы даём краткий обзор формализма Баталина-Вилковыского и необходимых понятий супер-геометрии, основываясь преимущественно на работе А. Шварца [25].
- 3: Мы даём обзор трёх основных методов решения задачи фиксации калибровки для калибровочных теорий поля — метода Фаддеева-Попова, метода БРСТ и метода Баталина-Вилковыского. В разделе 3.4 мы вводим топологическую BF-теорию и описываем решение проблемы фиксации калибровки для неё, предложенное в [28], [16]. Детальный обзор BF-теории в формализме Баталина-Вилковыского см. в [11].
- 4: Мы в деталях обсуждаем конструкцию эффективного БВ-действия на примере естественного обобщения BF-теории в БВ-формализме — "абстрактной BF-теории". Также обсуждается алгебраическая интерпретация конструкции индуцирования эффективного действия.
  - 4.1: Мы вводим абстрактную BF-теорию — абстрактную модель калибровочной теории поля в БВ-формализме, ассоциированную с унимодулярной дифференциальной градуированной алгеброй Ли V. Частный случай абстрактной BF-теории для $V = \Omega^\bullet(M, \mathfrak{g})$ соответствует (каноническому варианту) топологической BF-теории на многообразии M.
  - 4.2: Обсуждается общая конструкция эффективного БВ-действия и её важнейшие свойства: решение мастер-уравнения переходит в решение мастер-уравнения, при деформации данных индуцирования (деформации калибровочного условия для БВ-интеграла) эффективное действие меняется на каноническое преобразование, каноническое преобразование исходного действия приводит к каноническому преобразованию эффективного действия (Утверждения 2, 4, 3).

– 4.3: Мы специализируем общую конструкцию эффективного БВ-действия на случай абстрактной BF-теории. Мы вводим класс удобных калибровок (лагранжевых подмногообразий в пространстве ультрафиолетовых полей), ассоциированных с цепными гомотопиями, стягивающими V на подкомплекс, и выводим пертурбативное разложение для эффективного действия (Теорема 5). Также мы обсуждаем зависимость эффективного действия от выбора данных индуцирования (Утверждение 6).

– 4.4: Мы даём алгебраическую интерпретацию эффективного действия для абстрактной BF-теории как производящей функции для некоторой алгебраической структуры на подкомплексе $V' \hookrightarrow V$ — структуры "qL_∞-алгебры", т.е. набора классических и квантовых операций $l_{(n)} : \Lambda^n V' \to V'$, $q_{(n)} : \Lambda^n V' \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих двум сериям квадратичных соотношений — "гомотопическим тождествам Якоби" и "гомотопическим соотношениям унимодулярности". qL_∞-алгебру можно понимать как некоторое естественное однопетлевое пополнение обычной L_∞-алгебры (такие объекты появлялись ранее в другом контексте и под другим названием — как алгебры над операдой "wheeled L_∞", см. [23]). Мы также даём другое эквивалентное описание структуры qL_∞-алгебры на V', как когомологического векторного поля Q на $V'[1]$, снабжённого согласованной с ним мерой μ на $V'[1]$.

– 4.5: Мы вводим класс "BF_∞-теорий", ассоциированных с qL_∞-алгебрами так же, как абстрактные BF-теории ассоциированы с унимодулярными алгебрами Ли. Понятие BF_∞-теории можно считать аксиоматизацией эффективной теории для абстрактной BF-теории. Эффективное действие для BF_∞-теории — это снова действие типа BF_∞, и мы формулируем ряд теории возмущений для такого индуцирования (Теорема 6). На языке qL_∞-алгебр операция перехода к эффективной теории формулируется как гомотопический перенос qL_∞-структуры на подкомплекс $V' \hookrightarrow V$. Также в разделе 4.5.1 мы обсуждаем понятие эквивалентности для qL_∞-алгебр, где отношение эквивалентности происходит из канонических преобразований соответствующих BF_∞-действий и из операции индуцирования.

- 5: Мы применяем конструкции раздела 4 для построения симплициальной BF-теории.

- 5.1, 5.2: Описываются две известных конструкции, позволяющие нам определить данные индуцирования для БВ-интеграла, определяющего симплициальное BF-действие — формы Уитни [29] и оператор цепной гомотопии Дюпона [14]. В этом изложении мы опираемся на работу [15].
- 5.3: Здесь мы формулируем ключевой результат о действии симплициальной BF-теории — свойство симплициальной локальности (Теорема 7). Это свойство позволяет нам свести задачу вычисления симплициального BF-действия в общем случае к серии универсальных вычислений для одного стандартно триангулированного симплекса Δ^D в каждой размерности $D = 0, 1, 2, \ldots$.
- 5.4: Обсуждается абстрактная конструкция склейки qL_∞-алгебр, которая обобщает построение симплициального действия на триангуляции по симплициальным действиям для её отдельных симплексов. В разделе 5.4.2 мы доказываем на абстрактном уровне, что, при выполнении некоторых условий согласованности, операции склейки и индуцирования коммутируют. Это утверждение есть абстрактное обобщение свойства симплициальной локальности симплициального BF-действия на триангуляции.
- 5.5: Мы получаем явный результат для симплициального действия на стандартно триангулированном 1-симплексе (Теорема 8). Де рамовские части фейнмановских диаграмм для соответствующего БВ-интеграла выражаются через числа Бернулли и проверка классического мастер-уравнения на эффективное действие (которое выполнено по конструкции) приводит к нетривиальному (известному ранее [2]) квадратичному соотношению на числа Бернулли — см. раздел 5.5.1.
- 5.6. Получен пертурбативный результат для симплициального BF-действия для стандартно триангулированного симплекса общей размерности (Теорема 9). В разделе 5.6.1 продемонстрировано явное вычисление однопетлевых фейнмановских диаграмм на примере простейшей нетривиальной диаграммы для 2-симплекса.

• 6: Мы обсуждаем дискретную BF-теорию на кубическом клеточном разбиении многообразия. Это обсуждение является модификацией симплициального случая, причём основное отличие состоит в свойстве факторизации, имеющем место для фейнмановских диаграмм для клеточного действия куба. Это свойство сильно упрощает пертурбативные вычисления и приводит к некоторому набору явных ответов для клеточного действия.

– 6.1, 6.2: Обсуждается конструкция тензорного произведения для данных индуцирования, с помощью которой строятся данные индуцирования с дифференциальных форм на кубе на клеточные коцепи на кубе и далее, аналогично симплициальному случаю, данные индуцирования с дифференциальных форм на многообразии на клеточные коцепи кубического клеточного разбиения. Последние позволяют определить БВ-интеграл, задающий действие дискретной BF-теории на кубическом клеточном разбиении многообразия ("клеточное действие"). Для клеточного действия выполнено свойство клеточной локальности (Теорема 10), полностью аналогичное свойству симплициальной локальности для симплициального действия на триангуляции.
– 6.3: Обсуждается свойство факторизации фейнмановских диаграмм для клеточного действия для куба (происходящее из конструкции тензорного произведения для цепных гомотопий) и выводится пертурбативный ответ (Теорема 11).
– 6.4: Используя свойство факторизации фейнмановских диаграмм, мы получаем набор примеров явно вычислимого клеточного действия: тор, цилиндр, "толстый тор". Используя конструкцию склейки для результата для цилиндра, мы также получаем ответ для бутылки Клейна. Примеры сведены вместе в Утверждении 15.

- 7: Мы обсуждаем действие эффективной BF-теории на когомологиях многообразия, являющееся интересным топологическим инвариантом многообразия. Обсуждается возможность его вычисления с помощью дискретной BF-теории, свойства, позволяющие в некоторых случаях его точно вычислять, и явные примеры.
  – 7.1: Здесь мы обсуждаем общую картину индуцирования как переноса qL_∞-структуры вдоль стрелок в "категории ретрактов" и её специализацию на случай индуцирования эффективного действия для топологической BF-теории. Обсуждается способ вычисления эффективного действия на когомологиях через дискретную BF-теорию.
  – 7.2: Мы приводим некоторые специальные свойства эффективного действия на когомологиях, позволяющие в отдельных случаях его явно вычислять.
  – 7.3: Мы обсуждаем несколько примеров явно вычислимого эффективног действия на когомологиях. Самой интересной здесь является пара примеров — окружность и бутылка Клейна.

1.3. **Благодарности.** Автор хочет поблагодарить своего научного руководителя Л. Д. Фаддеева за поддержку и внимание к работе и А. С. Лосева за постановку задачи и идеи,

на которых основана вся работа. Также автор должен поблагодарить за многочисленные ценные обсуждения Н. Е. Мнёва, Д. Салливана, Ф. Шэтца, А. Каттанео и Дж. Фельдера. Из беседы с Д. Салливаном автор почерпнул конструкцию тензорного произведения для цепных гомотопий, которая лежит в основе материала разделов 6 и 7.

2. Основные понятия формализма Баталина-Вилковыского

В этом разделе мы вводим некоторые необходимые нам для изложения основ БВ-формализма понятия супер-геометрии, причём мы не пытаемся дать определения в максимальной общности (за деталями читатель отсылается к [5]). Геометрические основы БВ-формализма мы излагаем, следуя преимущественно работе [25], т.е. пространство полей неявно предполагается конечномерным, однако ему разрешено быть не векторным пространством, а $\mathbb{Z}$-градуированным многообразием (следуя физической традиции, мы пользуемся $\mathbb{Z}$-градуировкой, а не $\mathbb{Z}_2$-градуировкой). Мы также отчасти пользуемся работами [3],[17],[26] для этого изложения. Одной из целей данного раздела, также как и раздела 3, является введение обозначений и соглашений о знаках (последние могут отличаться от общепринятых).

2.1. Алгебры Герштенхабера и алгебры Баталина-Вилковыского.

Определение 1. *Алгеброй Герштенхабера (или нечётной пуассоновой алгеброй) называется градуированная коммутативная алгебра $\mathcal{C}$, снабжённая нечётной пуассоновой скобкой степени +1 (или анти-скобкой), т.е. билинейной операцией $\{\bullet,\bullet\}:\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}\to\mathcal{C}$, удовлетворяющей следующим свойствам:*

$$\epsilon(\{X,Y\}) = \epsilon(X)+\epsilon(Y)+1 \tag{1}$$

$$\{X,Y\} = -(-1)^{(\epsilon(X)+1)(\epsilon(Y)+1)}\{Y,X\} \tag{2}$$

$$(-1)^{(\epsilon(X)+1)(\epsilon(Z)+1)}\{X,\{Y,Z\}\} + \text{cycl.perm.}\, X,Y,Z = 0 \tag{3}$$

$$\{XY,Z\} = X\{Y,Z\} + (-1)^{\epsilon(Y)\ (\epsilon(Z)+1)}\{X,Z\}Y \tag{4}$$

$$\{X,YZ\} = \{X,Y\}Z + (-1)^{(\epsilon(X)+1)\ \epsilon(Y)}Y\{X,Z\} \tag{5}$$

для любых однородных элементов $X,Y,Z\in\mathcal{C}$; здесь $\epsilon(X)\in\mathbb{Z}$ означает градуировку X в $\mathcal{C}$.

Соотношения (1,2,3) означают, что анти-скобка задаёт структуру градуированной алгебры Ли на $\mathcal{C}[1]$, а соотношения (4,5) — что анти-скобка является бидиффиренцированием коммутативного умножения в $\mathcal{C}$.

Определение 2. *Алгеброй Баталина-Вилковыского (БВ-алгеброй) называется градуированная коммутативная алгебра $\mathcal{C}$ с единицей, снабжённая БВ-лапласианом, т.е. линейной операцией $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, удовлетворяющей следующим свойствам:*

$$\epsilon(\Delta X) = \epsilon(X) + 1 \tag{6}$$

$$\Delta^2 = 0 \tag{7}$$

$$\Delta(1) = 0 \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\Delta(XYZ) = \Delta(XY)Z + (-1)^{(\epsilon(X)+1)\,\epsilon(Y)}Y\Delta(XZ) + (-1)^{\epsilon(X)}X\Delta(YZ) - \\ -\Delta(X)YZ - (-1)^{\epsilon(X)}X\Delta(Y)Z - (-1)^{\epsilon(X)+\epsilon(Y)}XY\Delta(Z)\end{aligned} \tag{9}$$

для любых однородных элементов $X, Y, Z \in \mathcal{C}$.

Соотношение (9) есть старшее тождество Лейбница для дифференциального оператора 2-го порядка. БВ-алгебра автоматически является также алгеброй Герштенхабера с анти-скобкой

$$\{X, Y\} = (-1)^{\epsilon(X)}\Delta(XY) - (-1)^{\epsilon(X)}\Delta(X)Y - X\Delta(Y) \tag{10}$$

кроме того, БВ-лапласиан является дифференцированием порождённой им анти-скобки:

$$\Delta\{X, Y\} = \{\Delta X, Y\} + (-1)^{\epsilon(X)+1}\{X, \Delta Y\} \tag{11}$$

Из этого вытекает, что Δ и $\{,\}$ задают на $\mathcal{C}[1]$ структуру дифференциальной градуированной алгебры Ли.

2.2. $\mathbb{Z}$-градуированные многообразия.

Определение 3. *$\mathbb{Z}$-градуированным многообразием называется сумма векторных расслоений $\mathcal{M} = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{M}^k$ над гладким многообразием $\mathcal{M}_0$ (мы предполагаем, что лишь для конечного числа значений k ранг $\mathcal{M}^k$ отличен от нуля). Кольцо функций на $\mathcal{M}$ определяется как градуированная (супер-)коммутативная алгебра сечений*

$$\mathrm{Fun}(\mathcal{M}) = \Gamma(\mathcal{M}_0, S^\bullet\mathcal{M}^*_{\mathrm{even}} \otimes \Lambda^\bullet\mathcal{M}^*_{\mathrm{odd}}) = \Gamma(\mathcal{M}_0, S^\bullet\mathcal{M}^*_{\mathrm{even}}) \otimes_{C^\infty(\mathcal{M}_0)} \Gamma(\mathcal{M}_0, \Lambda^\bullet\mathcal{M}^*_{\mathrm{odd}})$$

где $\mathcal{M}_{\mathrm{even}} = \bigoplus_k \mathcal{M}^{2k}$, $E_{\mathrm{odd}} = \bigoplus_k \mathcal{M}^{2k+1}$ — чётная и нечётная части $\mathcal{M}$, $S^\bullet$ и $\Lambda^\bullet$ — сумма симметрических степеней и сумма внешних степеней расслоения, Γ — пространство сечений расслоения. Градуировка на функциях определяется приписыванием степени $-k$ сечениям $(\mathcal{M}^k)^*$. База $m(\mathcal{M}) = \mathcal{M}_0$ называется телом $\mathcal{M}$.

Если (x^I) — локальные координаты на открытом подмножестве $U_0 \subset \mathcal{M}_0$ и (χ^α) — координаты в слое $\mathcal{M}$, то мы говорим, что (x^I, χ^α) — локальные координаты на $U =$

$\pi^{-1}U_0 \subset \mathcal{M}$, где $\pi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}_0$ — проекция на базу. Для кольца функций имеем

$$\mathrm{Fun}(\mathcal{M})|_U \cong C^\infty(U_0) \otimes \mathbb{R}[\chi^\alpha]$$

Мы говорим, что $\mathcal{M}'$ получается из $\mathcal{M}$ сдвигом градуировки на n:

$$\mathcal{M}' = \mathcal{M}[n]$$

если

$$(\mathcal{M}')^k = \mathcal{M}^{k+n}$$

Нам также понадобится обозначение $\mathcal{M}^*$ для $\mathbb{Z}$-градуированного многообразия, получающегося из $\mathcal{M}$ как двойственное расслоение над $\mathcal{M}_0$ с обращённой градуировкой:

$$(\mathcal{M}^*)^k = (\mathcal{M}^{-k})^*$$

В дальнейшем мы часто будем называть $\mathbb{Z}$-градуированные многообразия просто градуированными многообразиями.

Определение 4. *Нечётным касательным расслоением $T[1]\mathcal{M}$ градуированного многообразия $\mathcal{M}$ называется градуированное многообразие, являющееся расслоением $\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}(T[1]\mathcal{M})^k$ над $\mathcal{M}_0$, где элементы градуировки определяются как*

$$(T[1]\mathcal{M})^k = \begin{cases} T\mathcal{M}_0 \oplus \mathcal{M}^{-1} \oplus \mathcal{M}^0 & \text{при } k = -1, \\ \mathcal{M}^k \oplus \mathcal{M}^{k+1} & \text{при } k \neq -1 \end{cases}$$

Кольцо функций на $T[1]\mathcal{M}$ определяется как

$$\mathrm{Fun}(T[1]\mathcal{M}) = \Omega^\bullet(\mathcal{M}_0) \otimes_{C^\infty(\mathcal{M}_0)} \mathrm{Fun}(\mathcal{M}) \otimes_{C^\infty(\mathcal{M}_0)} \mathrm{Fun}(\mathcal{M}[1])$$

где $\Omega^\bullet(\mathcal{M}_0)$ есть алгебра дифференциальных форм на $\mathcal{M}_0$. Причём k-форма на $\mathcal{M}_0$ понимается как элемент степени k в $\mathrm{Fun}(T[1]\mathcal{M})$.

Если (x^i) — локальные координаты на $\mathcal{M}$, а (x^i, ψ^i) — координаты на $T[1]\mathcal{M}$, то для степеней координат выполнено $\epsilon(\psi^i) = \epsilon(x^i) + 1$. Дифференциальными формами на $\mathcal{M}$ мы называем функции на нечётном касательном расслоении $T[1]\mathcal{M}$, т.е.

$$\Omega^\bullet(\mathcal{M}) = \mathrm{Fun}(T[1]\mathcal{M})$$

Векторные поля на $\mathcal{M}$ мы понимаем как дифференцирования алгебры $\mathrm{Fun}(\mathcal{M})$:

$$\mathrm{Vect}(\mathcal{M}) = \mathrm{Der}(\mathrm{Fun}(\mathcal{M}))$$

Определение 5. *Векторное поле Q на градуированном многообразии $\mathcal{M}$ называется когомологическим, если $\epsilon(Q) = 1$ (т.е. применение Q к функции увеличивает градировку на 1) и $Q^2 = 0$. Градуированное многообразие с заданным на нём когомологическим векторным полем $(\mathcal{M}, Q)$ называется Q-многообразием.*

В частности, для любого $\mathcal{M}$ на нечётном касательном расслоении $T[1]\mathcal{M}$ есть естественное когомологическое поле — дифференциал де Рама на $\Omega^\bullet(M)$, в локальных координатах имеющий вид

$$\delta = \psi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Определение 6. *Нечётным кокасательным расслоением $T^*[-1]\mathcal{M}$ градуированного многообразия $\mathcal{M}$ называется градуированное многообразие, являющееся расслоением $\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}(T^*[-1]\mathcal{M})^k$ над $\mathcal{M}_0$, где элементы градуировки есть*

$$(T^*[-1]\mathcal{M})^k = \begin{cases} T^*\mathcal{M}_0 \oplus \mathcal{M}^1 \oplus (\mathcal{M}^0)^* & \text{при } k=1, \\ \mathcal{M}^k \oplus (\mathcal{M}^{1-k})^* & \text{при } k \neq 1 \end{cases}$$

Кольцо функций на $T^*[-1]\mathcal{M}$ есть

$$\mathrm{Fun}(T^*[-1]\mathcal{M}) = \mathcal{V}^\bullet(\mathcal{M}_0) \otimes_{C^\infty(\mathcal{M}_0)} \mathrm{Fun}(\mathcal{M}) \otimes_{C^\infty(\mathcal{M}_0)} \mathrm{Fun}(\mathcal{M}^*[-1])$$

где $\mathcal{V}^\bullet(\mathcal{M}_0)$ — пространство поливекторных полей на $\mathcal{M}_0$, причём k-поливектор считается элементом степени $-k$ в $\mathrm{Fun}(T^*[-1]\mathcal{M})$.

Если (x^i) — локальные координаты на $\mathcal{M}$ и (x^i, ξ_i) — локальные координаты на $T^*[-1]\mathcal{M}$, то для степеней имеет место $\epsilon(x^i) + \epsilon(\xi_i) = -1$.

Определение 7. *Березинианом (или расслоением Березина, или супер-детерминантным расслоением) градуированного многообразия $\mathcal{M}$ называется следующее линейное расслоение над $\mathcal{M}_0$:*

$$\mathrm{Ber}(\mathcal{M}) = \Lambda^{\dim \mathcal{M}_0} T^*[-1]\mathcal{M}_0 \otimes \Lambda^{\mathrm{rk}\mathcal{M}_{\mathrm{even}}} \mathcal{M}^*_{\mathrm{even}}[-1] \otimes \Lambda^{\mathrm{rk}\mathcal{M}_{\mathrm{odd}}} \mathcal{M}_{\mathrm{odd}}$$

его сечения $\mu \in \Gamma(\mathcal{M}_0, \mathrm{Ber}(\mathcal{M}_0))$ называются мерами Березина на $\mathcal{M}$.

Интеграл по градуированному многообразию определяется как линейное отображение $\int_\mathcal{M} : \mathrm{Fun}(\mathcal{M}) \otimes \Gamma(\mathcal{M}_0, \mathrm{Ber}(\mathcal{M})) \to \mathbb{R}$, заданное следующим образом: для $f = f_{\mathrm{even}} \otimes f_{\mathrm{odd}}$ и меры Березина $\mu = \mu_{\mathrm{odd}} \otimes \mu_{\mathrm{even}}$, где $f_{\mathrm{even}} \in \mathrm{Fun}(\mathcal{M}_{\mathrm{even}})$, $f_{\mathrm{odd}} \in \mathrm{Fun}(\mathcal{M}_{\mathrm{odd}})$, $\mu_{\mathrm{even}} \in \mathrm{Ber}(\mathcal{M}_{\mathrm{even}})$, $\mu_{\mathrm{odd}} \in \mathrm{Ber}(\mathcal{M}_{\mathrm{odd}})$, интеграл есть

$$\int_\mathcal{M} f\mu = \int_{\mathcal{M}_{\mathrm{even}}} f_{\mathrm{even}} < f_{\mathrm{odd}}, \mu_{\mathrm{odd}} > \mu_{\mathrm{even}}$$

где $< \bullet, \bullet >$: $\Lambda^\bullet \mathcal{M}^*_{\mathrm{odd}} \otimes \Lambda^\bullet \mathcal{M}_{\mathrm{odd}} \to C^\infty(\mathcal{M}_0)$ есть послойное каноническое спаривание. Введём обозначение

$$\mathrm{Mes}(\mathcal{M}) = \mathrm{Fun}(\mathcal{M}) \otimes_{C^\infty(\mathcal{M}_0)} \Gamma(\mathcal{M}_0, \mathrm{Ber}(\mathcal{M}))$$

для пространства мер, которым разрешено быть не постоянными в слое $\mathcal{M}$, как расслоения над $\mathcal{M}_0$. Таким образом, интеграл есть отображение $\int_\mathcal{M} : \mathrm{Mes}(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}$.

Для расслоения Березина нечётного кокасательного расслоения имеет место

$$\mathrm{Ber}(T^*[-1]\mathcal{M}) = \mathrm{Ber}(\mathcal{M}) \otimes \mathrm{Ber}(\mathcal{M}) \tag{12}$$

2.3. **P-многообразия.** На нечётном кокасательном расслоении $T^*[-1]\mathcal{N}$ над градуированным многообразием $\mathcal{N}$ задана естественная 2-форма степени -1

$$\omega = \sum_i (-1)^{\epsilon(x^i)} \delta x^i \wedge \delta \xi_i \tag{13}$$

где (x^i) — координаты на $\mathcal{N}$ и (ξ_i) — сопряжённые координаты в слое (под степенью здесь понимается "грассманова" степень, т.е. тотальная степень минус де рамовская).

Определение 8. *Градуированное многообразие $\mathcal{M}$ называется P-многообразием (или нечётно-симплектическим, или анти-симплектическим), на нём задана 2-форма ω степени -1 и $\mathcal{M}$ можно покрыть системой открытых окрестностей (U_α) с системой координат Дарбу $(x^i_{(\alpha)}, \xi_{(\alpha)i})$ для каждой окрестности, так что в каждом U_α форма ω имеет канонический вид (13), и функции перехода между системами координат $\phi_{\alpha\beta} \in \mathrm{Fun}(U_\alpha \cap U_\beta)$ являются симплектоморфизмами, т.е. $\phi^*_{\alpha\beta}\omega = \omega$.*

По определению, всякое P-многообразие локально имеет вид $T^*[-1]\mathcal{N}$ для некоторого $\mathcal{N}$ (и всегда можно выбрать $\mathcal{N}$ чисто чётным). Однако имеет место более сильное, глобальное утверждение:

Теорема 1 (А. Шварц, [25])**.** *Всякое P-многообразие $\mathcal{M}$ эквивалентно (симплектоморфно) многообразию вида $T^*[-1]\mathcal{N}$ для некоторого $\mathcal{N}$, которое можно выбрать чисто чётным.*

Заметим, у этого утверждения нет аналога в обычной (чётной) симплектической геометрии, где задача классификации симплектических многообразий гораздо более трудна.

На функциях на P-многообразии $\mathcal{M}$ задана структура алгебры Герштенхабера, где анти-скобка в координатах Дарбу имеет вид

$$\{f, g\} = \sum_i f \left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^i} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \xi_i} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_i} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x^i} \right) g$$

для $f, g \in \mathrm{Fun}(\mathcal{M})$. В общей системе координат (z^a) (не обязательно Дарбу) нечётная симплектическая форма имеет вид

$$\omega = \frac{1}{2} \omega_{ab}(z)\, \delta z^a \wedge \delta z^b$$

и соответствующая анти-скобка:

$$\{f, g\} = f \left(\sum_{a,b} (-1)^{\epsilon(z^a)} \omega^{ab}(z) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial z^a} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial z^b} \right) g \tag{14}$$

Важным отличием P-многообразий от обычных симплектических также является то, что на P-многообразии нет канонической меры. В чётном случае по симплектической форме ω строится каноническая мера Лиувилля $\frac{1}{(\dim \mathcal{M}/2)!}\omega^{\dim \mathcal{M}/2}$. В нечётно-симплектическом случае такое выражение лишено смысла во-первых потому, что мера не является дифференциальной формой, а является элементом $\mathrm{Fun}(\mathcal{M}) \otimes \Gamma(\mathcal{M}_0, \mathrm{Ber}(\mathcal{M}))$, и во-вторых потому, что анти-симплектическая форма всегда нильпотентна: $\omega \wedge \omega = 0$.

Определение 9. *QP-многообразием называется P-многообразие с когомологическим векторным полем Q, сохраняющим нечётную симплектическую форму, т.е. производная Ли ω вдоль Q равно нулю.*

Утверждение (см. [3]) состоит в том, что такое Q обязательно гамильтоново, т.е. есть функция $S^0 \in \mathrm{Fun}(\mathcal{M})$ степени $\epsilon(S^0) = 0$, такая что $Q = \hat{S}^0 = \{S^0, \bullet\}$.

Действие симплектоморфизма на функции $\phi^* : \mathrm{Fun}(\mathcal{M}) \to \mathrm{Fun}(\mathcal{M})$ в терминологии классической (гамильтоновой) механики называется каноническим преобразованиям. Канонические преобразования являются автоморфизмами алгебры Герштенхабера $\mathrm{Fun}(\mathcal{M})$ (т.е. сохраняют градуировку, сохраняют умножение и анти-скобку). Инфинитезимальные канонические преобразования описываются правым действием гамильтоновых векторных полей, порождённых функциями $R \in \mathrm{Fun}(\mathcal{M})$ степени $\epsilon(R) = -1$, т.е. инфинитезимальное каноническое преобразование с генератором R действует на функции как

$$f \mapsto f + \{f, R\} \tag{15}$$

Лагранжевы подмногообразия P-многообразия вводятся также, как в обычной симплектической геометрии, т.е. подмногообразие $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$ называется лагранжевым, если $\omega|_{\mathcal{L}} = 0$ и $\dim \mathcal{L} = \frac{1}{2} \dim \mathcal{M}$.

Теперь мы опишем две стандартные конструкции лагранжевых подмногообразий — малую деформацию лагранжева подмногообразия с помощью “фиксирующего калибровку фермиона” (gauge fixing fermion) и конструкцию конормального расслоения. Пусть $\mathcal{M}$ имеет вид нечётного кокасательного расслоения $\mathcal{M} = T^*[+1]\mathcal{N}$, со стандартной P-структурой и координатами x^i на базе и ξ_i в слое. Тогда само $\mathcal{N}$ является лагранжевым подмногообразием в $\mathcal{M}$ и его деформации (в классе лагранжевых подмногообразий) задаются с помощью функции $\Psi(x) \in \mathrm{Fun}(\mathcal{N})$ степени $\epsilon(\Psi) = -1$ (т.н. фиксирующего калибровку фермиона) как

$$\mathcal{L}_\Psi = \left\{(x, \xi)|\xi_i = -\frac{\partial}{\partial x^i}\Psi(x)\right\} \tag{16}$$

Заметим, что в координатах (x'^i, ξ'_i), связанных с координатами (x^i, ξ_i) каноническим преобразованием $x'^i = x^i + \{x^i, -\Psi\} = x^i$, $\xi'_i = \xi_i + \{\xi_i, -\Psi\}$, лагранжево подмногообразие $\mathcal{L}_\Psi$ задаётся просто как $\xi' = 0$.

Вторая конструкция выглядит следующим образом: пусть снова $\mathcal{M} = T^*[-1]\mathcal{N}$ и $\mathcal{K} \subset \mathcal{N}$ — подмногообразие базы. Тогда (нечётное) конормальное расслоение $N^*[-1]\mathcal{K} \subset \mathcal{M}$ определяется как

$$N^*[-1]\mathcal{K} = \{(x,\xi) | x \in \mathcal{K}, \xi \perp T_x\mathcal{K}\} \tag{17}$$

То есть, $N^*[-1]\mathcal{K}$ — это расслоение над $\mathcal{K}$, слой которого над точкой $x \in \mathcal{K}$ есть множество ковекторов $\xi \in T^*_x[-1]\mathcal{N}$, ортогональных касательному пространству к $\mathcal{K}$ в точке x. Конормальное расслоение не является малой деформацией $\mathcal{N}$ и не задаётся гладким фиксирующим калибровку фермионом Ψ. Две описанные конструкции в некотором смысле описывают все лагранжевы подмногообразия, благодаря следующей теореме.

Теорема 2 (А. Шварц, [25]). *Всякое лагранжево подмногообразие $\mathcal{L} \subset T^*[-1]\mathcal{N}$ можно непрерывно продеформировать в подмногообразие вида (17) для некоторого $\mathcal{K} \subset \mathcal{N}$.*

Если $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$ лагранжево подмногообразие, то локально, в окрестности $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ имеет вид $T^*[-1]\mathcal{L}$.

2.4. SP**-многообразия.** Есть два (эквивалентных) способа интерпретировать идею "БВ-многообразия" $\mathcal{M}$, т.е. многообразия с заданным на нём БВ-лапласианом Δ. Первый способ принадлежит А. Шварцу [25]: БВ-лапласиан определяется нечётной симплектической структурой на $\mathcal{M}$ и некоторым дополнительным геометрическим данным — согласованной с симплектической структурой мерой. Такой БВ-лапласиан действует на алгебре функций и превращает её в БВ-алгебру. Вторая интерпретация будет объяснена в разделе 2.5 и предлагает понимать БВ-лапласиан как канонический в любой системе координат Дарбу на P-многообразии $\mathcal{M}$, однако действует он не на алгебре функций, а на модуле над этой алгеброй — скалярных плотностях веса $1/2$ (иначе, полу-плотностях). Вторая картина нашла строгое математическое объяснение в работах [17],[26].

Определение 10. *SP-многообразием называется P-многообразие $\mathcal{M}$, снабжённое мерой $\mu \in \mathrm{Mes}(\mathcal{M})$, согласованной с нечётной симплектической формой ω. Согласованность понимается в следующем смысле: $\mathcal{M}$ можно покрыть системой открытых окрестностей (U_α), такой что в координатах Дарбу $(x^i_{(\alpha)}, \xi_{(\alpha)i})$ на каждом U_α мера совпадает с координатной мерой Березина, т.е. $\mu = \prod_i \mathcal{D}x^i_{(\alpha)}\mathcal{D}\xi_{(\alpha)i}$ (и форма ω имеет канонический вид (13)), и функции перехода являются унимодулярными симплектоморфизмами,* *т.е.* $\phi^*_{\alpha\beta}\omega = \omega$ *и якобианы функций перехода единичны:*

$$\mathrm{Jac}(\phi_{\alpha\beta}) = \frac{\partial(x_{(\alpha)}, \xi_{(\alpha)})}{\partial(x_{(\beta)}, \xi_{(\beta)})} = 1$$

Для произвольной системы координат (z^a) меру $\mu_{\mathrm{coord}} = \prod_a \mathcal{D}z^a$ мы называем координатной мерой (связанной с данной системой координат). Если задана произвольная мера $\mu = \rho(z)\mu_{\mathrm{coord}}$, то ρ мы называем плотностью меры μ (в координатах (z^a)). При замене координат ϕ плотность преобразуется как $\rho \mapsto \rho' = \mathrm{Jac}(\phi) \cdot \phi^*\rho$, то есть, $\rho(z) \mapsto \rho'(z') = \frac{\partial z}{\partial z'}\, \rho(z)$.

Мера μ на $\mathcal{M}$ определяет дивергенцию для векторных полей $\mathrm{div}_\mu : \mathrm{Vect}(\mathcal{M}) \to \mathrm{Fun}(\mathcal{M})$, определяемую соотношением

$$\int_{\mathcal{M}} v(f)\mu = \int_{\mathcal{M}} \mathrm{div}_\mu v \cdot f\mu$$

для заданного векторного поля $v \in \mathrm{Vect}(\mathcal{M})$ и произвольной функции μ. Если в локальных координатах (z^a) на $\mathcal{M}$ мера μ имеет плотность $\rho(z)$, то дивергенция действует как

$$\mathrm{div}_\mu :\; v^a(z)\frac{\partial}{\partial z^a} \mapsto \frac{1}{\rho(z)}\,\frac{\partial}{\partial z^a}\,(\rho(z)v^a(z))$$

На SP-многообразии $\mathcal{M}$ есть естественно связанный с мерой БВ-лапласиан $\Delta_\mu : \mathrm{Fun}(\mathcal{M}) \to \mathrm{Fun}(\mathcal{M})$, определяющийся для функции f как дивергенция порождённого этой функцией гамильтонова векторного поля $\hat{f} = \{f, \bullet\}$, т.е.

$$\Delta_\mu f = \frac{1}{2}\mathrm{div}_\mu \hat{f} = \frac{1}{2}\mathrm{div}_\mu\{f, \bullet\}$$

В локальных координатах Дарбу (x^i, ξ_i), в которых плотность меры μ единичная (такие координаты существуют по определению SP-многообразия), оператор Δ_μ имеет канонический вид:

$$\Delta_\mu = \sum_i (-1)^{\epsilon(x^i)}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial \xi_i}$$

откуда немедленно видно, что $\Delta_\mu^2 = 0$ и, следовательно, Δ_μ задаёт структуру БВ-алгебры на $\mathrm{Fun}(\mathcal{M})$. В общей системе координат (z^a) БВ-оператор имеет вид

$$\Delta_\mu : f(z) \mapsto \frac{1}{2\rho(z)}\,\frac{\partial}{\partial z^a}\rho(z)\,\omega^{ab}(z)\frac{\partial}{\partial z^b}f(z)$$

Анти-скобка, задаваемая на функциях с помощью (10), совпадает с анти-скобкой, порождённой нечётной симплектической формой, и не зависит от выбора меры μ.

При домножении меры μ на функцию $g \in \mathrm{Fun}(\mathcal{M})$ степени $\epsilon(g) = 0$, БВ-лапласиан меняется по следующему закону

$$\Delta_\mu \mapsto \Delta_{g\mu} = \Delta_\mu + \{\frac{1}{2}\log g, \bullet\}$$

Условие, что новый БВ-лапласиан нильпотентен является некоторым нетривиальным условием на функцию g:

$$\Delta_{g\mu}^2 = 0 \Leftrightarrow \Delta_\mu g^{1/2} = 0$$

2.5. **Интегралы по лагранжевым подмногообразиям.** Пусть $\mathcal{M}$ есть SP-многообразие. Тогда на лагранжевых подмногообразиях $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$ индуцируется мера $\sqrt{\mu}|_\mathcal{L}$. Пусть в локальных координатах (x_i, ξ_i) на $\mathcal{M}$, в которых $\mathcal{L}$ задаётся уравнениями $\xi_i = 0$, мера μ имела плотность ρ, т.е. $\mu = \rho(x,\xi)\prod_i \mathcal{D}x^i\mathcal{D}\xi_i \in \mathrm{Mes}(\mathcal{M})$, тогда индуцированная мера на $\mathcal{L}$ имеет вид $\sqrt{\mu}|_\mathcal{L} = \rho(x,0)^{1/2}\prod_i \mathcal{D}x^i \in \mathrm{Mes}(\mathcal{L})$. Благодаря свойству (12) для расслоения Березина, извлечение квадратного корня из меры на нечётно-симплектическом многообразии является естественной операцией.

Следующие два свойства интегралов по лагранжевым подмногообразиям являются центральными для БВ-формализма.

Теорема 3 (Баталин-Вилковыский). *Пусть $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{M}$ — два замкнутых лагранжевых подмногообразия в SP-многообразии $\mathcal{M}$, причём $\mathcal{L}_1$ можно непрерывно продеформировать в $\mathcal{L}_2$ в классе лагранжевых подмногообразий. И пусть функция $f \in \mathrm{Fun}(\mathcal{M})$ удовлетворяет $\Delta_\mu f = 0$. Тогда*

$$\int_{\mathcal{L}_1} f\cdot\sqrt{\mu}|_{\mathcal{L}_1} = \int_{\mathcal{L}_2} f\cdot\sqrt{\mu}|_{\mathcal{L}_2} \tag{18}$$

Теорема 4 (А. Шварц, [25]). *Пусть $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$ — замкнутое лагранжево подмногообразие в SP-многообразии $\mathcal{M}$ и $f \in \mathrm{Fun}(\mathcal{M})$ — произвольная функция. Тогда*

$$\int_\mathcal{L} \Delta_\mu f\cdot\sqrt{\mu}|_\mathcal{L} = 0 \tag{19}$$

В работе [25] также доказана более сильная версия теоремы Баталина-Вилковыского (18): можно ослабить требование деформируемости $\mathcal{L}_1$ в $\mathcal{L}_2$ в классе лагранжевых подмногообразий до требования кобордантности $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$.

Альтернативная картине SP-многообразий интерпретация БВ-лапласиана состоит в следующем. Пусть теперь $\mathcal{M}$ — просто P-многообразие (без дополнительной S-структуры). Определим БВ-лапласиан в произвольной системе координат Дарбу (не в выделенном классе, как в картине SP-многообразий) как канонический:

$$\Delta\chi = \sum_i (-1)^{\epsilon(x^i)}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\chi$$

Тогда мы не можем считать, что БВ-оператор действует на функции, т.к. Δf имело бы не скалярный закон преобразования при канонических преобразованиях. Вместо этого следует считать, что Δ действует на скалярных плотностях веса $1/2$ (полу-плотностях), т.е. $\chi \in \mathrm{SemiDens}(\mathcal{M})$ преобразуется под действием канонического преобразования ϕ как

$\chi \mapsto \mathrm{Jac}(\phi)^{1/2} \cdot \phi^* \chi$. Инфинитезимальное каноническое преобразование с генератором R действует на полу-плотность χ как

$$\chi \mapsto \chi + \{\chi, R\} + \chi \Delta R \tag{20}$$

Интеграл полу-плотности по лагражеву подмногообразию понимается в следующем смысле: пусть (x^i, ξ_i) — координаты Дарбу на $\mathcal{M}$ и $\mathcal{L}$ задаётся уравнениями $\xi_i = 0$ и $\chi(x, \xi)$ — полуплотность в этой системе координат. Тогда интеграл полу-плотности определяется как

$$\int_{\mathcal{L}} \chi = \int_{\mathcal{L}} \chi(x, 0) \prod_i \mathcal{D}x^i$$

Утверждения (18,19) в картине полу-плотностей имеют вид

$$\int_{\mathcal{L}_1} \chi = \int_{\mathcal{L}_2} \chi$$

для полу-плотности $\chi \in \mathrm{SemiDens}(\mathcal{M})$, удовлетворяющей $\Delta\chi = 0$, и

$$\int_{\mathcal{L}} \Delta\chi = 0$$

для любой полу-плотности $\chi \in \mathrm{SemiDens}(\mathcal{M})$.

Итак, в картине SP-многообразий БВ-лапласиан Δ_μ строится по мере и действует на функциях, а в картине полу-плотностей БВ-лаласиан не требует меры и в любой системе координат Дарбу имеет канонический вид, однако действует на полу-плотностях. Соответствие между этими картинами такое: функции f и мере с плотностью ρ сопоставляется полу-плотность $\chi = f\sqrt{\rho}$. Преимущество картины полу-плотностей в том, что она позволяет рассматривать то, что интегрируется по лагранжеву подмногообразию, как единый объект. В то же время, картина SP-многообразий, помимо того, что обладает большей математической прозрачностью, лучше тем, что даёт структуру БВ-алгебры на функциях $\mathrm{Fun}(\mathcal{M})$ (в то время как в картине полу-плотностей Δ действует на пространстве $\mathrm{SemiDens}(\mathcal{M})$, не являющемся алгеброй). В работе [26] даётся изящная геометрическая конструкция, приводящая к БВ-лапласиану, действующему на полу-плотностях, и даётся когомологическое определение полу-плотностей (а не через закон преобразования между системами координат). Для физических приложений БВ-формализма более привычной является картина полу-плотностей, и мы будем придерживаться именно её.

2.6. **Мастер-уравнение.** Начиная с этого места мы хотим изменить основное поле для алгебр функций на рассматриваемых градуированных многообразиях с $\mathbb{R}$ на формальные ряды от постоянной Планка $\mathbb{R}[[\hbar, \hbar^{-1}]]$. Предыдущих рассмотрений это никак не меняет.

Пусть $\mathcal{M}$ — нечётно-симплектическое многообразие и S — функция на $\mathcal{M}$, регулярная по $\hbar$, степени $\epsilon(S) = 0$ (как станет ясно из дальнейшего, не вполне корректно называть S функцией, правильнее — логарифмом полу-плотности; однако, пока будем считать, что мы работаем в фиксированной системе координат Дарбу на $\mathcal{M}$). Говорят, что S удовлетворяет квантовому мастер-уравнению, если

$$\Delta e^{S/\hbar} = 0 \tag{21}$$

или, в эквивалетной форме,

$$\frac{1}{2}\{S, S\} + \hbar\Delta S = 0 \tag{22}$$

(заметим, что такая запись есть уравнение Маурера-Картана на $S/\hbar$ для структуры дифференциальной градуированной алгебры Ли $(\Delta, \{\bullet, \bullet\})$ на $\mathrm{Fun}(\mathcal{M})$). Решение квантового мастер-уравнения называется БВ-действием. Далее, пусть S раскладывается в ряд Тэйлора по $\hbar$ как $S = S^0 + \hbar S^1 + \hbar^2 S^2 + \cdots$ Тогда (22) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{aligned} \{S^0, S^0\} &= 0 && (23)\\ \{S^0, S^1\} + \Delta S^0 &= 0 && (24)\\ \{S^0, S^2\} + \frac{1}{2}\{S^1, S^1\} + \Delta S^1 &= 0 && (25)\\ &\vdots \end{aligned}$$

Уравнение (23) называется классическим мастер-уравнением на S^0. Гамильтоново векторное поле

$$Q_{\mathcal{M}} = \widehat{S^0} = \{S^0, \bullet\} \tag{26}$$

порождённое решением классического мастер-уравнения, называется БРСТ-оператором на $\mathcal{M}$ (это БРСТ-оператор на БВ-многообразии, в отличие от БРСТ-оператора, который нам встретится ниже в разделе 3.2) и обладает свойством $Q_{\mathcal{M}}^2 = 0$, т.е. является когомологическим векторным полем на $\mathcal{M}$.

Если дано решение классического мастер-уравнения S^0, то, как видно из (24), (25), …, возникает последовательность препятствий для продолжения его до решения квантового мастер-уравнения. Именно, чтобы уравнение (24) на S^1 было разрешимо, нужно, чтобы класс $[\Delta S^0] \in H^1_{Q_{\mathcal{M}}}(\mathrm{Fun}(\mathcal{M}))$ в когомологиях БРСТ-оператора был нулевой. Далее, для разрешимости (25) нужно, чтобы класс $[\Delta S^1 + \frac{1}{2}\{S^1, S^1\}] \in H^1_{Q_{\mathcal{M}}}(\mathrm{Fun}(\mathcal{M}))$ был нулевой и т.д.

Важную роль в БВ-формализме также играет другой нильпотентный оператор, строящийся по решению квантового мастер-уравнения и являющийся деформацией $Q_{\mathcal{M}}$:

$$\delta_{\mathrm{BV}} = \{S, \bullet\} + \hbar\Delta = Q_{\mathcal{M}} + \hbar(\widehat{S^1} + \Delta) + \hbar^2\widehat{S^2} + \hbar^3\widehat{S^3} + \cdots$$

Оператор $\delta_{\rm BV}$ является сопряжённым к $\hbar\Delta$:

$$\delta_{\rm BV} = \hbar e^{-S/\hbar}\Delta e^{S/\hbar}$$

и поэтому очевидно, что $\delta_{\rm BV}^2 = 0$. Заметим однако, что, в отличие от $Q_{\mathcal{M}}$, оператор $\delta_{\rm BV}$ имеет порядок 2, а не 1, и поэтому не имеет геометрической интерпретации как векторное поле на $\mathcal{M}$.

Если S — решение квантового мастер уравнения и дана функция $R \in {\rm Fun}(\mathcal{M})$, регулярная по $\hbar$ и степени $\epsilon(R) = -1$, новое БВ-действие S', построенное как

$$S' = S + \{S, R\} + \hbar\Delta R = S + \delta_{BV} R \tag{27}$$

также решает квантовое мастер-уравнение (в первом порядке по R), поскольку

$$e^{S'/\hbar} = e^{S/\hbar} + \Delta(e^{S/\hbar} R) \tag{28}$$

Преобразование

$$S \mapsto S' = S + \{S, R\} + \hbar\Delta R \tag{29}$$

следует понимать как действие инфинитезимального каноническое преобразования с генератором R на логарифм полу-плотности: если бы в (29) не было последнего слагаемого, это было бы обычное преобразование скаляра (15). Экспонента действия $\chi = e^{S/\hbar}$ преобразуется по правилу (20) для полу-плотности и, следовательно, интеграл $\int_{\mathcal{L}} e^{S/\hbar}$ для всякого лагранжева подмногообразия $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$ является хорошо определённой (т.е. не зависящей от выбора системы координат на $\mathcal{M}$) величиной. Как видно из (28,19), такой интеграл не меняется при канонических преобразованиях действия (29). Решения квантового мастер-уравнения, отличающиеся на каноническое преобразование, полагаются физически эквивалентными БВ-действиями.

2.6.1. *Калибровочные преобразования в БВ-формализме.* Классическая часть БВ-действия S^0 сама производит свои калибровочные преобразования: набор гамильтоновых векторных полей, порождённых производными S^0 по любой координате,

$$v_a = \{\frac{\partial}{\partial z^a} S^0, \bullet\}$$

аннигилируют классическую часть действия $v_a S^0 = 0$, как следствие классического мастер-уравнения (23). Производные $R_a^0 = \frac{\partial}{\partial z^a} S^0$ вдоль координат z^a степени $\epsilon(z^a) = +1$ можно интерпретировать как генераторы инфинитезимальных канонических преобразований, сохраняющих S^0. Аналогичное утверждение имеет место и для полного БВ-действия S: инфинитезимальное каноническое преобразование с генератором $R_a = \frac{\partial}{\partial z^a} S$ сохраняет S, так как $S \mapsto S + \delta_{\rm BV} R_a$ и $\delta_{\rm BV} R_a = 0$ вследствие (22).

3. Фиксация калибровки

В разделах 3.1, 3.2, 3.3 мы дадим краткий обзор основных методов решения задачи фиксации калибровки (задачи построения пертурбативно-определённого континуального интеграла для калибровочной теории поля) — методов Фаддеева-Попова, БРСТ и Баталина-Вилковыского. В разделе 3.4 будет рассмотрена фиксация калибровки методом Баталина-Вилковыского для топологической BF-теории.

$\mathbb{Z}$-градуировку на различных пространствах полей, которые будут здесь возникать, мы будем называть "духовым числом" и пользоваться обозначением gh для него. Мы рассматриваем задачу фиксации калибровки для чисто бозонных классических систем, поэтому нам не приходится вводить более сложную $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2$ градуировку на пространствах полей.

3.1. **Фиксация калибровки: метод Фаддеева-Попова.** Пусть задано многообразие классических полей $\mathcal{F}_{cl}$, координаты на котором мы обозначим x^i (классические поля имеют духовое число 0). Пусть $\mathcal{G}$ — группа Ли калибровочных преобразований, действующая на $\mathcal{F}_{cl}$

$$\mathcal{G} \circlearrowleft \mathcal{F}_{cl}$$

т.е. задан гомоморфизм групп из $\mathcal{G}$ в диффеоморфизмы $\mathcal{F}_{cl}$:

$$\kappa : \mathcal{G} \to \mathrm{Diff}(\mathcal{F}_{cl})$$

где мы предполагаем κ мономорфизмом (т.е. $\mathcal{G}$ действует на $\mathcal{F}_{cl}$ неприводимо). Тем самым, также возникает гомоморфизм алгебр Ли из алгебры Ли $\mathcal{A}$ группы $\mathcal{G}$ в векторные поля на $\mathcal{F}_{cl}$:

$$\hat{\kappa} : e_\alpha \mapsto v_\alpha = v^i_\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F}_{cl}) \tag{30}$$

где (e_α) — базис в $\mathcal{A}$. Наконец, пусть $S_{cl} \in \mathrm{Fun}(\mathcal{F}_{cl})$ — классическое действие калибровочной теории, инвариантное относительно действия $\mathcal{G}$, т.е. S_{cl} на самом деле есть функция на множестве орбит действия $\mathcal{G}$: $S_{cl} \in \mathrm{Fun}(\mathcal{F}_{cl}/\mathcal{G})$. Задача фиксации калибровки состоит в том, чтобы придать смысл интегралу

$$\text{“}\int_{\mathcal{F}_{cl}} e^{S/\hbar}\text{”} \tag{31}$$

чтобы его можно было вычислять методом стационарной фазы. Ясно, что из-за калибровочной симметрии действия, гессиан действия в любой стационарной точке сильно вырожден и пертурбативное разложение не определено. Естественный способ понять интеграл (31) — как интеграл по косету

$$\int_{\mathcal{F}_{cl}/\mathcal{G}} e^{S/\hbar} \tag{32}$$

однако такой ответ не удовлетворителен с точки зрения физики, где $\mathcal{F}_{cl}$ и $\mathcal{G}$ обычно являются пространствами сечений некоторых расслоений на многообразии (пространстве-времени) и ответ для (31) также хотелось бы иметь в виде интеграла по пространству сечений какого-то расслоения на пространстве-времени.

Идея метода Фаддеева-Попова состоит в следующем. Выберем функцию $\phi : \mathcal{F}_{cl} \to \mathcal{A}$, такую что всякая орбита $\mathcal{G}$ пересекает поверхность $\phi^{-1}(0) \subset \mathcal{F}_{cl}$ ровно один раз (т.е. $\phi^{-1}(0) \sim \mathcal{F}_{cl}/\mathcal{G}$). Интеграл по косету (32) переписывается как

$$\int_{\mathcal{F}_{cl}} e^{S_{cl}/\hbar} \prod_{\alpha} \delta(\phi^{\alpha}(x)) \cdot \det \left(v^i_{\alpha}(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \phi^{\beta}(x) \right) \prod_i \mathcal{D}x^i \tag{33}$$

и важное утверждение состоит в том, что это выражение не меняется при изменении функции ϕ. Дельта-функции в (33) локализуют интеграл на поверхность $\phi^{-1}(0) \subset \mathcal{F}_{cl}$, а детерминант обеспечивает инвариантность при изменении ϕ. Наконец, вводя дополнительно грассмановы поля c^{α}, $\bar{c}_{\alpha}$ с духовыми числами $+1$ и -1 соответственно (духи Фаддеева-Попова) и лагранжев множитель λ_{α} с духовым числом 0, мы можем переписать (33) как интеграл

$$\int_{\mathcal{F}_{FP}} e^{S_{FP}/\hbar} \prod_i \mathcal{D}x^i \prod_{\alpha} \mathcal{D}c^{\alpha} \mathcal{D}\bar{c}_{\alpha} \mathcal{D}\lambda_{\alpha} \tag{34}$$

по расширенному пространству полей

$$\mathcal{F}_{FP} = \mathcal{F}_{cl} \oplus \mathcal{A}[1] \oplus \mathcal{A}^*[-1] \oplus \mathcal{A}^* \tag{35}$$

с координатами $(x^i, c^{\alpha}, \bar{c}_{\alpha}, \lambda_{\alpha})$ для действия Фаддева-Попова:

$$S_{FP}(x, c, \bar{c}, \lambda) := S_{cl}(x) + \lambda_{\alpha} \phi^{\alpha}(x) + \bar{c}_{\alpha} \frac{\partial \phi^{\alpha}(x)}{\partial x^i} v^i_{\beta}(x) c^{\beta} \tag{36}$$

Интеграл (34) пертурбативно определён и не зависит от выбора калибровки и поэтому решает задачу фиксации калибровки для выражения (31).

Характерный пример калибровочной теории, для которой задача фиксации калибровки решается методом Фаддеева-Попова, — теория Янга-Миллса. Пусть M — риманово многообразие (пространство-время), G — группа Ли (калибровочная группа) и $\mathfrak{g}$ — её алгебра Ли. Тогда для теории Янга-Миллса $\mathcal{F}_{cl} = \mathfrak{g} \otimes \Omega^1(M)$ — пространство связностей в тривиальном G-расслоении на M, $\mathcal{G} = G^M$ — группа послойных поворотов главного расслоения, и её алгебра Ли $\mathcal{A} = \mathfrak{g} \otimes \Omega^0(M)$ действует на связностях $A \in \mathcal{F}_{cl}$ обычными калибровочными преобразованиями $A \mapsto A + d_A\alpha$, где $\alpha \in \mathcal{A}$ — генератор калибровочного преобразования и $d_A = d + [A, \bullet]$ — ковариантный дифференциал. Классическое действие Янга-Миллса $S_{cl}(A) = \frac{1}{4}\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}} \int_M *F_A \wedge F_A$, где $* : \Omega^{\bullet}(M) \to \Omega^{\dim(M)-\bullet}(M)$ — звёздочка Ходжа, $F_A = dA + A \wedge A$ — кривизна связности A, след $\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}$ вычисляется в присоединённом представлении. Калибровка Лоренца для теории Янга-Миллса соответствует выбору фиксирующей калибровку функции $\phi = d^* : \mathfrak{g} \otimes \Omega^1(M) \to \mathfrak{g} \otimes \Omega^0(M)$ — оператор Ходжа. Такому выбору ϕ соответствует действие Фаддеева-Попова

$$S_{FP} = S_{cl}(A) + \mathrm{tr} \int_M \lambda \wedge d^* A + \mathrm{tr} \int_M \bar{c} \wedge d^* d_A c$$

где c, $\bar{c}$ и λ — $\mathfrak{g}$-значные 0-, $\dim(M)$- и $\dim(M)$-формы соответственно, с духовыми числами $+1$, -1 и 0, и мы воспользовались спариванием $\mathrm{tr} \int \bullet \wedge \bullet : \mathcal{A}^{\otimes 2} \to \mathbb{R}$, чтобы отождествить $\mathcal{A}^*$ с $\mathcal{A}$ в (35). Без этого отождествления следовало бы писать

$$S_{FP} = S_{cl}(A) + < \lambda, d^* A > + < \bar{c}, d^* d_A c > \qquad (37)$$

и понимать c как $\mathfrak{g}$-значную 0-форму, а $\bar{c}$ и λ — как $\mathfrak{g}^*$-значные 0-потоки ($< \bullet, \bullet >$ — каноническое спаривание форм с потоками и $\mathfrak{g}$ с $\mathfrak{g}^*$).

3.2. **Фиксация калибровки: метод БРСТ.** Идея метода БРСТ заключается в том, чтобы погрузить многообразие классических полей $\mathcal{F}_{cl}$ в нулевой элемент градуировки $\mathbb{Z}$-градуированного многообразия БРСТ-полей $\mathcal{F}_{\mathrm{BRST}}$ (градуированного духовым числом gh). Последнее является Q-многообразием в терминологии [3], т.е. на кольце функций $\mathrm{Fun}(\mathcal{F}_{\mathrm{BRST}})$ действует БРСТ-оператор — дифференциальный оператор первого порядка $Q : \mathrm{Fun}(\mathcal{F}_{\mathrm{BRST}}) \to \mathrm{Fun}(\mathcal{F}_{\mathrm{BRST}})$, удовлетворяющий $Q^2 = 0$, $\mathrm{gh}(Q) = +1$. На языке супергеометрии Q называется когомологическим векторным полем на $\mathcal{F}_{\mathrm{BRST}}$. Центральным утверждением в БРСТ-формализме является версия теоремы Стокса для интеграла по $\mathcal{F}_{\mathrm{BRST}}$:

$$\int_{\mathcal{F}_{\mathrm{BRST}}} Qf = 0 \qquad (38)$$

для любого $f \in \mathrm{Fun}(\mathcal{F}_{\mathrm{BRST}})$, т.е. интеграл от БРСТ-кограницы равен нулю. Условия совместимости данных БРСТ-формализма $(\mathcal{F}_{\mathrm{BRST}}, Q)$ с классической калибровочной теорией состоят в том, что

- классическое действие есть БРСТ-коцикл:

$$QS_{cl} = 0$$

- $\mathcal{F}_{\mathrm{BRST}}$ есть резольвента пространства орбит группы калибровочных преобразований $\mathcal{F}_{cl}/\mathcal{G}$ в следующем смысле: когомологии Q в духовом числе 0 изоморфны кольцу функций на $\mathcal{F}_{cl}/\mathcal{G}$:

$$H^0_Q(\mathrm{Fun}(\mathcal{F}_{\mathrm{BRST}})) \sim \mathrm{Fun}(\mathcal{F}_{cl}/\mathcal{G})$$

Для ситуации раздела 3.1, т.е. для калибровочной теории с простой (неприводимой и замкнутой) калибровочной симметрией, минимальная БРСТ-резольвента строится как

$$\mathcal{F}_{\mathrm{minBRST}} = \mathcal{F}_{cl} \oplus \mathcal{A}[1] \tag{39}$$

и в координатах (x^i, c^α) БРСТ-оператор имеет вид

$$Q_{\min} = -c^\alpha v^i_\alpha(x) \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{1}{2} f^\alpha_{\beta\gamma} c^\beta c^\gamma \frac{\partial}{\partial c^\alpha} \tag{40}$$

где $f^\alpha_{\beta\gamma}$ — структурные константы алгебры Ли калибровочных преобразований $\mathcal{A}$. Условие $Q_{\min} S_{cl} = 0$ эквивалентно утверждению о калибровочной инвариантности действия $S_{cl} \in \mathrm{Fun}(\mathcal{F}_{cl}/\mathcal{G})$, а условие $Q^2_{\min} = 0$ эквивалентно паре (тождество Якоби для структурных констант $f^\alpha_{\beta\gamma}$, условие, что (30) есть гомоморфизм). Таким образом, в БРСТ-формализме вся информация об алгебре калибровочных преобразований $\mathcal{A}$ и её действии на $\mathcal{F}_{cl}$ содержится в (минимальном) БРСТ-операторе $Q_{\min}$.

Фиксация калибровки в БРСТ-формализме делается следующим образом: выберем какую-нибудь функцию $\Psi \in \mathrm{Fun}(\mathcal{F}_{\mathrm{BRST}})$, $\mathrm{gh}(\Psi) = -1$ (фиксирующий калибровку фермион). Тогда формально, благодаря (38), имеем

$$\int_{\mathcal{F}_{\mathrm{BRST}}} e^{\frac{1}{\hbar} S_{cl}} = \int_{\mathcal{F}_{\mathrm{BRST}}} e^{\frac{1}{\hbar}(S_{cl} + Q\Psi)}$$

и правая часть не зависит от Ψ (если она определена). Таким образом, в БРСТ-формализме предлагается выбрать какой-нибудь фиксирующий калибровку фермион Ψ, такой что интеграл

$$\int_{\mathcal{F}_{\mathrm{BRST}}} e^{\frac{1}{\hbar}(S_{cl} + Q\Psi)} \tag{41}$$

пертурбативно определён, и объявить его значением неопределённого выражения (31).

Далее, оказывается, что условие существования Ψ, такого что (41) определено, требует расширить $(\mathcal{F}_{\mathrm{minBRST}}, Q_{\min})$ до некоторого большего БРСТ-многообразия $(\mathcal{F}_{\mathrm{fullBRST}}, Q_{\mathrm{full}})$. В самом деле, в $\mathrm{Fun}(\mathcal{F}_{\mathrm{minBRST}})$ вообще отсутствуют функции с духовым числом -1. Для решения этой проблемы предлагается следущий способ расширить пространство БРСТ-полей, не изменив когомологии Q:

$$\mathcal{F}_{\mathrm{minBRST}} \mapsto \mathcal{F}_{\mathrm{fullBRST}} = \mathcal{F}_{\mathrm{minBRST}} \oplus T[1] V_{\mathrm{Aux}} \tag{42}$$

где в качестве V_{Aux} можно взять любое векторное пространство и $T[1]V_{\mathrm{Aux}} = V_{\mathrm{Aux}} \oplus V_{\mathrm{Aux}}[1]$ — его касательное расслоение со сдвинутой градуировкой слоя. Алгебра функций на расслоении $\mathrm{Fun}(T[1]V_{\mathrm{Aux}})$ естественно отождествляется с алгеброй дифференциальных форм на базе $\Omega^\bullet(V_{\mathrm{Aux}})$. Поэтому на $T[1]V_{\mathrm{Aux}}$ есть естественное когомологическое векторное поле — дифференциал де Рама $d_{V_{\mathrm{Aux}}} = \lambda^I \frac{\partial}{\partial \bar{c}^I}$, где $(\bar{c}^I, \lambda^I)$ — координаты в базе и слое $T[1]V_{\rm Aux}$ соответственно. В качестве расширенного БРСТ-оператора предлагается взять

$$Q_{\rm min} \mapsto Q_{\rm full} = Q_{\rm min} + d_{V_{\rm Aux}} \tag{43}$$

И понятно, что когомологии БРСТ-оператора при таком расширении тензорно умножаются на когомологии де Рама $V_{\rm Aux}$ (стягиваемого), то есть, не меняются вовсе.

Для теории с неприводимой калибровочной симметрией предлагается взять $V_{\rm Aux} = \mathcal{A}^*[-1]$. Тогда полное пространство БРСТ-полей есть

$$\mathcal{F}_{\rm fullBRST} = \mathcal{F}_{cl} \oplus \mathcal{A}[1] \oplus T[1](\mathcal{A}^*[-1])$$

(оно, заметим, совпадает с (35)) и полный БРСТ-оператор:

$$Q_{\rm full} = -c^\alpha v^i_\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{1}{2} f^\alpha_{\beta\gamma} c^\beta c^\gamma \frac{\partial}{\partial c^\alpha} + \lambda_\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{c}_\alpha}$$

Теперь мы можем построить фермион Ψ, используя тот же объект, что и для метода Фаддеева-Попова — функцию $\phi : \mathcal{F}_{cl} \to \mathcal{A}$:

$$\Psi = \bar{c}_\alpha \phi^\alpha(x) \tag{44}$$

БРСТ-действие в данном случае

$$S_{cl}(x) + Q_{\rm full}\Psi = S_{cl}(x) + \bar{c}_\alpha \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^i} v^i_\beta(x) c^\beta + \lambda_\alpha \phi^\alpha(x)$$

совпадает с действием Фаддеева-Попова (36).

БРСТ-формализм применим также в более сложном случае приводимой (но замкнутой) калибровочной симметрии, т.е. когда действие действие группы калибровочных преобразований $\kappa_1 : \mathcal{G}_1 \to {\rm Diff}(\mathcal{F}_{cl})$ является приводимым (обладает ненулевым ядром). Тогда на $\mathcal{G}_1$ в свою очередь действует правыми сдвигами группа $\mathcal{G}_2$, т.е. задан гомоморфизм групп $\kappa_2(x) : \mathcal{G}_2 \to {\rm RShifts}(\mathcal{G}_1)$, зависящий, вообще говоря, от $x \in \mathcal{F}_{cl}$. Группу правых сдвигов $\mathcal{G}_1$ мы обозначили ${\rm RShifts}(\mathcal{G}_1)$. Используя естественное отождествление ${\rm RShifts}(\mathcal{G}_1) = \mathcal{G}_1$ (отправляющее правый сдвиг в его значение для единицы $1 \in \mathcal{G}_1$) мы говорим, что κ_2 есть зависящий от точки $x \in \mathcal{F}_{cl}$ гомоморфизм $\kappa_2(x) : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ и условие точности состоит в том, что образ $\kappa_2(x)$ совпадает со стабилизатором точки $x \in \mathcal{F}_{cl}$ в $\mathcal{G}_1$:

$${\rm im}(\kappa_2(x)) = {\rm Stab}_x \subset \mathcal{G}_1$$

Если действие $\kappa_2(x)$ приводимо, мы вводим следующий этаж башни приводимости — группу $\mathcal{G}_3$ и гомоморфизм $\kappa_3(x) : \mathcal{G}_3 \to {\rm RShifts}(\mathcal{G}_2) = \mathcal{G}_2$ с условием ${\rm im}(\kappa_3(x)) = \ker(\kappa_2(x)) \in \mathcal{G}_2$ и т.д. до некоторого этажа p, на котором $\ker(\kappa_p) = \{1\} \subset \mathcal{G}_p$ (действие κ_p неприводимо). Тем самым, имеется точная последовательность действий

$$\mathcal{G}_p \circlearrowright \cdots \circlearrowright \mathcal{G}_2 \circlearrowright \mathcal{G}_1 \circlearrowright \mathcal{F}_{cl}$$

то есть, точная последовательность гомоморфизмов групп

$$1 \to \mathcal{G}_p \to \cdots \to \mathcal{G}_2 \to \mathcal{G}_1 \to \mathrm{Diff}(\mathcal{F}_{cl})$$

В терминах инфинитезимальных калибровочных преобразований, задана точная последовательность действий алгебр Ли

$$\mathcal{A}_p \circlearrowleft \cdots \circlearrowleft \mathcal{A}_2 \circlearrowleft \mathcal{A}_1 \circlearrowleft \mathcal{F}_{cl} \tag{45}$$

что означает точную последовательность гомоморфизмов алгебр Ли

$$0 \to \mathcal{A}_p \to \cdots \to \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_1 \to \mathrm{Vect}(\mathcal{F}_{cl}) \tag{46}$$

где гомоморфизмы $\hat{\kappa}_2(x), \ldots, \hat{\kappa}_p(x)$ зависят от точки $x \in \mathcal{F}_{cl}$ и условия точности состоят в том, что $\mathrm{im}(\hat{\kappa}_2(x)) = \mathrm{Stab}_x \in \mathcal{A}_1$, $\mathrm{im}(\hat{\kappa}_3(x)) = \ker(\hat{\kappa}_2(x))$, $\ldots$, $\ker(\hat{\kappa}_p(x)) = 0$. Более строгий способ понимать башню приводимости инфинитезимальной калибровочной симметрии — как точную последовательность алгеброидов Ли над $\mathcal{F}_{cl}$ (и морфизмов алгеброидов Ли):

$$0 \to \mathcal{A}_p \times \mathcal{F}_{cl} \to \cdots \to \mathcal{A}_2 \times \mathcal{F}_{cl} \to \mathcal{A}_1 \times \mathcal{F}_{cl} \to T\mathcal{F}_{cl}$$

Здесь $A_1 \times \mathcal{F}_{cl}$ понимается как алгеброид над $\mathcal{F}_{cl}$ с якорем $\hat{\kappa}_1 : \mathcal{A}_1 \times \mathcal{F}_{cl} \to T\mathcal{F}_{cl}$ (условие якорного отображения здесь заменяет условие гомоморфизма в (46)). Следующие этажи $\mathcal{A}_2 \times \mathcal{F}_{cl}$, $\ldots$, $\mathcal{A}_p \times \mathcal{F}_{cl}$ понимаются также как алгеброиды над $\mathcal{F}_{cl}$ но с нулевым якорем. Отображения $\hat{\kappa}_2$, $\ldots$, $\hat{\kappa}_p$ здесь понимаются как послойные гомоморфизмы алгебр Ли.

Минимальное пространство БРСТ-полей в случае приводимой калибровочной симметрии строится как

$$\mathcal{F}_{\mathrm{minBRST}} = \mathcal{F}_{cl} \oplus \mathcal{A}_1[1] \oplus \mathcal{A}_2[2] \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}_p[p] \tag{47}$$

с координатами $x^i \in \mathrm{Fun}(\mathcal{F}_{cl})$ (классические поля, $\mathrm{gh}(x^i) = 0$), $c_1^{\alpha_1} \in \mathrm{Fun}(\mathcal{A}_1[1])$ (духи для классических полей, или первые духи, $\mathrm{gh}(c_1^{\alpha_1}) = 1$), $c_2^{\alpha_2} \in \mathrm{Fun}(\mathcal{A}_2[2])$ (духи для первых духов, или вторые духи, $\mathrm{gh}(c_2^{\alpha_2}) = 2$) и т.д. БРСТ-оператор $Q_{\min}$ структурным константам алгебр алгебраической структуры (45). Полное пространство БРСТ-полей строится как и раньше (42), однако в качестве V_{Aux}, согласно общей конструкции [7], предлагается взять большое пространство

$$V_{\mathrm{Aux}} = \bigoplus_{1 \le B \le A \le p} V_{AB} \tag{48}$$

где

$$V_{AB} = \begin{cases} \mathcal{A}_A^*[-A+B-1] & \text{если } B \text{ нечётно} \\ \mathcal{A}_A[A-B] & \text{если } B \text{ чётно} \end{cases}$$

то есть

$$V_{\mathrm{Aux}} = \qquad \mathcal{A}_1^*[-1] \oplus$$

$$(\mathcal{A}_2^*[-2] \oplus \mathcal{A}_2[0]) \oplus$$
$$(\mathcal{A}_3^*[-3] \oplus \mathcal{A}_3[1] \oplus \mathcal{A}_3^*[-1]) \oplus$$
$$\vdots$$

БРСТ-оператор как и раньше (43) расширяется на оператор де Рама для V_{Aux}.

Как простейший пример теории с приводимой калибровочной симметрией можно привести абелево "тензорное поле": $\mathcal{F}_{cl} = \Omega^p(M)$, т.е. классическое поле x есть p-форма на римановом многообразии M (пространстве-времени), с действием $S_{cl} = \int_M *dx \wedge dx$, где $*$ — звёздочка Ходжа. Эта теория обладает (абелевой) калибровочной симметрией $x \mapsto x + dx_1$, где $x_1 \in \mathcal{A}_1 = \Omega^{p-1}(M)$. Эта симметрия приводима (если $p \geq 2$): x_1 можно в свою очередь сдвинуть на точную форму: $x_1 \mapsto x_1 + dx_2$, где $x_2 \in \mathcal{A}_p = \Omega^{p-2}(M)$ и т.д. Таким образом в качестве башни симметрии (46) у нас возникает отрезок комплекса де Рама

$$0 \to \Omega^0(M) \to \cdots \to \Omega^{p-2}(M) \to \Omega^{p-1}(M) \to \Omega^p(M)$$

где все отображения задаются дифференциалом де Рама d (условие гомоморфизма тривиально, поскольку все алгебры $\mathcal{A}_k = \Omega^{p-k}(M)$ абелевы). В качестве последнего члена мы написали $\Omega^p(M)$, а не $\mathrm{Vect}(\Omega^p(M))$, поскольку $\mathcal{A}_1$ действует на $\mathcal{F}_{cl}$ постоянными векторными полями. Заметим, условие точности здесь не выполнено, однако оно нарушается на конечномерное пространство когомологий. Минимальный набор БРСТ-полей здесь состоит из классического поля $x \in \Omega^p(M)$ и башни духов $c_k \in \Omega^{p-k}(M)$, $k = 1, \ldots, k$, причём $\mathrm{gh}(x) = 0$, $\mathrm{gh}(c_k) = k$. Минимальный БРСТ-оператор задаётся как

$$Q_{\min} = dc_1 \frac{\partial}{\partial x} + dc_2 \frac{\partial}{\partial c_1} + \cdots + dc_p \frac{\partial}{\partial c_{p-1}}$$

Для фиксации калибровки мы расширяем минимальной пространство БРСТ-полей вспомогательными полями (42,48)— антидухами $\bar{c}_{AB}$ и лагранжевыми множителями λ_{AB}, где $1 \leq B \leq A \leq p$. Для нечётного A, согласно общей конструкции, мы полагаем $\bar{c}_{AB}, \lambda_{AB} \in (\Omega^{p-A}(M))^*$ с духовыми числами $\mathrm{gh}(\bar{c}_{AB}) = B - A - 1$ для антидухов и $\mathrm{gh}(\lambda_{AB}) = B - A$ для лагранжевых множителей; для чётного A полагаем $\bar{c}_{AB}, \lambda_{AB} \in \Omega^{p-A}(M)$ с духовыми числами $\mathrm{gh}(\bar{c}_{AB}) = A - B$, $\mathrm{gh}(\lambda_{AB}) = A - B + 1$. Тем самым, для полного БРСТ-оператора имеем

$$Q_{\mathrm{full}} = dc_1 \frac{\partial}{\partial x} + dc_2 \frac{\partial}{\partial c_1} + \cdots + dc_p \frac{\partial}{\partial c_{p-1}} + \sum_{1 \leq B \leq A \leq p} \lambda_{AB} \frac{\partial}{\partial \bar{c}_{AB}}$$

Калибровка Лоренца для данной модели соответствует выбору

$$\begin{aligned} \Psi = \quad & < \bar{c}_{11}, d^* x > + \\ & < \bar{c}_{21}, d^* c_1 > + < \bar{c}_{11}, d\bar{c}_{22} > + \end{aligned}$$

$$< \bar{c}_{31}, d^* c_2 > + < \bar{c}_{21}, d\bar{c}_{32} > + < \bar{c}_{33}, d^* \bar{c}_{22} > +$$

$$\ldots$$

где, как и ранее в (37), мы обозначаем каноническое спаривание потоков с формами через $< \bullet, \bullet >$.

3.3. **Фиксация калибровки: метод Баталина-Вилковыского.** Идея метода Баталина-Вилковыского состоит в том, чтобы погрузить пространство классических полей $\mathcal{F}_{cl}$ в БВ-многообразие $\mathcal{F}_{\mathrm{BV}} = T^*[-1]\mathcal{F}_{\mathrm{BRST}}$ — пространство БВ-полей с каноническим БВ-лапласианом

$$\Delta = \sum_a (-1)^{\mathrm{gh}(\Phi^a)} \frac{\partial}{\partial \Phi^a} \frac{\partial}{\partial \Phi_a^+}$$

где (Φ^a) — координаты на $\mathcal{F}_{\mathrm{BRST}}$ и (Φ_a^+) — сопряжённые координаты в слое $T^*[-1]\mathcal{F}_{\mathrm{BRST}}$ (в терминологии Баталина-Вилковыского Φ^a называются полями и могут быть классическими полями, духами, антидухами, лагранжевыми множителями; а Φ_a^+ называются соответствующими "анти-полями"). Далее, следует найти БВ-действие (или "мастер-действие"), т.е. функцию $S \in \mathrm{Fun}(\mathcal{F}_{\mathrm{BV}})$, регулярную по $\hbar$, с духовым числом $\mathrm{gh}(S) = 0$ и удовлетворяющую квантовому мастер-уравнению (21). Также требуется выполнение следующих условий для БВ-действия:

- условие совместимости с классическим действием:

$$S^0|_{\mathcal{F}_{\mathrm{BRST}}} = S_{cl}$$

- условие собственности: ранг матрицы вторых производных S в любой стационарной точке классического действия $x \in \mathcal{F}_{m.s.}$ равен $\frac{1}{2} \dim \mathcal{F}_{\mathrm{BV}}$.

Здесь мы ввели обозначение $\mathcal{F}_{m.s.} = \{x \in \mathcal{F}_{cl} : \delta S_{cl}(x) = 0\} \subset \mathcal{F}_{cl}$ для множества стационарных точек классического действия. Множество $\mathcal{F}_{m.s.}$ называется "массовой поверхностью".

Фиксация калибровки в формализме Баталина-Вилковыского осуществляется посредством замены выражения (31) на интеграл экспоненты БВ-действия по лагранжевому подмногообразию $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}_{\mathrm{BV}}$:

$$\int_{\mathcal{L}} e^{S/\hbar} \tag{49}$$

Выбор калибровки здесь соответствует выбору $\mathcal{L}$, инвариантность интеграла при непрерывной деформации $\mathcal{L}$ обеспечивается теоремой Баталина-Вилковыского (18). Разумность замены (31) на (49) также обосновывается тем, что на специальном лагранжевом подмногообразии $\mathcal{L} = \mathcal{F}_{\mathrm{BRST}} \subset \mathcal{F}_{\mathrm{BV}}$ подынтегральное выражение в (49) переходит в экспоненту классического действия. Условие собственности для S является необходимым условием существования таких $\mathcal{L}$, для которых интеграл (49) пертурбативно определён.

Пусть для некоторой калибровочной теории задача фиксации калибровки решается методом БРСТ с помощью пространства БРСТ-полей $\mathcal{F}_{\mathrm{BRST}}$, БРСТ-оператора Q и фиксирующего калибровку фермиона Ψ. Тогда мы полагаем

$$\mathcal{F}_{\mathrm{BV}} = T^*[-1]\mathcal{F}_{\mathrm{BRST}} \tag{50}$$

строим БВ-действие по классическому действию и БРСТ-оператору как

$$S = S_{cl} - Q(\Phi^a)\Phi_a^+ \tag{51}$$

и выбираем в качестве $\mathcal{L}$ лагранжево подмногообразие вида (16), т.е. деформацию $\mathcal{F}_{\mathrm{BRST}}$, заданную фиксирующим калибровку фермионом Ψ:

$$\Phi_a^+ = -\frac{\partial}{\partial \Phi^a}\Psi$$

Тогда

$$\int_{\mathcal{L}_\Psi} e^{S/\hbar} = \int_{\mathcal{L}_\Psi} e^{S|_{\mathcal{L}_\Psi}/\hbar} = \int_{\mathcal{F}_{\mathrm{BRST}}} e^{\frac{1}{\hbar}(S+Q\Psi)}$$

и интеграл по лагранжеву подмногообразию сводится к (41). Заметим также, что классическое мастер-уравнение для (51) выполняется автоматически, благодаря $QS_{cl} = 0$, $Q^2 = 0$. Однако, для выполнения квантового мастер-уравнения, нужно дополнительно потребовать $\mathrm{div}(Q) = 0$. БРСТ-оператор Q продолжается на всё пространство БВ-полей с помощью конструкции (26):

$$Q_{\mathcal{F}_{\mathrm{BV}}} = \{S^0, \bullet\} = Q(\Phi^a)\frac{\partial}{\partial \Phi^a} + \left((S_{cl} - Q(\Phi^b)\Phi_b^+)\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \Phi^a}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial \Phi_a^+}$$

и заметим, что подалгебра функций, не зависящих от анти-полей, $\mathrm{Fun}(\mathcal{F}_{\mathrm{BRST}}) \subset \mathrm{Fun}(\mathcal{F}_{\mathrm{BV}})$ является замкнутой относительно действия $Q_{\mathcal{F}_{\mathrm{BV}}}$, причём он действует там, как обычный БРСТ-оператор: $Q_{\mathcal{F}_{\mathrm{BV}}}|_{\mathcal{F}_{\mathrm{BRST}}} = Q$.

В частности, для общей калибровочной теории с замкнутой неприводимой калибровочной симметрией $\mathcal{A} \circlearrowright \mathcal{F}_{cl}$ минимальное пространство БВ-полей имеет вид

$$\mathcal{F}_{\mathrm{minBV}} = T^*[1](\mathcal{F}_{cl} \oplus \mathcal{A}[1])$$

с координатами x^i, c^α на базе и x_i^+, c_α^+ в слое (духовые числа равны, соответственно, 0, 1, -1, -2). Минимальное БВ-действие строится с помощью (40,51):

$$S_{\min}(x, c, x^+, c^+) = S_{cl}(x) - x_i^+ v_\alpha^i(x) c^\alpha + \frac{1}{2} f_{\beta\gamma}^\alpha c_\alpha^+ c^\beta c^\gamma$$

Для того, чтобы оно удовлетворяло квантовому мастер-уравнению, надо потребовать, чтобы алгебра $\mathcal{A}$ была унимодулярна, т.е. $f_{\alpha\beta}^\alpha = 0$. Как и для минимального БРСТ-формализма, здесь возникает проблема с фиксирующим калибровку фермионом Ψ, т.е. не задать деформацию $\mathcal{F}_{\mathrm{BRST}}$ в классе лагранжевых подмногообразий.

Для решения этой проблемы, как и в БРСТ-формализме, мы вводим вспомогательное векторное пространство (пространство антидухов) V_{Aux} и полагаем

$$\mathcal{F}_{\text{fullBV}} = \mathcal{F}_{\text{minBV}} \oplus T^*[-1](T[1]V_{\text{Aux}})$$

и

$$S_{\text{full}} = S_{\text{min}} - \bar{c}_I^+ \lambda^I$$

где мы используем координаты $(\bar{c}^I, \lambda^I, \bar{c}_I^+, \lambda_I^+)$ на $T^*[-1](T[1]V_{\text{Aux}})$.

Для примера теории с неприводимой замкнутой калибровочной симметрией $\mathcal{A} \circlearrowright \mathcal{F}_{cl}$ имеем $V_{\text{Aux}} = \mathcal{A}^*[-1]$ и

$$\mathcal{F}_{\text{fullBV}} = T^*[-1]\left(\mathcal{F}_{cl} \oplus \mathcal{A}[1] \oplus T[1](\mathcal{A}^*[-1])\right)$$

с координатами $(x^i, c^\alpha, \bar{c}_\alpha, \lambda_\alpha; x_i^+, c_\alpha^+, \bar{c}^{+\alpha}, \bar{\lambda}^{+\alpha})$, духовые числа которых равны, соответственно, 0, 1, -1, 0, -1, -2, 0, -1. Полное БВ-действие имеет вид

$$S_{\text{full}} = S_{cl}(x) - x_i^+ v_\alpha^i(x) c^\alpha + \frac{1}{2} f_{\beta\gamma}^\alpha c_\alpha^+ c^\beta c^\gamma - \bar{c}^{+\alpha}\lambda_\alpha$$

В качестве фиксирующего калибровку фермиона мы, как и в БРСТ-формализме, берём (44), т.е. для $\mathcal{L}_\Psi$ имеем

$$\mathcal{L}_\Psi = \{(x^i, c^\alpha, \bar{c}_\alpha, \lambda_\alpha; x_i^+, c_\alpha^+, \bar{c}^{+\alpha}, \bar{\lambda}^{+\alpha}) | x_i^+ = -\frac{\partial \phi^\alpha(x)}{\partial x^i}\,\bar{c}_\alpha,\ c_\alpha^+ = 0,\ \bar{c}^{+\alpha} = -\phi^\alpha(x),\ \lambda^{+\alpha} = 0\}$$

и интеграл (49) в данном случае вновь совпадает с интегралом Фаддева-Попова (34,36)

$$\int_{\mathcal{L}_\Psi \subset \mathcal{F}_{\text{fullBV}}} e^{S_{\text{full}}/\hbar} = \int \prod_i \mathcal{D}x^i \prod_\alpha \mathcal{D}c^\alpha \mathcal{D}\bar{c}_\alpha \mathcal{D}\lambda_\alpha\ \exp\frac{1}{\hbar}\left(S_{cl}(x) + \bar{c}_\alpha \frac{\partial\phi^\alpha(x)}{\partial x^i} v_\beta^i(x) c^\beta + \lambda_\alpha \phi^\alpha(x)\right) \quad (52)$$

Заметим, что в минимальном БВ-формализме, несмотря на отсутствие малых деформаций $\mathcal{F}_{\text{minBRST}} \subset \mathcal{F}_{\text{minBV}}$, существуют другие лагранжевы подмногообразия — конормальные расслоения (17) для подмногообразий $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}_{\text{BRST}}$. Вообще говоря, теорема Баталина-Вилковыского (18) неприменима буквально в этом случае, поскольку переход к конормальному расслоению не есть малая деформация. Однако, вернёмся к примеру теории $\mathcal{A} \circlearrowright \mathcal{F}_{cl}$. По функции $\phi : \mathcal{F}_{cl} \to \mathcal{A}$ построим подмногообразие

$$\mathcal{K} = \phi^{-1}(0) \oplus \mathcal{A}[1] = \{(x^i, c^\alpha) | \phi^\alpha(x) = 0\} \subset \mathcal{F}_{\text{minBRST}} \quad (53)$$

и его конормальное расслоение

$$N^*[-1]\mathcal{K} = \{(x^i, c_\alpha; x_i^+, c_\alpha^+) | \phi^\alpha(x) = 0, x_i^+ = -\frac{\partial\phi^\alpha(x)}{\partial x^i}\,\bar{c}_\alpha, c_\alpha^+ = 0\} \subset \mathcal{F}_{\text{minBV}} \quad (54)$$

здесь антидухи $\bar{c}_\alpha$ появились как координаты на пространстве ковекторов, ортогональных поверхности $\phi^{-1}(0) \in \mathcal{F}_{cl}$. Теперь заметим, что если в (52) взять интеграл по лагранжеву множителю λ_α и учесть возникающие дельта-функции $\prod_\alpha \delta(\phi^\alpha(x))$, мы получим в точности интеграл по конормальному расслоению (54) в минимальном БВ-формализме:

$$\int_{N^*[-1]\mathcal{K}\subset\mathcal{F}_{\mathrm{minBV}}} e^{S_{\mathrm{min}}/\hbar} = \int_{\mathcal{L}_\Psi\subset\mathcal{F}_{\mathrm{fullBV}}} e^{S_{\mathrm{full}}/\hbar} \tag{55}$$

для Ψ и $\mathcal{K}$ построенных по функции $\phi : \mathcal{F}_{cl} \to \mathcal{A}$ с помощью (44,53). Правая часть (55) не зависит от выбора ϕ по теореме Баталина-Вилковыского (18), а следовательно, не зависит и интеграл в левой части, для конормального расслоения в минимальном БВ-формализме. Таким образом, теорема Баталина-Вилковыского (18) работает и для (некоторого класса) конормальных расслоений в минимальном БВ-формализме. Полный БВ-формализм с вспомогательными полями с этой точки зрения является техническим инструментом для доказательства утверждения (18) в случае таких не непрерывных деформаций.

Случай калибровочной теории с замкнутой приводимой калибровочной симметрией прямо переносится из БРСТ-формализма в БВ-формализм с помощью конструкции (50,51). Однако, метод Баталина-Вилковыского применим и в более сложных ситуациях. Например, в случае открытой калибровочной симметрии, т.е. когда распределение векторных полей на $\mathcal{F}_{cl}$, аннигилирующих S_{cl}, интегрируется до действия группы только на массовой поверхности $\mathcal{F}_{m.s.} \subset \mathcal{F}_{cl}$, а на всём $\mathcal{F}_{cl}$ оно не интегрируемо. В этом случае пространство БВ-полей строится снова с помощью (39,50), где $\mathcal{A}$ теперь — алгебра калибровочной симметрии на массовой поверхности. Формально построенный БРСТ-оператор Q (40) в данном случае будет нильпотентным только по модулю уравнений движения $\delta S_{cl} = 0$, поэтому метод БРСТ не работает, и конструкция (51) не работает. Нахождение БВ-действия S (которое теперь будет нелинейно по антиполям Φ_a^+) здесь является нетривиальной задачей. БРСТ-оператор на пространстве БВ-полей здесь определяется как прежде, с помощью (26), однако подалгебра функций $\mathrm{Fun}(\mathcal{F}_{\mathrm{BRST}}) \subset \mathrm{Fun}(\mathcal{F}_{\mathrm{BV}})$ уже не будет замкнута относительно его действия. Как пример калибровочной теории с открытой калибровочной симметрией можно привести пуассонову сигма-модель, 2-мерную модель топологической теории поля, отвечающую за деформационное квантование Концевича [10],[19]. Другая возможная ситуация, близкая к этой,— когда калибровочная симметрия замкнута, но приводима, и стабилизатор $\mathrm{Stab}_x \in \mathcal{G}_1$ зависит от того, лежит ли x на массовой поверхности, т.е. башня приводимости (46) разная над разными точками $x \in \mathcal{F}_{cl}$. Здесь метод Баталина-Вилковыского снова предлагает формально построить пространство БВ-полей с помощью (47,50), где $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_p$ определяются башней приводимости для $x \in \mathcal{F}_{m.s.}$. Пример такой ситуации — топологическая BF-теория в размерности $D \geq 4$ (в размерности $D < 4$ для неё работает обычный БРСТ-формализм). Этот пример будет разобран в разделе 3.4.

Кратко резюмируем основные особенности методов Фаддева-Попова, БРСТ и Баталина-Вилковыского.

- Метод Фаддеева-Попова. Данные: пространство $\mathcal{F}_{cl}$ с действием алгебры Ли $\mathcal{A} \circlearrowright \mathcal{F}_{cl}$, классическое действие есть эквивариантная функция классических полей $S_{cl} \in \mathrm{Fun}(\mathcal{F}_{cl})^{\mathcal{A}}$. Фиксация калибровки осуществляется выбором функции $\phi : \mathcal{F}_{cl} \to \mathcal{A}$. Вводятся духи c, $\bar{c}$, как инструмент, позволяющий поднять имеющий геометрическое происхождение детерминант в действие.
- Метод БРСТ. Данные: $\mathbb{Z}$-градуированное пространство $\mathcal{F}_{\mathrm{BRST}}$ с когомологическим векторным полем Q (в котором закодирована калибровочная симметрия исходной классической системы). БРСТ-действие есть класс Q-когомологий $S_{\mathrm{BRST}} = [S_{cl}] \in H^0_Q(\mathrm{Fun}(\mathcal{F}_{\mathrm{BRST}}))$. Фиксация калибровки есть выбор конкретного представителя для этого класса.
- Метод Баталина-Вилковыского. Данные: БВ-многообразие $(\mathcal{F}_{\mathrm{BV}}, \Delta)$, мастер-действие $S \in \mathrm{Fun}(\mathcal{F}_{\mathrm{BV}})$ (более точно, являющееся логарифмом полу-плотности на $\mathcal{F}_{\mathrm{BV}}$), решающее квантовое мастер-уравнение $\Delta e^{S/\hbar} = 0$ (в S закодировано и классическое действие и его калибровочные симметрии). Мастер-действия S и S' отличающиеся на каноническое преобразование $e^{S'/\hbar} - e^{S/\hbar} = \Delta(\cdots)$ полагаются эквивалентными. Фиксация калибровки есть выбор лагранжева подмногообразия $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}_{\mathrm{BV}}$.

3.4. **Топологическая BF-теория.** Пусть M есть D-мерное компактное ориентируемое многообразие, G — компактная группа Ли (калибровочная группа), $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ — её алгебра Ли, P — главное G-расслоение на M и $\mathrm{ad}P$ — присоединённое расслоение. Классические поля BF-теории — это связность на P и $(D-2)$-форма со значениями в $\mathrm{ad}P$:

$$A \in \mathrm{Conn}(M, P),\ B \in \Omega^{D-2}(M, \mathrm{ad}P)$$

Классическое действие BF-теории есть

$$S_{cl}(A, B) = \mathrm{tr}_g \int_M B \wedge F_A \tag{56}$$

где $F_A \in \Omega^2(M, \mathrm{ad}P)$ — кривизна связности A, tr_g — след в присоединённом представлении $\mathfrak{g}$. Мы ограничимся в дальнейшем случаем тривиального расслоения P. Таким образом $A \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ — $\mathfrak{g}$-значная 1-форма, $B \in \Omega^{D-2}(M, \mathfrak{g})$ — $\mathfrak{g}$-значная $(D-2)$-форма, действие есть

$$S_{cl}(A, B) = \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}} \int_M B \wedge (dA + A \wedge A)$$

и пространство классических полей:

$$\mathcal{F}_{cl} = \mathrm{Conn}(M,P) \oplus \Omega^{D-2}(M, \mathrm{ad}P) = \Omega^1(M,\mathfrak{g}) \oplus \Omega^{D-2}(M,\mathfrak{g})$$

Уравнения движения:

$$\begin{cases} F_A = 0 \\ d_A B = 0 \end{cases} \tag{57}$$

где $d_A = d + \mathrm{ad}_A$ — ковариантный дифференициал на фоне связности A. Таким образом, (A, B) есть стационарная точка действия S_{cl} тогда и только тогда, когда связность A плоская и B — ковариантно-постоянная $(D-2)$-форма.

Классическое действие инвариантно относительно калибровочных преобразований

$$\begin{cases} A & \mapsto & A^g = gAg^{-1} + g\,dg^{-1} \\ B & \mapsto & gBg^{-1} + d_{A^g}\tau_1 \end{cases} \tag{58}$$

где $g \in \Gamma(M,P) = \Omega^0(M,G)$ — послойный поворот расслоения P и $\tau_1 \in \Omega^{D-3}(M,\mathrm{ad}P) = \Omega^{D-3}(M,\mathfrak{g})$. Таким образом, группа калибровочных преобразований для BF-теории есть $\mathcal{G}_1 = \Omega^0(M,G) \ltimes \Omega^{D-3}(M,\mathfrak{g})$. Однако, в случае $D \geq 4$ действие $\mathcal{G}_1 \circlearrowright \mathcal{F}_{cl}$ приводимо на массовой поверхности, поскольку можно сдвинуть $\tau_1 \mapsto \tau_1 + d_{A^g}\tau_2$, если связность A плоская. Здесь $\tau_2 \in \Omega^{D-4}(M,\mathfrak{g})$. Так возникает действие $\mathcal{G}_2 \circlearrowright \mathcal{G}_1 \circlearrowright \mathcal{F}_{cl}$, где $\mathcal{G}_2 = \Omega^{D-4}(M,\mathfrak{g})$. В случае $D \geq 5$ это действие также приводимо, так как τ_2 можно сдвинуть на d_{A^g}-точную форму, и т.д. В итоге возникает башня приводимости калибровочной симметрии на массовой поверхности: $\mathcal{G}_{D-2} \circlearrowright \cdots \circlearrowright \mathcal{G}_2 \circlearrowright \mathcal{G}_1 \circlearrowright \mathcal{F}_{cl}$ где $\mathcal{G}_k = \Omega^{D-2-k}(M,\mathfrak{g})$ для $2 \leq k \leq D-2$. Все группы, кроме $\mathcal{G}_1$, здесь являются абелевыми. Инфинитезимально калибровочная симметрия на массовой поверхности описывается башней действий алгебр Ли

$$\mathcal{A}_{D-2} \circlearrowright \cdots \circlearrowright \mathcal{A}_2 \circlearrowright \mathcal{A}_1 \circlearrowright \mathcal{F}_{cl}$$

где $\mathcal{A}_1 = \mathrm{Lie}(\mathcal{G}_1) = \Omega^0(M,\mathfrak{g}) \ltimes \Omega^{D-2}(M,\mathfrak{g})$, с координатами (c, τ_1) и действием

$$\begin{cases} A & \mapsto & A + d_A c \\ B & \mapsto & B + [B, c] + d_A\tau_1 \end{cases}$$

Далее $\mathcal{A}_k = \mathrm{Lie}(\mathcal{G}_k) = \Omega^{D-2-k}(M,\mathfrak{g})$ при $2 \leq k \leq D-2$, причём $\mathcal{A}_k$ действует на $\mathcal{A}_{k-1}$ с помощью преобразования $\tau_{k-1} \mapsto \tau_{k-1} + d_A\tau_k$.

Согласно общим правилам, вводится (минимальное) пространство БРСТ-полей

$$\mathcal{F}_{\mathrm{BRST}} = \mathcal{F}_{cl} \oplus \mathcal{A}_1[1] \oplus \mathcal{A}_2[2] \oplus \cdots \oplus A_{D-2}[D-2]$$

с координатами $(A, B; c, \tau_1; \tau_2; \cdots; \tau_{D-2})$ где мы теперь понимаем c и τ_1 как духи, т.е. $\mathrm{gh}(c) = \mathrm{gh}(\tau_1) = 1$, далее, τ_2 — дух для духа τ_1, т.е. $\mathrm{gh}(\tau_2) = 2$ и т.д. Классические поля, естественно, имеют нулевое духовое число: $\mathrm{gh}(A) = \mathrm{gh}(B) = 0$. Пространство БВ-полей есть кокасательное расслоение $T^*[-1](\mathcal{F}_{\mathrm{BRST}})$. Введём теперь "супер-поля"$\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ как

$$\tilde{A} = c + A + B^+ + \tau_1^+ + \cdots + \tau_{D-2}^+ \tag{59}$$

$$\tilde{B} = \tau_{D-2} + \cdots + \tau_1 + B + A^+ + c^+ \tag{60}$$

которые следует понимать, как неоднородные дифференциальные формы $\tilde{A}, \tilde{B} \subset \Omega^0(M, \mathfrak{g}) \oplus \cdots \oplus \Omega^D(M, \mathfrak{g})$, где различным компонентам приписаны различные духовые числа, так что для $\tilde{A}$ тотальная степень $\mathrm{gh} + \deg = 1$ (где deg означает де рамовскую степень формы), а для $\tilde{B}$ тотальная степень $\mathrm{gh} + \deg = D - 2$. Здесь мы используем отождествление $(\Omega^k(M, \mathfrak{g}))^* \simeq \Omega^{D-k}(M, \mathfrak{g})$ с помощью спаривания $\mathrm{tr} \int \bullet \wedge \bullet$ на $\Omega^\bullet(M, \mathfrak{g})$. Заметим, что $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ канонически сопряжены друг другу. В терминах супер-полей БВ-действие записывается элегантным образом:

$$S(\tilde{A}, \tilde{B}) = \mathrm{tr} \int_M \tilde{B} \wedge (d\tilde{A} + \tilde{A} \wedge \tilde{A}) \tag{61}$$

Интеграл нужно понимать в том смысле, что он нетривиален только на части подынтегрального выражения де рамовской степени D. Выражение для БВ-действия в терминах классических полей, духов и антиполей к ним, выводится из (61) подстановкой разложений для супер-полей (59,60). В частности, в размерностях $D = 2, 3, 4$ БВ-действие для BF-теории имеет вид

$$D = 2 \quad : \quad S = \mathrm{tr} \int_M BF_A + A^+ d_A c - B^+[B, c] + \frac{1}{2} c^+[c, c] \tag{62}$$

$$D = 3 \quad : \quad S = \mathrm{tr} \int_M BF_A + A^+ d_A c + B^+([B, c] + d_A \tau_1) + \frac{1}{2} c^+[c, c] + \tau_1^+[\tau_1, c] \tag{63}$$

$$\begin{aligned} D = 4 \quad : \quad S = \mathrm{tr} \int_M & BF_A + A^+ d_A c + B^+(-[B, c] + d_A \tau_1) + \\ & + \frac{1}{2} c^+[c, c] + \tau_1^+(-[\tau_1, c] + d_A \tau_2) - \tau_2^+[\tau_2, c] + \frac{1}{2}[B^+, B^+]\tau_2 \end{aligned} \tag{64}$$

Отсюда мы видим, что в размерности $D = 2, 3$ БВ-действие линейно по анти-полям, и, следовательно, может быть получено через БРСТ-формализм и конструкцию (51). В то же время, начиная с размерности $D = 4$, БВ-действие содержит квадратичные по антиполям слагаемые, что связано тем, что начиная с этой размерности возникает “открытая” башня приводимости калибровочной симметрии, т.е. зависящая от того, является ли классическое поле (A, B) решением уравнений движения (57).

В дальнейшем нам потребуется более общий и фундаментальный вариант BF-теории — так называемая "каноническая" BF-теория. Исходные данные для неё те же — компактное многообразие M (теперь мы не требуем ориентируемости), компактная калибровочная группа G, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, главное G-расслоение P, которое мы для простоты полагаем тривиальным. Классические поля здесь — связность $A \in \mathrm{Conn}(M,P) = \Omega^1(M,\mathfrak{g})$ и де рамовский 2-поток $\beta \in (\Omega^2(M,\mathfrak{g}))^*$, классическое действие:

$$S_{cl}(A,\beta) =< \beta, F_A > \tag{65}$$

Заметим, что такое действие, в отличие от (56) не использует операцию интегрирования по M и скалярное произведение для $\mathfrak{g}$, а построено лишь по каноническому спариванию между потоками и формами $< \bullet, \bullet >$: $(\Omega^\bullet(M,\mathfrak{g}))^* \otimes \Omega^\bullet(M,\mathfrak{g}) \to \mathbb{R}$. Поэтому, в частности, такое действие имеет смысл для неориентируемого M. В случае ориентруемого M поле β связано с B операцией опускания индекса $\flat : \Omega^\bullet(M,\mathfrak{g}) \to (\Omega^\bullet(M,\mathfrak{g}))^*$, построенной по спариванию Пуанкаре на формах $(\bullet,\bullet)_P = \mathrm{tr} \int_M \bullet \wedge \bullet : \Omega^\bullet(M,\mathfrak{g})^{\otimes 2} \to \mathbb{R}$, т.е. $\beta = B_\flat$. Уравнения движения здесь: $F_A = 0$, $d_A^*\beta = 0$, где $d_A^*\beta := - < \beta, d_A \bullet >$. Точно так же, как и раньше, здесь вводится башня приводимости калибровочной симметрии на массовой поверхности: $\mathcal{A}_{D-2} \circlearrowright \cdots \circlearrowright \mathcal{A}_2 \circlearrowright \mathcal{A}_1 \circlearrowright \mathcal{F}_{cl}$, где теперь $\mathcal{A}_1 = \Omega^0(M,\mathfrak{g}) \ltimes (\Omega^3(M,\mathfrak{g}))^*$ действующее на классические поля как $A \mapsto A + d_A c$, $\beta \mapsto \beta - \mathrm{ad}_c^*\beta + d_A^*\chi_1$; далее $\mathcal{A}_k = (\Omega^{k+2}(M,\mathfrak{g}))^*$ для $2 \le k \le D-2$ и действие $\mathcal{A}_k \circlearrowright \mathcal{A}_{k-1}$ задано сдвигами $\chi_{k-1} \mapsto \chi_{k-1} + d_A^*\chi_k$. Соответсвующие этим симметриям духи организуются вместе с классическими полями в супер-поля

$$\omega := \tilde{A} = c + A + \beta^+ + \chi_1^+ + \cdots + \chi_{D-2}^+ \tag{66}$$

$$p := \tilde{B} = c^+ + A^+ + \beta + \chi_1 + \cdots + \chi_{D-2} \tag{67}$$

Где мы ввели новые обозначения (ω, p) для супер-полей канонической BF-теории, ими мы и будем в дальнейшем пользоваться. Супер-поле ω мы понимаем, как и раньше, как неоднородную дифференциальную форму $\omega \in \Omega^\bullet(M,\mathfrak{g})$ с тотальной степенью $\mathrm{gh} + \deg = 1$, второе супер-поле p понимается как неоднородный поток $p \in (\Omega^\bullet(M,\mathfrak{g}))^*$ с тотальной степенью $\mathrm{gh} + \deg = -2$ (мы используем соглашение, что де рамовская степень k-потока из $(\Omega^k(M,\mathfrak{g}))^*$ равна $-k$). Заметим, что здесь для определения супер-полей нам не пришлось пользоваться спариванием Пуанкаре на формах $(\bullet,\bullet)_P$. БВ-действие канонической BF-теории есть

$$S(\omega, p) =< p, F_\omega >=< p, d\omega + \frac{1}{2}[\omega,\omega] > \tag{68}$$

Действие (68) и пространство БВ-полей канонической BF-теории

$$\mathcal{F}_{\mathrm{BV}} = T^*[-1]\mathrm{Maps}(T[1]M \to \mathfrak{g}[1]) \tag{69}$$

являются одним из примеров конструкций PQ-многообразий в [3], вследствие чего каноническую BF-теорию в БВ-формализме иногда называют AKSZ-теорией. Эта конструкция, супер-полевой формализм и вид БВ-действия подсказывают, что кроме "физически" выделенного конструкцией Баталина-Вилковыского, стартующей со связности A и 2-потока β, лагранжева подмногообразия подмногообразия $\mathcal{F}_{\mathrm{BRST}} \subset \mathcal{F}_{\mathrm{BV}}$, есть другое важное лагранжево подмногообразие $\mathrm{SConn}(M, \mathfrak{g}) = \mathrm{Maps}(T[1]M \to \mathfrak{g}[1]) \subset \mathcal{F}_{\mathrm{BV}}$, в котором живёт супер-связность ω. В дальнейшем, для нас будет важно именно представление пространства БВ-полей для канонической BF-теории в виде (69), т.е. связанное как раз с лагранжевым подмногообразием $\mathrm{SConn}(M, \mathfrak{g})$.

Топологическая BF-теория является одной из простейших топологических теорий поля. Она задана на многообразии любой размерности и допускает неориентируемые многообразия и многообразия с границей. В младших размерностях BF-теория связана с другими замечательными топологическими теориями поля. Например, при $\dim M = 2$ BF-теория совпадает с частным случаем пуассоновой сигма-модели, именно для таргета $\mathfrak{g}^*$ (с линейной пуассоновой структурой Кириллова-Костанта); при $\dim M = 3$ BF-теория совпадает с частным случаем теории Черна-Саймонса, именно для калибровочной алгебры Ли вида $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ (и скалярное произведение спаривает $\mathfrak{g}$ с $\mathfrak{g}^*$). Далее, 3-мерная BF-теория с космологическим слагаемым, т.е. $S_{cl} = \mathrm{tr} \int_M B \wedge F_A + B \wedge B \wedge B$, тесно связана с теорией Черна-Саймонса (на этот раз с общей калибровочной группой G) [9]. В частности, для статсуммы выполнено $Z_{BF+B^3} = |Z_{CS}|^2$. В 3-мерной BF-теории также построены наблюдаемые [9], связанные с узлами, вакуумное ожидание которых даёт полином Александера-Конвея для узла (эта ситуация аналогична теории Черна-Саймонса, где вакуумное ожидание вильсоновских петель даёт инварианты узлов).

4. Абстрактная BF-теория и индуцирование эффективного действия для неё

В разделе 4.1 мы вводим "абстрактную BF-теорию": произвольной унимодулярной дифференциальной градуированной алгебре Ли (DGLA) $(V, d, [\bullet, \bullet])$ мы сопоставляем пространство БВ-полей $\mathcal{F}$ (векторное пространство с каноническим БВ-лапласианом) и БВ-действие S на этом пространстве, строящееся по структурным константам дифференциала и коммутатора в V и решающее квантовое мастер-уравнение. Причём оказывается, что классическая часть мастер-уравнения в точности эквивалентна тройке квадратичных соотношений на дифференциал и коммутатор в DGLA — тождества Пуанкаре, Лейбница и Якоби, а собственно квантовая часть мастер-уравнения эквивалентна условию унимодулярности. Топологической BF-теории на многообразии M соответствует специальный случай абстрактной BF-теории: $V = \Omega^\bullet(M, \mathfrak{g})$ (алгебра де Рама на M со значениями в калибровочной алгебре Ли $\mathfrak{g}$).

В разделе 4.2 обсуждается общая конструкция эффективного (или индуцированного) действия на инфракрасных полях в БВ-формализме: эффективное действие строится с помощью БВ-интеграла по лагранжеву подмногообразию $\mathcal{L}$ в пространстве ультрафиолетовых полей. Обсуждается важнейшее свойство этой конструкции: она переводит решения квантового мастер-уравнения в решения квантового мастер-уравнения (уже на инфракрасных полях). Также обсуждается вопрос о зависимости эффективного действия от выбора $\mathcal{L}$ (выбора фиксации калибровки для БВ-интеграла), а также от способа разбивать поля на инфракрасные и ультрафиолетовые: оказывается, что инфинитезимальное изменение этих "данных индуцирования" приводит к инфинитезимальному каноническому преобразованию эффективного действия (причём можно написать явную формулу для генератора преобразования). Также мы доказываем, что каноническое преобразование действия приводит к каноническому преобразованию эффективного действия, что позволяет говорить об операции индуцирования для класса эквивалентности действия по модулю канонических преобразований. Для ситуации, отличной от рассматриваемой в данной работе, конструкция эффективного БВ-действия использовалась в работах [22],[4].

В разделе 4.3 мы специализируем конструкцию эффективного БВ-действия на случай индуцирования эффективного действия S' для абстрактной BF-теории. Мы ассоциируем пространство инфракрасных полей с подкомплексом (точнее, с деформационным ретрактом) $V' \hookrightarrow V$. Разложение полей на инфракрасные и ультрафиолевые поля задаётся вложением $\iota : V' \to V$ и ретракцией $r : V \to V'$, которые предполагаются цепными отображениеми (т.е. согласованными с дифференциалами комплексов). Лагранжево подмногообразие $\mathcal{L}$, определяющее БВ-интеграл, строится по разложению Ходжа для V, задаваемому оператором цепной гомотопии $K : V \to V$, стягивающей V на V'. Важно, что такое $\mathcal{L}$ является линейным подпространством и не возникает вопрос о мере в БВ-интеграле по $\mathcal{L}$ (используется трансляционно-инвариантная мера). Поэтому мы можем забыть о разнице между функциями и полу-плотностями. Расплатой за это является то, что мы вычисляем эффективное действие (как функцию инфракрасных полей) по модулю констант, причём нормируем его как $S'(0) = 0$. Мы выводим фейнмановские правила для БВ-интеграла, определяющие ряд теории возмущений для эффективного действия S'. Причём оказывается, что вклад дают два вида диаграмм — бинарные корневые деревья (рёбра ориентированы по направлению к корню) и однопетлевые графы, в которых разрешены вершины валентности 1 (с одним исходящим ребром) и валентности 3 (два входящих, одно исходящее ребро). Внутренние рёбра раскрашиваются "пропагатором" $-K$, 1-валентные вершины раскрашиваются инфракрасными полями, 3-валентные вершины раскрашиваются операцией коммутирования в V. Важной особенностью здесь являются правила ориентации рёбер: из каждой вершины исходит не более одного ребра. Отсюда, в частности, вытекает отсутствие многопетлевых фейнмановских диаграмм.

В разделе 4.4 мы интерпретируем эффективное действие для абстрактной BF-теории, ассоциированное с подкомплексом $V' \hookrightarrow V$, как производящую функцию для некоторой алгебраической структуры на V' (также как исходное действие абстрактной BF-теории является производящей функцией для структуры унимодулярной DGLA на V), именно для однопетлевой версии L_∞-структуры. Для этой структуры мы используем название "qL_∞-алгебра". Последнюю можно определять либо в терминах супер-геометрии: как пару из когомологического векторного поля Q на $V'[1]$ и согласованной с ним меры μ на $V'[1]$, либо в терминах операций, как набор "классических" операций $l_{(n)} : \Lambda^n V' \to V'$ (тэйлоровских компонент когомологического векторного поля) и "квантовых" операций $q_{(n)} : \Lambda^n V' \to \mathbb{R}$ (соответственно, тэйлоровских компонент плотности меры). Условия когомологичности векторного поля и согласованности с мерой переговариваются как две системы уравнений на операции: систему гомотопических тождеств Якоби (обычных для L_∞-алгебры) и систему гомотопических соотношений унимодулярности. В терминах БВ-формализма этот набор соотношений формулируется как квантовое мастер-уравнение на эффективное действие S' (которое выполняется автоматически по конструкции эффективного действия с помощью БВ-интеграла). qL_∞-алгебры в другом контексте и под другим названием (алгебры над "wheeled L_∞"-операдой) появлялись ранее в работе [23].

В разделе 4.5 мы вводим понятие "BF_∞-теории", обобщающее понятие абстрактной BF-теории. Теория типа BF_∞ ассоциируется с qL_∞-алгеброй: решение квантового мастер-уравнения на пространстве полей (строящемся так же, как для абстрактной BF-теории) строится с помощью структурных констант классических и квантовых операций. В частности, абстрактная BF-теория является BF_∞-теорией для частного случая, когда все операции кроме $l_{(1)}$ и $l_{(2)}$ равны нулю (случай унимодулярной DGLA). Также эффективная теория для абстрактной BF-теории является BF_∞-теорией. Далее, оказывается, что класс BF_∞ теорий замкнут относительно операции индуцирования эффективного действия на подкомплексе. Индуцирование мало отличается от случая индуцирования для абстрактной BF-теории, мы лишь должны разрешить в фейнмановских диаграммах вершины произвольной валентности (причём каждой вершине разрешено иметь не более одного исходящего ребра, остальные — входящие). Эти вершины раскрашиваются классическими операциями $l_{(n)}$. Также возникает новый класс вершин, для которых все рёбра — входящие, раскрашенных квантовыми операциями $q_{(n)}$. Здесь снова возникают только древесные и однопетлевые фейнмановские диаграммы, и не возникает многопетлевых. BF_∞-теории и qL_∞-алгебры оказываются двумя эквивалентными языками описания одного и того же объекта. На языке qL_∞-алгебр индуцирование является однопетлевым аналогом гомотопического переноса L_∞-структуры на подкомплекс. Далее (раздел 4.5.1) мы обсуждаем понятие эквивалентности (гомотопии) для qL_∞-алгебр, происходящее из эквивалентности BF_∞-теорий по модулю канонических преобразований (мы вводим класс "специальных" канонических преобразований, которые переводят BF_∞-действие в BF_∞-действие). Мы также объявляем индуцированную qL_∞-алгебру эквивалентной исходной. Таким образом, гомотопический тип qL_∞-алгебры понимается как индуцированная qL_∞-структура на когомологиях по модулю канонических преобразований. Наконец, в разделе 4.5.2 мы предъявляем конструкцию L_∞-квази-изоморфизма между классическими частями индуцированной и исходной qL_∞-структур через БВ-интеграл, а также интерпретируем эффективное BF_∞-действие через L_∞-морфизм и кручение (эту интерпретацию можно понимать как способ организации фейнмановских диаграмм для эффективного действия).

4.1. **Абстрактная BF-теория.** Пусть V — $\mathbb{Z}$-градуированное векторное пространство. Построим по V пространство полей как нечётное кокасательное расслоение для V, сдвинутого по градуировке:

$$\mathcal{F} = T^*[-1](V[1]) = V[1] \oplus V^*[-2] \tag{70}$$

Кольцо функций на $\mathcal{F}$ понимается как градуированная симметрическая алгебра над $\mathcal{F}^*$ (с коэффициентами в формальных степенных рядах от постоянной Планка $\hbar$):

$$\mathrm{Fun}(\mathcal{F}) = S^\bullet_{\mathrm{grad}}(V^*[-1] \oplus V[2])$$

Здесь $S^\bullet_{\mathrm{grad}}$ — градуированная симметрическая алгебра, определяемая для градуированного векторного пространства $W = \bigoplus_k W^k$ как

$$S^\bullet_{\mathrm{grad}} W = S^\bullet W_{\mathrm{even}} \otimes \Lambda^\bullet W_{\mathrm{odd}}$$

где $W_{\mathrm{even}} = \bigoplus_k W_{2k}$ и $W_{\mathrm{odd}} = \bigoplus_k W_{2k+1}$ — чётная и нечётная части W соответственно (в дальнейшем мы будем обозначать градуированную симметрическую и внешнюю алгебры просто как $S^\bullet$, $\Lambda^\bullet$). Будем называть градуировку в V и V^* степенью (deg), а градуировку в $\mathrm{Fun}(\mathcal{F})$ — духовым числом (gh).

Пусть (e_i) — базис в V и (e^i) — двойственный базис в V^*. Обозначим также $(\omega^i) \subset V^*[-1]$ и $(p_i) \subset V[2]$ — наборы координатных функций на $V[1]$ и $V^*[-2]$, связанные с этим базисом. Таким образом,

$$\deg(e_i) + \mathrm{gh}(\omega^i) = 1 \tag{71}$$

$$\deg(e^i) + \mathrm{gh}(p_i) = -2 \tag{72}$$

$$\deg(e^i) = -\deg(e_i) \tag{73}$$

и кольцо функций $\mathrm{Fun}(\mathcal{F})$ мы понимаем как кольцо полиномов от переменных (ω^i, p_i) с коэффициентами в $\mathbb{R}[[\hbar, \hbar^{-1}]]$:

$$\mathrm{Fun}(\mathcal{F}) = \mathbb{R}[[\hbar, \hbar^{-1}]][\omega^i, p_i]$$

Введём супер-поля ω и p как

$$\omega \;\; = \;\; e_i\omega^i \in V \otimes V^*[-1] \subset V \otimes \mathrm{Fun}(\mathcal{F}) \tag{74}$$

$$p \;\; = \;\; p_i\, e^i \in V[2] \otimes V^* \subset \mathrm{Fun}(\mathcal{F}) \otimes V^* \tag{75}$$

Таким образом, ω и p — функции на пространстве полей со значениями в V и V^*, соответственно. Причём, ω — производящая функция для координатных функций на базе $\mathcal{F} = T^*[-1](V[1])$, а p — производящая функция для координат на слое. Можно также дать инвариантное (явно не зависящее от выбора базиса) определение супер-полей как сдвинутых тождественных отображений

$$\omega : \quad V[1] \to V$$

$$p : \quad V^*[-2] \to V^*$$

Более традиционный для физики способ понимать супер-поля ω и p — как элементы тотальной степени 1 и -2, соответственно, в биградуированных парой (степень, духовое число) векторных пространствах $V \otimes (\oplus_k \mathbb{R}[k])$ и $V^* \otimes (\sum_k \mathbb{R}[k])$ соответственно (сдвиги $\mathbb{R}$ — по духовому числу), то есть:

$$\omega \;\; \in \;\; \tilde{V} = [V \otimes (\oplus_k \mathbb{R}[k])]^{\deg + \mathrm{gh} = 1}$$

$$p \;\; \in \;\; \tilde{V}^* = [V^* \otimes (\oplus_k \mathbb{R}[k])]^{\deg + \mathrm{gh} = -2}$$

Иначе говоря, в таком понимании ω и p есть элементы векторных пространств V, V^*, где компонентам разной степени приписаны разные духовые числа, так чтобы тотальная степень была 1 и -2, соответственно.

Пространство полей (70), будучи нечётным касательным расслоением, имеет каноническую нечётную симплектическую форму

$$\Omega_{\rm BV} =< \delta p, \delta\omega >= \sum_i (-1)^{|i|} \delta p_i \wedge \delta\omega^i$$

где введено обозначение для степеней базисных элементов $|i| = \deg e^i$, δ означает дифференциал де Рама на $\mathcal{F}$ и каноническое спаривание $< \bullet, \bullet >$: $V^* \otimes V \to \mathbb{R}$ спаривает e^i и e_i по правилу $< e^i, e_j >= \delta^i_j$ (символ Кронекера). Для спаривания в обратном порядке появляется знак: $< e_i, e^j >= (-1)^{|i|}\delta^j_i$. В свою очередь $\Omega_{\rm BV}$ задаёт каноническую анти-скобку $\{\bullet, \bullet\}$ на $\mathcal{F}$ как

$$\{f, g\} = f \left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\omega^i} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p_i} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p_i} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\omega^i} \right) g$$

где $f, g \in {\rm Fun}(\mathcal{F})$ Удобно также иметь выражение для анти-скобки в терминах супер-полей ω, p. Для этого мы вводим производные по супер-полям как

$$\begin{array}{ll} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\omega} = \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\omega^i} e^i & , \quad \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p} = e_i \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p_i}, \\ \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\omega} = (-1)^{|i|} e^i \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\omega^i} & , \quad \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p} = \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p_i} e_i \end{array}$$

Тем самым, в терминах ω, p анти-скобка имеет вид

$$\{f, g\} = f \left\langle \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\omega}, \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p} \right\rangle g - (-1)^{({\rm gh} f + 1)({\rm gh} g + 1)} g \left\langle \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\omega}, \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p} \right\rangle f = f \left(\left\langle \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\omega}, \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p} \right\rangle - \left\langle \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}, \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\omega} \right\rangle \right) g$$

Поскольку теперь (в отличии от общей ситуации раздела 2.4) $\mathcal{F}$ также является векторным пространством, на нём есть выделенный класс мер — постоянные меры $\mu \in {\rm Ber}(\mathcal{F})$ (здесь речь о березиниане векторного пространства, т.е. в терминах общего определения из раздела 2.2, следует считать $\mathcal{F}$ векторным расслоением над точкой). Тем самым, на $\mathcal{F}$ есть канонический БВ-оператор

$$\Delta = \sum_i (-1)^{|i|+1} \frac{\partial}{\partial\omega^i} \frac{\partial}{\partial p_i} = - \left\langle \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\omega}, \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p} \right\rangle$$

Пусть теперь на V есть структура дифференциальной градуированной алгебры Ли (DGLA), то есть задана пара линейных отображений $d : V \to V$ и $[\bullet, \bullet] : V \otimes V \to V$ и выполнен следующий набор свойств:

- дифференциал имеет степень 1:

$$|dx| = |x| + 1 \tag{76}$$

- скобка имеет степень 0:

$$|[x, y]| = |x| + |y| \tag{77}$$

- скобка градуированно-кососимметрична:

$$[x, y] = -(-1)^{|x|\,|y|}[x, y] \tag{78}$$

- тождество Пуанкаре:

$$d^2x = 0 \tag{79}$$

- тождество Лейбница:

$$d[x, y] = [dx, y] + (-1)^{|x|}[x, dy] \tag{80}$$

- тождество Якоби:

$$(-1)^{|x|\,|z|}[x, [y, z]] + \text{cycl.perm.} = 0 \tag{81}$$

где $x, y, z \in V$ и введено обозначение $|x| = \deg(x)$. Дополнительно потребуем свойство унимодулярности для V, т.е. чтобы матрицы присоединённого представления были бесследовы (в смысле супер-следа):

$$\mathrm{Str}_V[x, \bullet] = 0 \tag{82}$$

для любого $x \in V$, где Str_V — супер-след по V.

Определим действие абстрактной BF-теории, связанной с дифференциальной градуированной алгеброй $(V, d, [,])$ как

$$\begin{aligned} S &= \; < p, d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] > \\ &= \sum_{i,j} d^i_j p_i \omega^j + \frac{1}{2}\sum_{i,j,k}(-1)^{(|j|+1)|k|} f^i_{jk} p_i \omega^j \omega^k \end{aligned} \tag{83}$$

где $d^i_j =< e^i, de_j >$ и $f^i_{jk} =< e^i, [e_j, e_k] >$ — структурные константы дифференциала и скобки, соответственно. Таким образом, $S \in \mathrm{Fun}(\mathcal{F})$ предъявлен как некоторый кубический полином от координат (ω^i, p_i) на $\mathcal{F}$, причём его коэффициентами являются структурные константы дифференциала и скобки. Поэтому S можно назавать производящей функцией для операций DGLA на V. Далее, из (76,77) и (71,72) немедленно вытекает, что все мономы в (83), коэффициенты при которых отличны от нуля, имеют духовое число 0, и поэтому $\mathrm{gh}(S) = 0$.

Утверждение 1. *Действие абстрактной BF-теории $S =< p, d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] >$ удовлетворяет квантовому мастер-уравнению, т.е. $\frac{1}{2}\{S, S\} + \hbar\Delta S = 0$.*

Доказательство. Так как $S = S^0$ не зависит от $\hbar$, квантовое мастер-уравнение эквивалентно системе

$$\{S, S\} = 0 \tag{84}$$

$$\Delta S = 0 \tag{85}$$

где (84) — классическое мастер-уравнение и (85) — собственно квантовая часть мастер-уравнения. Вычислим $\{S,S\}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\{S,S\} &= \sum_i S\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\omega^i}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p_i}S \\
&= \sum_i\left(\sum_j d_i^j p_j + \sum_{j,k}(-1)^{(|k|+1)|i|} f_{ki}^j p_j\omega^k\right)\cdot \\
&\quad\cdot\left(\sum_l d_l^i\omega^l + \frac{1}{2}\sum_{l,m}(-1)^{(|l|+1)|m|} f_{lm}^i\omega^l\omega^m\right) \\
&= \sum_{i,j,l} d_i^j d_l^i p_j\omega^l + \frac{1}{2}\sum_{i,j,l,m}(-1)^{(|l|+1)|m|} d_i^j f_{lm}^i p_j\omega^l\omega^m + \sum_{i,j,k,l}(-1)^{(|k|+1)|i|} f_{ki}^j d_l^i p_j\omega^k\omega^l + \\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l,m}(-1)^{(|k|+1)|i|+(|l|+1)|m|} f_{ki}^j f_{lm}^i p_j\omega^k\omega^l\omega^m \\
&= \sum_{i,j} < e^i, d^2 e_j > p_i\omega^j + \\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{i,j,k}((-1)^{(|j|+1)|k|} < e^i, d[e_j,e_k] > +2(-1)^{(|j|+1)(|k|+1)} < e^i,[e_j,de_k] >)p_i\omega^j\omega^k + \\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l}(-1)^{(|j|+1)(|k|+|l|)+(|k|+1)|l|} < e^i,[e_j,[e_k,e_l]] > p_i\omega^j\omega^k\omega^l \\
&= \sum_{i,j} < e^i, d^2 e_j > p_i\omega^j + \\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{i,j,k}(-1)^{(|j|+1)|k|} < e^i, d[e_j,e_k] - [de_j,e_k] - (-1)^{|j|}[e_j,de_k] > p_i\omega^j\omega^k + \\
&\quad+\frac{1}{6}\sum_{i,j,k,l}(-1)^{(|j|+1)(|k|+|l|)+(|k|+1)|l|}\cdot \\
&\quad\cdot < e^i,[e_j,[e_k,e_l]] + (-1)^{|j|(|k|+|l|)}[e_k,[e_l,e_j]] + (-1)^{(|j|+|k|)|l|}[e_l,[e_j,e_k]] > p_i\omega^j\omega^k\omega^l
\end{aligned}
$$

Как мы отсюда видим, коэффициенты при всех мономах равны нулю вследствие тождества $d^2=0$ для мономов $p_i\omega^j$, тождества Лейбница для мономов $p_i\omega^j\omega^k$ и тождества Якоби для мономов $p_i\omega^j\omega^k\omega^l$, и поэтому выполняется (84). Более того, видно, что классическое мастер-уравнение (84) является производящим уравнением для квадратичных соотношений на операции DGLA — тождеств Пуанкаре, Лейбница и Якоби (79,80,81). Проверим теперь (85):

$$
\begin{aligned}
\Delta S &= \sum_i(-1)^{|i|+1}\frac{\partial}{\partial\omega^i}\frac{\partial}{\partial p_i}S \\
&= \sum_i(-1)^{|i|+1}d_i^i + \sum_{i,k}(-1)^{(|i|+1)(|k|+1)} f_{ik}^i\omega^k \\
&= 0 + \sum_{i,k}(-1)^{|i|+|k|} < e^i,[e_k,e_i] > \omega^k
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{k:\,|k|=0} (\mathrm{Str}_V[e_k, \bullet])\,\omega^k$$

Таким образом (85) эквивалентно условию унимодулярности для V (82). Заметим, в терминах супер-полей те же вычисления выглядят намного элегантнее. Для классического мастер-уравнения:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\{S,S\} &= S\left\langle \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\omega}, \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p}\right\rangle S \\
&= \left\langle < p, d\bullet + [\omega,\bullet] >, d\omega + \frac{1}{2}[\omega,\omega]\right\rangle \\
&= < p, d(d\omega + \frac{1}{2}[\omega,\omega]) + [\omega, d\omega + \frac{1}{2}[\omega,\omega]] > \\
&= < p, d^2\omega > + < p, \frac{1}{2}d[\omega,\omega] + [\omega, d\omega] > + < p, \frac{1}{2}[\omega,[\omega,\omega]] >
\end{aligned}$$

где первое слагаемое производит тождество Пуанкаре, второе — тождество Лейбница и третье — тождество Якоби. Наконец, вычисление (84) в супер-полевом формализме имеет вид

$$\begin{aligned}
\Delta S &= -\left\langle \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\omega}, \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p}\right\rangle S \\
&= -\left\langle \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\omega}, d\omega + \frac{1}{2}[\omega,\omega]\right\rangle \\
&= \mathrm{Str}_V d + \mathrm{Str}_V[\omega,\bullet] = \mathrm{Str}_V[\omega,\bullet]
\end{aligned}$$

и снова мы видим $\Delta S = 0$ эквивалентно унимодулярности V. Как видно из этого примера, практическая ценность супер-полевого формализма здесь в том, что в нём вычисления лаконичнее и проще следить за знаками.

□

Обычной топологической BF-теории (точнее, её каноническому варианту), описанной в разделе 3.4, соответствует частный случай абстрактной BF-теории, где в качестве дифференциальной градуированной алгебры Ли V мы выбираем алгебру де Рама дифференциальных форм на многообразии M с коэффициентами в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, т.е. $V = \Omega^\bullet(M,\mathfrak{g})$. Супер-поля ω и p алгебраической BF-теории при этом в точности переходят в супер-поля (66,67) из раздела 3.4, собранные из классических полей, духов и анти-полей к ним. Действие (83) переходит в (68). Для выполнения квантового мастер-уравнения, мы требуем унимодулярности калибровочной алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

4.2. **Эффективное БВ-действие: общая идея.** Пусть W и W' — пара $\mathbb{Z}$-градуированных векторных пространств и заданы вложение $\iota : W' \to W$ и ретракция $r : W \to W'$ — пара линейных отображений (степени 0, т.е. сохраняющих градуировку), удовлетворяющих

$r \circ \iota = \mathrm{id}_{W'}$. Тем самым, задано разложение W в сумму векторных подпространств

$$W = \iota(W') \oplus W'' \tag{86}$$

где $W'' = \ker(r) \subset W$. Пусть далее $\mathcal{F} = T^*[-1]W = W \oplus W^*[-1]$ и $\mathcal{F}' = T^*[-1]W' = W' \oplus W'^*[-1]$ — соответствующие нечётные кокасательные расслоения, понимаемые как БВ-многообразия с каноническими БВ-лапласианами Δ и Δ'. Пространство $\mathcal{F}$ раскладывается аналогичным (86) образом:

$$\mathcal{F} = \hat{\iota}(\mathcal{F}') \oplus \mathcal{F}'' \tag{87}$$

где $\hat{\iota} = \iota \oplus r^* : \mathcal{F}' \to \mathcal{F}$ есть вложение $\mathcal{F}'$ в $\mathcal{F}$ и $\hat{r} = r \oplus \iota^* : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ — соответствующая ретракция, и $\mathcal{F}''$ снова определяется как ядро ретракции: $\mathcal{F}'' = \ker(\hat{r}) = T^*[-1]W'' \subset \mathcal{F}$. Будем называть $\mathcal{F}$ пространством полей, $\mathcal{F}'$ — пространством инфракрасных полей, $\mathcal{F}''$ — пространством ультрафиолетовых полей. Введём также отображения обратных образов, соответствующих вложению и ретракции: $\hat{\iota}^* : \mathrm{Fun}(\mathcal{F}) \to \mathrm{Fun}(\mathcal{F}')$ и $\hat{r}^* : \mathrm{Fun}(\mathcal{F}') \to \mathrm{Fun}(\mathcal{F})$. Пространство функций на $\mathcal{F}$ раскладывается в произведение $\mathrm{Fun}(\mathcal{F}) = \hat{r}^*\mathrm{Fun}(\mathcal{F}') \otimes \mathrm{Fun}(\mathcal{F}'') \cong \mathrm{Fun}(\mathcal{F}') \otimes \mathrm{Fun}(\mathcal{F}'')$,и мы будем пользоваться последним изоморфизмом, чтобы не загромождать излишне обозначения, однако нужно помнить, что он зависит от ι и r. Для БВ-лапласиана на $\mathcal{F}$ имеем

$$\Delta = \Delta' + \Delta'' \tag{88}$$

где Δ'' — канонический БВ-оператор на $\mathcal{F}''$. Пусть также задано БВ-действие на $\mathcal{F}$, т.е. функция $S \in \mathrm{Fun}(\mathcal{F})$, удовлетворяющая квантовому мастер-уравнению $\Delta e^{S/\hbar} = 0$.

Определим индуцированное (эффективное) действие на инфракрасных полях $S' \in \mathrm{Fun}(\mathcal{F}')$ с помощью интеграла по лагранжеву подмногообразию $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}''$:

$$e^{S'(z')/\hbar} = \int_{\mathcal{L}} e^{S(\hat{\iota}(z')+z'')/\hbar} \tag{89}$$

где $z' \in \mathcal{F}'$, $z'' \in \mathcal{F}''$.

Утверждение 2. *Определённое с помощью (89) эффективное действие S' удовлетворяет квантовому мастер-уравнению на $\mathcal{F}'$, т.е.*

$$\Delta' e^{S'/\hbar} = 0$$

Доказательство В самом деле,

$$\begin{aligned} \Delta' e^{S'/\hbar} &= \int_{\mathcal{L}} \Delta' e^{S/\hbar} \\ &= \int_{\mathcal{L}} (\Delta - \Delta'') e^{S/\hbar} \\ &= 0 - \int_{\mathcal{L}} \Delta'' e^{S/\hbar} \end{aligned}$$

$$= \quad 0$$

где вначале мы воспользовались разложением БВ-лапласиана Δ, затем мастер-уравнением на S (на пространстве $\mathcal{F}$) и, наконец, теоремой Шварца (19) для интеграла Δ''-когранницы по лагранжеву подмногообразию $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}''$.

□

Утверждение 3. *При каноническом преобразовании действия S на $\mathcal{F}$:*

$$S \mapsto S + \{S, R\} + \hbar \Delta R$$

где генератор $R \in \mathrm{Fun}^{-1}(\mathcal{F})$, эффективное действие также преобразуется канонически

$$S' \mapsto S' + \{S', R'\} + \hbar \Delta' R'$$

с генератором

$$R' = e^{-S'/\hbar} \cdot \int_{\mathcal{L}} e^{S/\hbar} R \tag{90}$$

Доказательство Воспользуемся формулой (28) для канонического преобразования экспоненты действия на $\mathcal{F}$, чтобы вычислить, как преобразуется интеграл (89):

$$\begin{aligned} e^{S'/\hbar} \quad \mapsto \quad & e^{\tilde{S}'/\hbar} = \int_{\mathcal{L}} e^{S/\hbar} + \Delta(e^{S/\hbar} R) \\ = \quad & e^{S'/\hbar} + \int_{\mathcal{L}} (\Delta' + \Delta'')(e^{S/\hbar} R) \\ = \quad & e^{S'/\hbar} + \Delta' \int_{\mathcal{L}} e^{S/\hbar} R + 0 \\ = \quad & e^{S'/\hbar} + \Delta' \left(e^{S'/\hbar} \left(e^{-S'/\hbar} \cdot \int_{\mathcal{L}} e^{S/\hbar} R \right) \right) \end{aligned}$$

где мы снова воспользовались разложением БВ-лапласиана (88) и теоремой об интеграле БВ-когранницы (19). Последнее выражение в точности имеет вид канонического преобразования эффективного действия S' с генератором (90).

□

Данными индуцирования эффективного действия S' на $\mathcal{F}'$ является тройка объектов $(\iota, r, \mathcal{L})$ — вложение и ретракция, задающие разложение (87) и лагранжево подмногообразие $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}''$ (при этом само $\mathcal{F}'' \subset \mathcal{F}$ определяется по ι и r). Следующее утверждение даёт ответ на вопрос о зависимости S' от данных индуцирования.

Утверждение 4. *При непрерывном преобразовании данных индуцирования $(\iota, r, \mathcal{L})$ эффективное действие S' изменяется на каноническое преобразование.*

Доказательство Для доказательства достаточно рассмотреть инфинитезимальные преобразования данных индуцирования $(\iota, r, \mathcal{L})$. Эти преобразования бывают двух типов:

- Преобразования $(\iota, r, \mathcal{L}) \mapsto (\iota, r, \mathcal{L}_\Psi)$, не трогающие вложение и ретракцию, и только деформирующие лагранжево подмногообразие $\mathcal{L}$ в близкое $\mathcal{L}_\Psi$, задаваемое фиксирующим калибровку фермионом $\Psi \in \mathrm{Fun}^{-1}(\mathcal{L})$. Будем их называть преобразованиями типа I.
- Преобразования типа II $(\iota, r, \mathcal{L}) \mapsto (\iota + \delta\iota, r + \delta r, \tilde{\mathcal{L}})$, инфинитезимально меняющие вложение и ретракцию, и изменяющие $\mathcal{L}$ "минимальным" образом (дальше будет разъяснено, как именно). Изменение $\mathcal{L}$ здесь вынуждено тем, что $\mathcal{L}$ должно быть лагранжевым подмногообразием в $\mathcal{F}''$, а последнее меняется при изменении ι, r.

Рассмотрим сначала преобразования типа I. Пусть (x''^i, ξ''_i) — система координат Дарбу на $\mathcal{F}''$, в которой $\mathcal{L}$ выделено уравнениями $\xi'' = 0$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}
e^{S'/\hbar} &\mapsto \int_{\mathcal{L}_\Psi} e^{S/\hbar} \\
&= \int_{\mathcal{L}} \left(e^{S/\hbar} - \left(\frac{\partial}{\partial x''^i} \Psi(x'') \right) \frac{\partial}{\partial \xi''_i} e^{S/\hbar} \right) \\
&= e^{S'/\hbar} + \int_{\mathcal{L}} \Psi \cdot \Delta'' e^{S/\hbar} \\
&= e^{S'/\hbar} + \int_{\mathcal{L}} \Psi \cdot (\Delta - \Delta') e^{S/\hbar} \\
&= e^{S'/\hbar} - \Delta' \left(\int_{\mathcal{L}} \Psi e^{S/\hbar} \right)
\end{aligned}$$

Таким образом, деформация $\mathcal{L}$ с помощью фиксирующего калибровку фермиона Ψ приводит к каноническому преобразованию S' с генератором

$$R' = -e^{-S'/\hbar} \int_{\mathcal{L}} \Psi e^{S/\hbar}$$

Теперь рассмотрим преобразования типа II. Пусть задана инфинитезимальная деформация вложения и ретракции: $\iota \mapsto \tilde{\iota} = \iota + \delta\iota$ и $r \mapsto \tilde{r} = r + \delta r$, где $\delta\iota : W' \to W$ и $\delta r : W \to W'$. Условие, что деформированные вложение и ретракция по-прежнему обращают друг друга означает, что $(r + \delta r) \circ (\iota + \delta\iota) = \mathrm{id}_{W'}$ и, следовательно, $\delta\iota$ и δr связаны соотношением

$$r \circ \delta\iota + \delta r \circ \iota = 0$$

Дальше идея состоит в том, чтобы заменить деформацию ι и r эквивалентным образом на каноническое преобразование пространства полей $\mathcal{F}$, которое в свою очередь эквивалентно замене исходного действия S на канонически преобразованное, и дальше мы воспользуемся Утверждением 3, чтобы "спустить" его до канонического преобразования эффективного действия.

Итак, введём близкое к тождественному линейное отображение $\mathrm{id}_W + \delta\phi : W \to W$, где

$$\delta\phi = \delta\iota \circ r - \iota \circ \delta r \circ \mathcal{P}'' = \mathcal{P}'' \circ \delta\iota \circ r - \iota \circ \delta r \tag{91}$$

где $\mathcal{P}'' = \mathrm{id}_W - \iota \circ r$ есть проектор на второе подпространство в разложении (86). Тогда выполнены следующие два свойства:

$$\begin{aligned} \iota + \delta\iota &= (\mathrm{id}_W + \delta\phi) \circ \iota \\ r + \delta r &= r \circ (\mathrm{id}_W + \delta\phi)^{-1} = r \circ (\mathrm{id}_W - \delta\phi) \end{aligned}$$

(все вычисления — в первом порядке по деформациям).

На уровне кокасательных расслоений $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ картина следующая. Вложение $\hat{\iota} = \iota \oplus r^* : \mathcal{F}' \to \mathcal{F}$ и ретракция $\hat{r} = r \oplus \iota^* : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ деформируются как $\hat{\iota} \mapsto \tilde{\hat{\iota}} = \hat{\iota} + \delta\hat{\iota}$, $\hat{r} \mapsto \tilde{\hat{r}} = \hat{r} + \delta\hat{r}$, где

$$\begin{aligned} \delta\hat{\iota} &= \delta\iota \oplus \delta r^* \\ \delta\hat{r} &= \delta r \oplus \delta\iota^* \end{aligned}$$

И также имеется близкое к тождественному линейное отображение $\mathrm{id}_{\mathcal{F}} + \delta\hat{\phi} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, где

$$\delta\hat{\phi} = \delta\phi \oplus (-\delta\phi^*)$$

Отображение обратного образа на функциях $(\mathrm{id}_{\mathcal{F}} + \delta\hat{\phi})^* : \mathrm{Fun}(\mathcal{F}) \to \mathrm{Fun}(\mathcal{F})$ есть инфинитезимальное каноническое преобразование $f \mapsto f + \{f, R\}$ с генератором

$$R = <\xi, \delta\phi(x)> \in \mathrm{Fun}^{-1}(\mathcal{F})$$

где $x \in W$, $\xi \in W^*[-1]$ и $< \bullet, \bullet >$ — каноническое спаривание. Заметим, что

$$\Delta'' R = \mathrm{Str}_{W''} \delta\phi = 0 \tag{92}$$

поскольку $\delta\phi$ переводит W'' в $\iota(W')$. Далее, $\delta\hat{\phi}$ обладающет свойствами

$$\begin{aligned} \hat{\iota} + \delta\hat{\iota} &= (\mathrm{id}_{\mathcal{F}} + \delta\hat{\phi}) \circ \hat{\iota} \\ \hat{r} + \delta\hat{r} &= \hat{r} \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{F}} - \delta\hat{\phi}) \end{aligned}$$

Последнее свойство, в частности, означает, что отображение $\mathrm{id}_{\mathcal{F}} + \delta\hat{\phi}$ переводит $\mathcal{F}'' = \ker(\hat{r}) \subset \mathcal{F}$ в $\tilde{\mathcal{F}}'' = \ker(\hat{r} + \delta\hat{r}) \subset \mathcal{F}$. Поэтому мы определяем минимальную деформацию $\mathcal{L}$ как

$$\tilde{\mathcal{L}} = (\mathrm{id}_{\mathcal{F}} + \delta\hat{\phi})\mathcal{L}$$

и, тем самым, интеграл (89) преобразуется как

$$e^{S'/\hbar} \quad \mapsto \quad \int_{\tilde{\mathcal{L}}} e^{S(\tilde{\hat{\iota}}(z') + \tilde{z}'')/\hbar} \tag{93}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathcal{L}} e^{S((\mathrm{id}_{\mathcal{F}}+\delta\hat{\phi})\circ(\hat{\iota}(z')+z''))/\hbar} \\
&= \int_{\mathcal{L}} (e^{S/\hbar} + \Delta(e^{S/\hbar}R)) \\
&= e^{S'/\hbar} + \Delta'(e^{S'/\hbar}R')
\end{aligned} \tag{94}
$$

где $R' = e^{-S'/\hbar} \cdot \int_{\mathcal{L}} e^{S/\hbar} R$ и на последнем шаге мы воспользовались Утверждением 3. Также, в переходе от интеграла по $\tilde{\mathcal{L}}$ (93) к интегралу по $\mathcal{L}$ (94) мы пользуемся (92) (иначе, мог бы возникнуть дополнительный вклад от деформации меры на лагранжевом подмногообразии).

Итак, мы показали, что при инфинитезимальной замене данных индуцирования $(\iota, r, \mathcal{L}) \mapsto (\iota + \delta\iota, r + \delta r, \tilde{\mathcal{L}}_\Psi)$ эффективное действие S' изменяется на каноническое преобразование с генератором

$$
R' = e^{-S'/\hbar} \cdot \int_{\mathcal{L}} e^{S/\hbar}(-\Psi + <\xi, (\delta\iota \circ r - \iota \circ \delta r \circ \mathcal{P}'')(x)>) \tag{95}
$$

Примечание. Имеет смысл разделять преобразования типа II на два подвида: преобразования типа IIa (параллельные), не меняющие разделения $W = \iota(W') \oplus W''$ и, следовательно, приходящие из автоморфизмов W', и преобразования типа IIb (перпендикулярные), смещающие $\iota(W')$ только в направлении W'', и перекашивающие разделение $W = \iota(W') \oplus W''$. Условие на $\delta\iota$ и δr имеют вид

$$
\delta\iota_{||} \circ r + \iota \circ \delta r_{||} = 0
$$

для преобразований типа IIa, и

$$
r \circ \delta\iota_{\perp} = 0
$$

для преобразований типа IIb. Такая классификация эквивалентна представлению автоморфизма $\delta\phi : W \to W$ (91) в виде

$$
\delta\phi = \iota \circ \delta\chi_{||} \circ r + \delta\phi_{\perp} = \iota \circ (r \circ \delta\iota) \circ r + \left(\mathcal{P}'' \circ \delta\iota \circ r - \iota \circ \delta r \circ \mathcal{P}''\right) \tag{96}
$$

где $\delta\chi_{||} = r \circ \delta\iota : W' \to W'$ — автоморфизм W', порождающий параллельную часть деформации, и $\delta\phi_{\perp} = \mathcal{P}'' \circ \delta\iota \circ r - \iota \circ \delta r \circ \mathcal{P}'' : W \to W$ — автоморфизм W, порождающий перпендикулярную часть деформации. Параллельная (IIa) и перпендикулярная (IIb) части деформации очень по-разному меняют эффективное действие: параллельная часть всего лишь означает замену координат для инфракрасных переменных z' в 89), в то время как перпендикулярная часть деформирует само лагранжево подмногообразие, по которому мы интегрируем. Разделение (96) предлагает следующую форму результата (95), в которой явно разделены эффекты всех трёх типов преобразований данных индуцирования — I, IIa и IIb:

$$R' = < \xi', r \circ \delta\iota(x') > + e^{-S'/\hbar} \cdot \int_{\mathcal{L}} e^{S/\hbar} (-\Psi + < \xi, (\mathcal{P}''\delta\iota \circ r - \iota \circ \delta r \circ \mathcal{P}'')(x) >) \tag{97}$$

где $x' \in W'$, $\xi' \in W'^*[-1]$.

□

4.3. **Эффективное действие для абстрактной BF-теории.** Теперь мы хотим применить формализм раздела 4.2 к абстрактной BF-теории, ассоциированной с дифференциальной градуированной алгеброй Ли $(V, d, [\bullet, \bullet])$, с пространством полей (70) и действием (83). В обозначениях раздела 4.2 мы должны положить $W = V[1]$.

Итак, пусть задано $\mathbb{Z}$-градуированное векторное пространство V со структурой DGLA, т.е. заданы дифференциал d и скобка $[\bullet, \bullet]$. И пусть есть коцепной комплекс (V', d) и заданы вложение $\iota : V' \to V$ и ретракция $r : V \to V'$, удовлетворяющие $r\iota = \mathrm{id}_V$ (по-прежнему предполагается, что ι, r — линейные отображения, сохраняющие градуировку). Дополнительно мы теперь требуем, чтобы вложение и ретракция были цепными отображениями, т.е. $d\iota = \iota d$ и $dr = rd$, и чтобы ι было квази-изоморфизмом, т.е., чтобы оно индуцировало изоморфизм на когомологиях $H^\bullet(V') \cong H^\bullet(V)$. Тем самым, задано разложение пространства V

$$V = \iota(V') \oplus V''$$

на инфракрасную и ультрафиолетовую части, где $V'' = \ker(r) \subset V$. Причём теперь это разложение согласовано с дифференциалом d и ультрафиолетовая часть V'' ациклична. Определим проекторы на инфракрасную и ультрафиолетовую части V как

$$\begin{aligned} \mathcal{P}' &= \iota r \ : V \to V \\ \mathcal{P}'' &= \mathrm{id}_V - \mathcal{P}' \ : V \to V \end{aligned}$$

Далее, мы вводим нечётные кокасательные расслоения $\mathcal{F} = T^*[-1](V[1])$, $\mathcal{F}' = T^*[-1](V'[1])$, $\mathcal{F}'' = T^*[-1](V''[1]) \subset \mathcal{F}$ — пространство полей абстрактной BF-теории, пространство инфракрасных полей (на котором мы будем строить эффективное действие) и пространство ультрафиолетовых полей. На уровне пространств полей имеем разложение

$$\mathcal{F} = \hat{\iota}(\mathcal{F}') \oplus \mathcal{F}''$$

где $\hat{\iota} = \iota \oplus r^* : \mathcal{F}' \to \mathcal{F}$ — вложение инфракрасных полей, $\hat{r} = r \oplus \iota^* : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ — ретракция на инфракрасные поля.

Для того, чтобы задать лагранжево подмногообразие $\mathcal{L}$ для интеграла (89), нам потребуется ввести ещё один объект — оператор цепной гомотопии, стягивающий V на $\iota(V')$, т.е. линейное отображение $K : V^\bullet \to V^{\bullet-1}$ степени -1, удовлетворяющее

$$\begin{aligned} K\iota = rK &= 0 && (98)\\ dK + Kd &= \mathcal{P}'' && (99)\\ K^2 &= 0 && (100) \end{aligned}$$

Условие (98) означает, что K нетривиально действует лишь на $V'' \subset V$ и нулём на $\iota(V') \subset V$. Определим подпространства d-точных и K-точных элементов V'' как $V''_{d-ex} = d(V'')$ и $V''_{K-ex} = K(V'')$. Тогда имеем разложение

$$V'' = V''_{d-ex} \oplus V''_{K-ex} \tag{101}$$

причём $d : V''_{K-ex} \to V''_{d-ex}$ есть изоморфизм (векторных пространств) и $K : V''_{d-ex} \to V''_{K-ex}$ — обратный к нему. Проекторы на первое и второе подпространство в разложении (101) есть $\mathcal{P}''_{d-ex} = dK$ и $\mathcal{P}''_{K-ex} = Kd$ соответственно. Для всего пространства V тройка отображений (ι, r, K) определяет разложение Ходжа:

$$V = \iota(V') \oplus V''_{d-ex} \oplus V''_{K-ex} \tag{102}$$

Двойственное разложение для V^* имеет вид

$$V^* = r^*(V') \oplus V''^*_{K^*-ex} \oplus V''^*_{d^*-ex} \tag{103}$$

где $d^*, K^* : V^* \to V^*$ — двойственные операторы к d, K и $V''^*_{K^*-ex} = K^*(V''^*)$, $V''^*_{d^*-ex} = d^*(V''^*)$. Определим лагранжево подмногообразие $\mathcal{L}_K \subset \mathcal{F}''$ как нечётное конормальное расслоение

$$\mathcal{L}_K = N^*[-1](V''_{K-ex}[1]) = V''_{K-ex}[1] \oplus V''^*_{K^*-ex}[-2] \subset \mathcal{F}'' \tag{104}$$

Наконец, используя конструкцию (89) мы определяем эффективное действие $S' \in \mathrm{Fun}(\mathcal{F}')$ для абстрактной BF-теории как

$$\begin{aligned} e^{S'(\omega',p')/\hbar} &= \int_{\mathcal{L}_K} e^{S(\iota(\omega')+\omega'',r^*(p')+p'')/\hbar} && (105)\\ &= \int_{\mathcal{L}_K} \exp\frac{1}{\hbar} < r^*(p')+p'', d\iota(\omega')+d\omega''+\frac{1}{2}[\iota(\omega')+\omega'',\iota(\omega')+\omega''] > \end{aligned}$$

где инфракрасные и ультрафиолетовые супер-поля определены так же, как в разделе 4.1, т.е. как сдвинутые тождественные отображения $\omega' : V'[1] \to V'$, $p' : V'^*[-2] \to V'^*$, $\omega'' : V''[1] \to V''$, $p'' : V''^*[-2] \to V''^*$. Пусть (e'_i) — базис в V', (e''_I) — базис в V''_{K-ex} и $(e''_{\bar I})$ — базис в V''_{d-ex} (двойственные базисы в двойственных пространствах обозначаются также, но с верхним индексом). Тогда

$$\omega' = e'_i\omega'^i \quad , \quad p' = p'_i e'^i$$

$$\omega''_{\mathcal{L}} = \omega''_{K-ex} = e''_I\omega''^I \quad , \quad p''_{d^*-ex} = p''_I e''^I$$

$$\omega''_{d-ex} = e''_{\bar{I}}\omega''^{\bar{I}} \quad , \quad p''_{\mathcal{L}} = p''_{K^*-ex} = p''_{\bar{I}}e''^{\bar{I}}$$

где мы ввели разделение ультрафиолетовых супер-полей ω'', p'' на K-точную и d-точную части: $\omega'' = \omega''_{\mathcal{L}} + \omega''_{d-ex}$, $p'' = p''_{d^*-ex} + p''_{\mathcal{L}}$ в соответствии с разложением (101). Интеграл (105), определяющий эффективное действие для абстрактной BF-теории, в координатах на $\mathcal{L}_K$ имеет вид

$$e^{S'(\omega',p')/\hbar} =$$

$$= \frac{1}{N}\int e^{\frac{1}{\hbar}<r^*(p')+p''_{\mathcal{L}}, d\iota(\omega')+d\omega''_{\mathcal{L}}+\frac{1}{2}[\iota(\omega')+\omega''_{\mathcal{L}},\iota(\omega')+\omega''_{\mathcal{L}}]>}\prod_I \mathcal{D}\omega''^I \prod_{\bar{I}} \mathcal{D}p''_{\bar{I}} \quad (106)$$

где

$$N = \int e^{\frac{1}{\hbar}<p''_{\mathcal{L}}, d\omega''_{\mathcal{L}}>}\prod_I \mathcal{D}\omega''^I \prod_{\bar{I}} \mathcal{D}p''_{\bar{I}}$$

задаёт нормировку меры на $\mathcal{L}_K$. Интеграл (106) мы понимаем в пертурбативном смысле, т.е. как сумму фейнмановских диаграмм, возникающую при разложении стационарной фазы около точки $\omega''_{\mathcal{L}} = p''_{\mathcal{L}} = 0$ на $\mathcal{L}_K$. При этом свободной (гауссовой) частью действия мы полагаем $S_0 =< p''_{\mathcal{L}}, d\omega''_{\mathcal{L}} >$, а остальные члены действия учитываем как возмущение, т.е. мы раскладываем действие на $\mathcal{L}_K$ как

$$S|_{\mathcal{L}_K} = S_0 + S_{int}$$

где свободная часть есть

$$S_0 =< p''_{\mathcal{L}}, d\omega''_{\mathcal{L}} >= \sum_{\bar{I},J} d^{\bar{I}}_J p''_{\bar{I}}\omega''^J$$

и возмущение ("действие взаимодействия"):

$$\begin{aligned}
S_{int} &= < p', d\omega' > + \frac{1}{2} < p', r[\iota(\omega'),\iota(\omega')] > + < p', r[\iota(\omega'),\omega''_{\mathcal{L}}] > \\
&+ \frac{1}{2} < p', r[\omega''_{\mathcal{L}},\omega''_{\mathcal{L}}] > + \frac{1}{2} < p''_{\mathcal{L}}, [\iota(\omega'),\iota(\omega')] > \\
&+ < p''_{\mathcal{L}}, [\iota(\omega'),\omega''_{\mathcal{L}}] > + \frac{1}{2} < p''_{\mathcal{L}}, [\omega''_{\mathcal{L}},\omega''_{\mathcal{L}}] > \\
&= \sum_{i,j} d^i_j p'_i \omega'^j + \frac{1}{2}\sum_{i,j,k}(-1)^{(|j|+1)|k|} f^i_{jk} p'_i \omega'^j \omega'^k + \sum_{i,j,K}(-1)^{(|j|+1)|K|} p'_i \omega'^j \omega''^K \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i,J,K}(-1)^{(|J|+1)|K|} p'_i \omega''^J \omega''^K + \frac{1}{2}\sum_{\bar{I},j,k}(-1)^{(|j|+1)|k|} f^{\bar{I}}_{jk} p''_{\bar{I}} \omega'^j \omega'^k \\
&+ \sum_{\bar{I},j,K}(-1)^{(|j|+1)|K|} f^{\bar{I}}_{jK} p''_{\bar{I}} \omega'^j \omega''^K + \frac{1}{2}\sum_{\bar{I},J,K}(-1)^{(|J|+1)|K|} f^{\bar{I}}_{JK} p''_{\bar{I}} \omega''^J \omega''^K
\end{aligned}$$

Мы используем естественные обозначения для структурных констант дифференциала и скобки: $d^i_j =< e^i, e_j >$, $d^{\bar{I}}_J =< e^{\bar{I}}, e_J >$, $f^i_{jk} =< e^i, r[\iota(e_j),\iota(e_k)] >$, $f^i_{jK} =< e^i, r[\iota(e_j), e_K] >$, $f^i_{JK} =< e^i, r[e_J, e_K] >$, $f^{\bar{I}}_{jk} =< e^{\bar{I}}, [\iota(e_j),\iota(e_k)] >$, $f^{\bar{I}}_{jK} =< e^{\bar{I}}, [\iota(e_j), e_K] >$, $f^{\bar{I}}_{JK} =< e^{\bar{I}}, [e_j, e_k] >$.

Введём обозначение

$$\ll f \gg_0 = \frac{1}{N}\int f e^{S_0/\hbar}\prod_I \mathcal{D}\omega''^I \prod_{\bar{I}} \mathcal{D}p''_{\bar{I}}$$

для усреднения функции $f \in \mathrm{Fun}(\mathcal{F})$ по ультрафиолетовым полям с весом, задаваемым свободной частью действия S_0, среднее $\ll f \gg_0 \in \mathrm{Fun}(\mathcal{F}')$ понимается как функция инфракрасных полей ω', p'. Пропагатор для интеграла (106) есть

$$\ll \omega''^I p''_{\bar{J}} \gg_0 = -\hbar K^I_{\bar{J}}$$

где $K^I_{\bar{J}} =< e^I, K e_{\bar{J}} >$ есть матрица оператора цепной гомотопии $K : V''_{d-ex} \to V''_{K-ex}$, обратная к матрице дифференциала $d^{\bar{J}}_I$. Таким образом, по теореме Вика, ряд теории возмущений для (106) порождается выражением

$$\begin{aligned} e^{S'/\hbar} &= \ll e^{S_{int}/\hbar} \gg_0 \\ &= \left.\left(\exp\left(-\hbar K^I_{\bar{J}}\frac{\partial}{\partial p''_{\bar{J}}}\frac{\partial}{\partial \omega''^I}\right)\circ e^{S_{int}/\hbar}\right)\right|_{\omega''=p''=0} \qquad (107) \\ &= \left.\left(\exp\left\langle \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \omega''_{\mathcal{L}}}, \hbar K \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p''_{\mathcal{L}}}\right\rangle \circ e^{S_{int}/\hbar}\right)\right|_{\omega''=p''=0} \qquad (108) \end{aligned}$$

и сумма по диаграммам Фейнмана возникает из разложения в ряд Тэйлора обеих экспонент в правой части (107) или (108), и стандартный аргумент теории возмущений говорит, что ряд для S' даётся суммой связных диаграмм Фейнмана. Мы сначала продемонстрируем вычисление первых членов ряда теории возмущений для (106), а потом сформулируем общий результат. Итак, начальные члены тэйлоровского разложения экспонент в (108) дают

$$\begin{aligned} e^{S'/\hbar} = \exp\frac{1}{\hbar}\left((< p', d\omega' > + \frac{1}{2} < p', r[\iota(\omega'), \iota(\omega')] >\right)\cdot \\ \cdot (1 + \left\langle \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \omega''_{\mathcal{L}}}, \hbar K \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p''_{\mathcal{L}}}\right\rangle \circ \frac{1}{\hbar} < p''_{\mathcal{L}}, [\iota(\omega'), \omega''_{\mathcal{L}}] > + \left\langle \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \omega''_{\mathcal{L}}}, \hbar K \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p''_{\mathcal{L}}}\right\rangle \circ \\ \circ \frac{1}{\hbar} < p', r[\iota(\omega'), \omega''_{\mathcal{L}}] > \frac{1}{2\hbar} < p''_{\mathcal{L}}, [\iota(\omega'), \iota(\omega')] > + \\ + \left\langle \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \omega''_{\mathcal{L}(1)}}, \hbar K \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p''_{\mathcal{L}(1)}}\right\rangle \left\langle \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \omega''_{\mathcal{L}(2)}}, \hbar K \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p''_{\mathcal{L}(2)}}\right\rangle \circ \\ \circ \frac{1}{2!}\frac{1}{\hbar} < p''_{\mathcal{L}(1)}, [\iota(\omega'), \omega''_{\mathcal{L}(1)}] > \frac{1}{\hbar} < p''_{\mathcal{L}(2)}, [\iota(\omega'), \omega''_{\mathcal{L}(2)}] > + \\ + \left\langle \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \omega''_{\mathcal{L}(1)}}, \hbar K \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p''_{\mathcal{L}(1)}}\right\rangle \left\langle \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \omega''_{\mathcal{L}(2)}}, \hbar K \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p''_{\mathcal{L}(2)}}\right\rangle \circ \\ \circ \frac{1}{2!}\frac{1}{\hbar} < p''_{\mathcal{L}(1)}, [\iota(\omega'), \omega''_{\mathcal{L}(2)}] > \frac{1}{\hbar} < p''_{\mathcal{L}(2)}, [\iota(\omega'), \omega''_{\mathcal{L}(1)}] > + \cdots) \qquad (109) \end{aligned}$$

где индексы (1), (2) и т.д. указывают, какая производная дифференцирует какую переменную, и мы отделили часть S_{int}, не зависящую от ультрафиолетовых полей. Для преобразования членов ряда теории возмущений, мы воспользуемся следующими двумя тождествами:

$$\left\langle \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \omega''_{\mathcal{L}(1)}}, K \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p''_{\mathcal{L}(1)}} \right\rangle \circ < f, \omega''_{\mathcal{L}(1)} >< p''_{\mathcal{L}(1)}, g > = < f, -Kg > \tag{110}$$

где $f \in \mathrm{Fun}(\mathcal{F}) \otimes V^*$ и $g \in \mathrm{Fun}(\mathcal{F}) \otimes V$, и второе тождество:

$$\left\langle \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \omega''_{\mathcal{L}(1)}}, K \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p''_{\mathcal{L}(1)}} \right\rangle \circ < p''_{\mathcal{L}(1)}, \mathcal{O}\omega''_{\mathcal{L}(1)} > = (-1)^{\mathrm{gh}<p,\mathcal{O}\omega>} \mathrm{Str}_V K\mathcal{O} = -(-1)^{\mathrm{gh}<p,\mathcal{O}\omega>} \mathrm{Str}_V(-K\mathcal{O}) \tag{111}$$

где $\mathcal{O} \in \mathrm{Fun}(\mathcal{F}) \otimes \mathrm{End}(V)$ — оператор, Str_V есть супер-след по V, который мы понимаем как

$$\mathrm{Str}_V \mathcal{O} = \sum_a (-1)^{|a|(1+\mathrm{gh}<e^a,\mathcal{O}e_a>)} < e^a, \mathcal{O}e_a >$$

Теперь мы можем написать начальный отрезок ряда теории возмущений для (106) в виде

$$e^{S'/\hbar} = \exp \frac{1}{\hbar} \left((< p', d\omega' > + \frac{1}{2} < p', r[\iota(\omega'), \iota(\omega')] > \right) \cdot (1 - \ \mathrm{Str}_V(-K[\iota(\omega'), \bullet]) +$$
$$+ \hbar^{-1} \frac{1}{2} < p', r[\iota(\omega'), -K[\iota(\omega'), \iota(\omega')]] > + \frac{1}{2} \mathrm{Str}_V(-K[\iota(\omega'), \bullet]) \cdot \mathrm{Str}_V(-K[\iota(\omega'), \bullet]) -$$
$$- \frac{1}{2} \mathrm{Str}_V(-K[\iota(\omega'), -K[\iota(\omega'), \bullet]]) + \cdots) \tag{112}$$

Тот факт, что роль пропагатора для супер-полей играет оператор $-\hbar K$, можно увидеть также из следующего наблюдения:

$$\ll \omega''_{\mathcal{L}} \otimes p''_{\mathcal{L}} \gg_0 = -\hbar K$$

где $\omega''_{\mathcal{L}} \otimes p''_{\mathcal{L}}$ понимается как элемент $\mathrm{Fun}(\mathcal{L}) \otimes V \otimes V^* \cong \mathrm{Fun}(\mathcal{L}) \otimes \mathrm{End}(V)$. Переход к ряду для самомого эффективного действия S' осуществляется логарифмированием ряда (112), и значительная часть членов в нём пропадает (а именно, те, которые соответствуют несвязным фейнмановским диаграммам):

$$S' = < p', d\omega' > + \frac{1}{2} < p', r[\iota(\omega'), \iota(\omega')] > + \frac{1}{2} < p', r[\iota(\omega'), -K[\iota(\omega'), \iota(\omega')]] > +$$
$$+ \frac{1}{2} < p', r[\iota(\omega'), -K[\iota(\omega'), -K[\iota(\omega'), \iota(\omega')]]] > +$$
$$+ \frac{1}{8} < p', r[-K[\iota(\omega'), \iota(\omega')], -K[\iota(\omega'), \iota(\omega')]] > + \cdots - \hbar \, \mathrm{Str}_V(-K[\iota(\omega'), \bullet]) -$$
$$- \hbar \frac{1}{2} \mathrm{Str}_V(-K[\iota(\omega'), -K[\iota(\omega', \bullet)]]) - \hbar \frac{1}{2} \mathrm{Str}_V(-K[-K[\iota(\omega'), \iota(\omega')], \bullet]) + \cdots \tag{113}$$

Для формулировки общего результата, введём обозначения для итерированных операций. Именно, пусть T — планарное бинарное корневое дерево, рёбра которого мы полагаем ориентированными в направлении от листьев к корню. Листья понимаются как вершины валентности 1, корень — валентности 2, остальные вершины называются внутренними и имеют валентность 3. У каждой внутренней вершины $v \in T$ есть родитель

v_p (вершина, соединённая с ней ребром, находящаяся ближе к корню) и два ребёнка — левый v_l и правый v_r (у листьев есть только родители, у корня — только дети). Рёбра, соединяющие внутренние вершины называются внутренними, остальные (т.е. соединяющие внутреннюю вершину либо с корнем, либо с листом) — внешними. Для обозначения деревьев мы используем стандартное соответствие между деревьями и скобочными структурами. Далее, пусть X и Y есть два $\mathbb{Z}$-градуированных векторных пространства и $\lambda_2 : X \otimes X \to X$, $\tilde{\lambda}_2 : X \otimes X \to Y$ — два билинейных отображения. Тогда для дерева T с $|T| = n$ листьями мы обозначаем

$$\mathrm{Iter}_{T;\lambda_2;\tilde{\lambda}_2} : X^{\otimes n} \to Y$$

n-линейное отображение с помощью следующего алгоритма: пусть $(x_1, \cdots, x_n) \in X^n$. Раскрасим i-й лист (если обходить дерево против часовой стрелки, начиная от корня) значением x_i. Дальше будем последовательно раскрашивать остальные вершины $v \in T$ по правилу $x_v = \lambda_2(x_{v_l}, x_{v_r})$ для внутренних вершин v и $x_{root} = \tilde{\lambda}_2(x_{root_l}, x_{root_r})$ для корня. Значение итерированной операции определяется как $\mathrm{Iter}_{T;\lambda_2;\tilde{\lambda}_2}(x_1, \cdots, x_n) = x_{root}$. Например:

$$\mathrm{Iter}_{((*(**))(**));\lambda_2;\tilde{\lambda}_2}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \tilde{\lambda}_2(\lambda_2(x_1, \lambda_2(x_2, x_3)), \lambda_2(x_4, x_5))$$

Нам также потребуется обозначение для следа итерированных операций. А именно, пусть L — планарный связный ориентированный граф с одним циклом (“однопетлевой” в терминологии фейнмановских диаграмм), внутренние вершины которого 3-валентны (причём для каждой есть два входящих ребра и одно исходящее), и есть $|L| = n$ внешних 1-валентных вершин — листьев (инцидентное ребро — исходящее). Разрежем цикл в L по любому — получим дерево T с $n+1$ листом, один из которых отмечен (он был соединён с корнем разрезанным ребром). Мы определяем n-линейное отображение $\mathrm{Loop}_{L;\lambda_2} : X^{\otimes n} \to \mathbb{R}$ как супер-след по X

$$\mathrm{Loop}_{L;\lambda_2}(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{Str}_X\, \mathrm{Iter}_{T;\lambda_2;\lambda_2}(x_1, \cdots, x_{i-1}, \bullet, x_i, \cdots, x_n)$$

где i — номер отмеченного листа в T (при нумерации, порождённой обходом T против часовой стрелки от корня). Например:

$$\mathrm{Loop}_{(((**)\bullet)*);\lambda_2} = \mathrm{Str}_X \lambda_2(\lambda_2(\lambda_2(x_1, x_2), \bullet), x_3)$$

где $*$ означает не отмеченные листья и $\bullet$ — отмеченный лист.

Будем обозначать $\mathbf{T}_{\mathrm{Pl}}$ множество планарных деревьев и $\mathbf{L}_{\mathrm{Pl}}$ множество планарных однопетлевых ориентированных графов. Также обозначим $\mathbf{T}_{\mathrm{nonPl}}$ множество деревьев без планарной структуры (т.е. $\mathbf{T}_{\mathrm{Pl}}$, профакторизованное по изоморфизмам графов) и

$\mathbf{L}_{\mathrm{nonPl}}$ — множество однопетлевых графов без планарной структуры. Для непланарного графа Γ мы обозначаем $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ его группу автоморфизмов, т.е. группу перенумераций вершин, не меняющих матрицу инцидентности. Соответственно, порядок группы автоморфизмов обозначается $|\mathrm{Aut}(\Gamma)|$. Теперь мы можем сформулировать общий результат теории возмущений для (106).

Теорема 5. *Эффективное действие для абстрактной BF-теории, ассоциированной с дифференциальной градуированной алгеброй Ли $(V, d, [,])$, индуцированное на пространстве $\mathcal{F}' = T^*[-1]V'[1]$ и определённое с помощью интеграла (106), имеет вид*

$$S'(\omega', p') = S'^0(\omega', p') + \hbar S'^1(\omega') \tag{114}$$

где древесная часть раскладывается в сумму по непланарным бинарным корневым деревьям:

$$S'^0(\omega', p') =< p', d\omega' > + \sum_{T\in\mathbf{T}_{\mathrm{nonPl}}, |T|\geq 2} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(T)|} < p', \mathrm{Iter}_{T;-K[\bullet,\bullet];\, r[\bullet,\bullet]}(\iota(\omega'), \cdots, \iota(\omega')) > \tag{115}$$

и однопетлевая часть раскладывается в сумму по непланарным связным ориентированным однопетлевым графам:

$$S'^1(\omega') = -\sum_{L\in\mathbf{L}_{\mathrm{nonPl}}} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(L)|} \mathrm{Loop}_{L;-K[\bullet,\bullet]}(\iota(\omega'), \cdots, \iota(\omega')) \tag{116}$$

Начальные члены ряда теории возмущений для древесной части эффективного действия S'^0 имеют вид

$$\begin{aligned} S'^0(\omega', p') =< p', d\omega' > &+ \frac{1}{2} < p', r[\iota(\omega'), \iota(\omega')] > + \frac{1}{2} < p', r[\iota(\omega'), -K[\iota(\omega'), \iota(\omega')]] > + \\ &+ \frac{1}{2} < p', r[\iota(\omega'), -K[\iota(\omega'), -K[\iota(\omega'), \iota(\omega')]]] > + \\ &+ \frac{1}{8} < p', r[-K[\iota(\omega'), \iota(\omega')], -K[\iota(\omega'), \iota(\omega')]] > + \cdots \end{aligned} \tag{117}$$

(первые два члена этого ряда — ограничение действия на инфракрасные поля $\hat{\iota}^* \circ S = S(\iota(\omega'), r^*(p'))$), и для однопетелевой части эффективного действия S'^1:

$$\begin{aligned} S'^1(\omega') = &- \mathrm{Str}_V(-K[\iota(\omega'), \bullet]) - \frac{1}{2} \mathrm{Str}_V(-K[\iota(\omega'), -K[\iota(\omega', \bullet)]]) - \\ &- \frac{1}{2} \mathrm{Str}_V(-K[-K[\iota(\omega'), \iota(\omega')], \bullet]) - \frac{1}{3} \mathrm{Str}_V(-K[\iota(\omega'), -K[\iota(\omega'), -K[\iota(\omega'), \bullet]]]) - \\ &- \frac{1}{2} \mathrm{Str}_V(-K[-K[\iota(\omega'), \iota(\omega')], -K[\iota(\omega', \bullet)]]) - \frac{1}{2} \mathrm{Str}_V(-K[-K[\iota(\omega'), -K[\iota(\omega'), \iota(\omega')]], \bullet]) + \cdots \end{aligned} \tag{118}$$

Этот результат фактически уже доказан вычислением (113). Он является совершенно стандартным для теории возмущений, мы лишь записываем значения фейнмановских диаграмм в операционном формализме, специально приспособленным для данной теории и оправданном тождествами (110,111). Важным свойством интеграла (106) также является то, что не возникают фейнмановские диаграммы с числом петель > 1. Это обусловлено тем, что рёбра фейнмановских графов для этой теории ориентированы (что, в свою очередь, связано с тем, что свободная часть действия спаривает поля ω и p, живущие в двойственных пространствах) и тем, что все вершины имеют не более одного исходящего ребра (т.к. все слагаемые в S_{int} имеют степень ≤ 1 по полю $p''_{\mathcal{L}}$).

Фейнмановские правила для (106) можно сформулировать так: пропагатор для внутренних рёбер есть $-K$, для рёбер, соединяющих внешнюю вершину с внутренней 1 и для ребра, соединяющего две внешние вершины d; "входящим" одновалентным вершинам приписывается значение $\iota(\omega')$, "исходящим" одновалентным — значение $r^*(p')$ и в трёхвалентных вершинах вычисляется скобка $[\bullet,\bullet]$.

Следующее утверждение является прямым следствием конструкции эффективного действия с помощью интеграла (105) и Утверждения 2.

Утверждение 5. *Эффективное действие S' для абстрактной BF-теории удовлетворяет квантовому мастер-уравнению*

$$\Delta' e^{S'(\omega',p')/\hbar}=0$$

Весьма информативно пронаблюдать, как именно выполняется мастер-уравнение в низших порядках ряда теории возмущений (113). Вследствие разложения (114) эффективного действия на древесную и однопетлевую часть (и того, что S'^1 не зависит от p', и потому $\Delta' S'^1=\{S'^1,S'^1\}=0$) квантовое мастер-уравнение для S' эквивалентно системе (23,24):

$$\{S'^0,S'^0\} = 0 \tag{119}$$

$$\{S'^0,S'^1\}+\Delta S'^0 = 0 \tag{120}$$

из классического мастер-уравнения и собственно квантового. Проверим в низжих порядках по ω' классическое мастер-уравнение, используя супер-полевой формализм из доказательства Утверждения 1:

$$\frac{1}{2}\{S'^0,S'^0\}=S'^0\left\langle\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\omega'},\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p'}\right\rangle S'^0=$$

$$=\left\langle <p',d\bullet>,d\omega'\right\rangle+\left\langle <p',d\bullet>,\frac{1}{2}r[\iota(\omega'),\iota(\omega')]\right\rangle+\left\langle <p',r[\iota(\omega'),\iota(\bullet)]>,d\omega'\right\rangle+$$

$$+\left\langle <p',d\bullet>,\frac{1}{2}r[\iota(\omega'),-K[\iota(\omega'),\iota(\omega')]]\right\rangle+\left\langle <p',r[\iota(\omega'),\iota(\bullet)]>,\frac{1}{2}r[\iota(\omega'),\iota(\omega')]\right\rangle+$$

$$+\left\langle <p',r[\iota(\omega'),-K[\iota(\omega'),\iota(\bullet)]]>-\frac{1}{2}<p',r[\iota(\bullet),-K[\iota(\omega'),\iota(\omega')]]>,d\omega'\right\rangle+\dots=$$

$$=<p',d^2\omega'>+<p',r\left(\frac{1}{2}d[\iota(\omega'),\iota(\omega')]+[\iota(\omega'),d\iota(\omega')]\right)>+$$

$$+<p',r\left(\frac{1}{2}[\iota(\omega'),\iota\circ r[\iota(\omega'),\iota(\omega')]]+\frac{1}{2}d[\iota(\omega'),-K[\iota(\omega'),\iota(\omega')]]+\right.$$

$$\left.+[\iota(\omega'),-K[\iota(\omega'),d\iota(\omega')]]-\frac{1}{2}[d\iota(\omega'),-K[\iota(\omega'),\iota(\omega')]]\right)>+\dots=$$

$$=0+0+\frac{1}{2}<p',r[\iota(\omega'),(\mathcal{P}'+dK+Kd)[\iota(\omega'),\iota(\omega')]]>+\dots=$$

$$=\frac{1}{2}<p',r[\iota(\omega'),[\iota(\omega'),\iota(\omega')]]>+\dots=0+O(p'\omega'^4)$$

Тем самым, в порядке $O(p'\omega')$ классическое мастер-уравнение выполняется, благодаря тождеству $d^2=0$, в порядке $O(p'\omega'^2)$ — благодаря тождеству Лейбница на V, в старших порядках — благодаря тождествам Лейбица и Якоби на V и свойству цепной гомотопии $\mathcal{P}'+dK+Kd=\mathrm{id}_V$. Теперь посмотрим, как работает собственно квантовая часть мастер-уравнения:

$$\{S'^0,S'^1\}+\Delta S'^0=S'^1\left\langle\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\omega'},\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p'}\right\rangle S'^0-\left\langle\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\omega'},\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p'}\right\rangle S'^0$$

$$=(\left\langle-\mathrm{Str}_V(-K[\iota(\bullet_2),\bullet_1]),d\omega'\right\rangle+\left\langle-\mathrm{Str}_V(-K[\iota(\bullet_2),\bullet_1]),\frac{1}{2}r[\iota(\omega'),\iota(\omega')]\right\rangle+$$

$$+\left\langle-\mathrm{Str}_V(-K[\iota(\omega'),-K[\iota(\bullet_2),\bullet_1]]),d\omega'\right\rangle+\left\langle-\mathrm{Str}_V(-K[-K[\iota(\omega'),\iota(\bullet_2)],\bullet_1]),d\omega'\right\rangle+\dots)+$$

$$+(\mathrm{Str}_{V'}d+\mathrm{Str}_{V'}r[\iota(\omega'),\iota(\bullet)]+\mathrm{Str}_{V'}r[\iota(\omega'),-K[\iota(\omega'),\iota(\bullet)]]+\frac{1}{2}\mathrm{Str}_{V'}r[-K[\iota(\omega'),\iota(\omega')],\iota(\bullet)]+\dots)$$

$$=(-\mathrm{Str}_V(-K[d\iota(\omega'),\bullet])-\frac{1}{2}\mathrm{Str}_V(-K[\iota r[\iota(\omega'),\iota(\omega')],\bullet])-$$

$$-\mathrm{Str}_V(-K[\iota(\omega'),-K[d\iota(\omega'),\bullet]])-\mathrm{Str}_V(-K[-K[\iota(\omega'),d\iota(\omega')],\bullet])+\dots)+$$

$$+(\mathrm{Str}_V\mathcal{P}'[\iota(\omega'),\bullet]+\mathrm{Str}_V\mathcal{P}'[\iota(\omega'),-K[\iota(\omega'),\bullet]]+\frac{1}{2}\mathrm{Str}_V\mathcal{P}'[-K[\iota(\omega'),\iota(\omega')],\bullet]+\dots)$$

$$=\mathrm{Str}_V(\mathcal{P}'+dK+Kd)[\iota(\omega'),\bullet]+\mathrm{Str}_V(-K[\iota(\omega'),(\mathcal{P}'+dK+Kd)[\iota(\omega'),\bullet]])-$$

$$-\frac{1}{2}\mathrm{Str}_V(-K[(\mathcal{P}'+dK+Kd)[\iota(\omega'),\iota(\omega')],\bullet])+\dots$$

$$=\mathrm{Str}_V[\iota(\omega'),\bullet]+\mathrm{Str}_V(-K[\iota(\omega'),[\iota(\omega'),\bullet]])-\frac{1}{2}\mathrm{Str}_V(-K[[\iota(\omega'),\iota(\omega')],\bullet])+\dots=0+O(\omega'^3)$$

где при вычислении мы пользовались только циклическим свойством следа, тождествами Лейбница и Якоби на V и свойством цепной гомотопии $\mathcal{P}'+dK+Kd=\mathrm{id}_V$. Также, для проверки квантовой части мастер-уравнения в низшем порядке нам пришлось использовать свойство унимодулярности скобки на V.

Данными индуцирования эффективного действия для абстрактной BF-теории является тройка отображений (ι,r,K).

Определение 11. *Пусть (V,d) и (V',d) — два гомотопных коцепных комплекса. Данными индуцирования с V на V' мы называем тройку линейных отображений (ι,r,K) (вложение, ретракция, цепная гомотопия), где $\iota: V'\to V$, $r: V\to V'$, $K: V\to V$ и выполнен набор соотношений*

$$d\iota = \iota d \tag{121}$$

$$dr = rd \tag{122}$$

$$r\iota = \mathrm{id}_{V'} \tag{123}$$

$$rK = K\iota = 0 \tag{124}$$

$$dK + Kd = \mathrm{id}_V - \iota r \tag{125}$$

$$K^2 = 0 \tag{126}$$

Тот факт, что эффективное действие изменяется при непрерывном изменении данных индуцирования на каноническое преобразование, непосредственно следует из Утверждения 4, однако пользуясь формулой (97), мы можем предъявить более точный результат.

Утверждение 6. *Инфинитезимальные деформации данных индуцирования (ι,r,K) имеют вид $(\iota,r,K)\mapsto(\iota+\delta\iota, r+\delta r, K+\delta_0 K+\delta K)$ где должно выполняться $d\;\delta\iota=\delta\iota\; d$, $d\;\delta r=\delta r\; d$,$r\;\delta\iota+\delta r\;\iota=0$, $K\;\delta K+\delta K\;K=0$, $d\;\delta K+\delta K\;d=0$, $r\;\delta K=\delta K\;\iota=0$ и где $\delta_0 K=-K\;\delta\iota\; r-\iota\;\delta r\; K$ есть (вынужденная) минимальная деформация K, связанная с деформацией вложения и ретракции. При такой деформации данных индуцирования, эффективное действие меняется на каноническое преобразование*

$$S'\mapsto S'+\{S',R'\}+\hbar\Delta R'$$

с генератором

$$\begin{aligned} &R'(\omega',p') =< p', r\;\delta\iota(\omega')> + \\ &+e^{-S'/\hbar}\int_{\mathcal{L}_K} e^{S(\iota(\omega')+\omega'',r^*(p')+p'')/\hbar}\left(-< p''_{\mathcal{L}}, d\;\delta K\omega''_{\mathcal{L}}> + < p''_{\mathcal{L}},\delta\iota(\omega')> - < p',\delta r(\omega''_{\mathcal{L}})>\right) \end{aligned} \tag{127}$$

Доказательство. Здесь мы по отдельности рассматриваем преобразования типа I (деформация K при фиксированных ι, r) и типа II (деформация ι, r, сопровождаемая минимальной деформация K). При преобразовании типа I лагранжево подмногообразие $\mathcal{L}_K$ меняется следующим образом: $\omega''_{\mathcal{L}}\mapsto\omega''_{\mathcal{L}}+\delta\omega''_{\mathcal{L}}$, $p''_{\mathcal{L}}\mapsto p''_{\mathcal{L}}+\delta p''_{\mathcal{L}}$, где деформация $\omega''_{\mathcal{L}}$ должна удовлетворять уравнению $(K+\delta K)(\omega''_{\mathcal{L}}+\delta\omega''_{\mathcal{L}})=0$ (и двойственное уравнение для деформации $p''_{\mathcal{L}}$). Решение этого уравнения можно предъявить в виде $\delta\omega''_{\mathcal{L}}=-d\;\delta K\omega''_{\mathcal{L}}$. Поэтому деформация $K\mapsto K+\delta K$ приводит к деформации лагранжева подмногообразия

$\mathcal{L}_K \mapsto (\mathcal{L}_K)_\Psi$, с фиксирующим калибровку фермионом $\Psi =< p''_{\mathcal{L}}, d\ \delta K \omega''_{\mathcal{L}} >$. Преобразования типа II рассматриваются точно как в доказательстве Утверждения 4. Минимальная деформация цепной гомотопии $\delta_0 K$ при преобразовании типа II находится из уравнений $d\ \delta_0 K + \delta_0 K\ d = -\delta\iota\ r - \iota\ \delta r$, $\delta_0 K\ K + K\ \delta_0 K = 0$, и решение имеет вид $\delta_0 K = -K\ \delta\iota\, r - \iota\, \delta r\ K$.

□

4.4. **Эффективное действие абстрактной BF-теории, как производящая функция для алгебраической структуры на подкомплексе.** Пусть $S' \in \mathrm{Fun}(\mathcal{F}')$ — эффективное действие для абстрактной теории на $\mathcal{F} = T^*[-1]V$, связанной с DGLA $(V, d, [\bullet, \bullet])$, определённое с помощью интеграла (105). Согласно полученному в разделе 4.3 пертурбативному результату, имеется разложение

$$S'(\omega', p') = S'^0(\omega', p') + \hbar S'^1(\omega')$$

эффективного действия на древесную и однопетлевую часть. При этом S'^1 не зависит от p', а S'^0 зависит от p' линейно. Представим древесную часть в виде

$$S'^0(\omega', p') = \sum_i (-1)^{|i|+1} p'_i Q^i(\omega')$$

где $Q^i \in \mathrm{Fun}(V'[1])$ — набор функций на $V'[1]$ и определим векторное поле на $V'[1]$ (или дифференцирование алгебры функций $\mathrm{Fun}(V'[1])$)

$$Q = Q^i \frac{\partial}{\partial \omega'^i} \in \mathrm{Vect}(V'[1]) = \mathrm{Der}(\mathrm{Fun}(V'[1]))$$

Теперь древесную честь эффективного действия можно записать как

$$S'^0(\omega', p') = \sum_i (-1)^{|i|+1} p'_i Q \omega'^i = - < p', Q\omega' >$$

(в супер-полевом формализме мы имеем ввиду, что Q действует на ω'^i и проносится через базисные элементы $e'_i \in V$). Классическое мастер-уравнение $\{S'^0, S'^0\} = 0$ означает, что $Q^2 = 0$, т.е. Q есть когомологическое векторное поле на $V'[1]$. Также заметим, что БРСТ-оператор $Q_{\mathcal{F}'} = \{S^0, \bullet\}$ на полном пространстве БВ-полей $\mathcal{F}' = T^*[-1](V'[1])$ является когомологическим векторным полем на $\mathcal{F}'$, касательным к нулевому сечению $V'[1] \subset \mathcal{F}'$ и Q можно понимать как ограничение $Q = Q_{\mathcal{F}'}|_{V'[1]}$.

Разложим компоненты векторного поля Q в ряд Тэйлора по переменным ω'^i:

$$Q^i(\omega') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} Q^i_{(n)}(\omega') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j_1, \dots, j_n} Q^i_{(n) j_1 \cdots j_n} \omega'^{j_1} \cdots \omega'^{j_n}$$

где тэйлоровские коэффициенты определяются как производные

$$Q^i_{(n) j_1 \cdots j_n} = \left(\frac{\partial}{\partial \omega'^{j_n}} \cdots \frac{\partial}{\partial \omega'^{j_1}} Q^i(\omega') \right) \Bigg|_{\omega' = 0}$$

Теперь определим набор супер-антисимметричных полилинейных отображений ("классических операций") $l_{(n)} : \Lambda^n V' \to V'$, задав их значения на базисе V' (т.е. с помощью структурных констант):

$$l_{(n)}(e'_{j_1}, \ldots, e'_{j_n}) = \sum_i e'_i l^i_{(n)j_1\cdots j_n} = \sum_i (-1)^{|i|+1} e'_i\, Q^i_{(n)j_1\cdots j_n} \epsilon(j_1, \ldots, j_n) \tag{128}$$

где $\epsilon(j_1, \ldots, j_n)$ есть знак, определяемый как

$$\epsilon(j_1, \ldots, j_n) = (-1)^{(|j_{n-1}|+1)\cdot|j_n| + (|j_{n-2}|+1)\cdot(|j_{n-1}|+|j_n|) + \cdots + (|j_1|+1)\cdot(|j_2|+\cdots+|j_n|)} \tag{129}$$

То, что заданное так $l_{(n)}$ в самом деле (супер-)антисимметрично, доказывается элементарной проверкой:

$$\begin{aligned} l_{(n)}(e'_{j_1}, \ldots, e'_{j_k}, e'_{j_{k+1}}, \ldots, e'_{j_n}) &= \sum_i (-1)^{|i|+1} e'_i\, Q^i_{(n)j_1\cdots j_k j_{k+1}\cdots j_n} \epsilon(j_1, \ldots, j_k, j_{k+1}, \ldots, j_n) \\ = \sum_i (-1)^{|i|+1} e'_i\, (-1)^{(|j_k|+1)(|j_{k+1}|+1)} & Q^i_{(n)j_1\cdots j_{k+1} j_k\cdots j_n} (-1)^{|j_k|+|j_{k+1}|} \epsilon(j_1, \ldots, j_{k+1}, j_k, \ldots, j_n) \\ &= (-1)^{1+|j_k||j_{k+1}|} l_{(n)}(e'_{j_1}, \ldots, e'_{j_{k+1}}, e'_{j_k}, \ldots, e'_{j_n}) \end{aligned} \tag{130}$$

Из того, что $\mathrm{gh}(Q) = 1$ следует $\deg(l_{(n)}) = 2 - n$. В терминах отображений $l_{(n)}$ векторное поле Q записывается как

$$Q = -\left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} l_{(n)}(\omega', \ldots, \omega'), \frac{\partial}{\partial \omega'} \right\rangle \tag{131}$$

(имеется в виду, что $l_{(n)}$ действует на базисные элементы e'_i, а переменные ω'^i проносятся, компенсируя сложный знак в определении (128)). Древесная часть действия выражается через $l_{(n)}$ как

$$S'^0 = \left\langle p', \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} l_{(n)}(\omega', \ldots, \omega') \right\rangle \tag{132}$$

В терминах классических операций $l_{(n)}$ классическое мастер-уравнение имеет вид системы квадратичных уравнений на структурные константы операций $l_{(n)}$:

$$\sum_{r\geq 0, s\geq 1:\, r+s=n} \frac{1}{r!\, s!}\, l_{(r+1)}(\omega', \ldots, \omega', l_{(s)}(\omega', \ldots, \omega')) = 0 \tag{133}$$

для всех $n \geq 1$.

Пара (V', Q), состоящая из $\mathbb{Z}$-градуированного векторного пространства V' и когомологического векторного поля Q на $V'[1]$, обращающегося в ноль в точке $0 \in V'[1]$, называется L_∞-алгеброй (или гомотопической алгеброй Ли). Таким образом, древесная часть эффективного действия задаёт структуру L_∞-алгебры на V'. Эквивалентное определение L_∞-алгебры — $\mathbb{Z}$-градуированное векторное пространство V', снабжённое набором полилинейных супер-антисимметричных отображений (L_∞-операций) $l_{(n)} : \Lambda^n V' \to V'$ степени $2-n$ для $n \geq 1$, причём операции должны удовлетворять системе квадратичных уравнений (133) (т.н. старшие гомотопические тождества Якоби). Связь между двумя определениями L_∞-алгебры устанавливается с помощью (131).

Приведём также стандартный вид первых нескольких уравнений из системы (133) в стандартной форме уравнений на структурные константы (без супер-полей). Эти уравнения получаются применением к (133) дифференциального оператора $\frac{\partial}{\partial \omega'^{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial \omega'^{i_n}}$. Для $n = 1$ получаем

$$l_{(1)}(l_{(1)}(e'_i)) = 0$$

— тождество Пуанкаре, т.е. $l_{(1)}$ есть кограничный оператор. Для $n = 2$:

$$l_{(1)}(l_{(2)}(e'_i, e'_j)) - l_{(2)}(l_{(1)}(e'_i), e'_j) - (-1)^{|i|} l_{(2)}(e'_i, l_{(1)}(e'_j)) = 0$$

— тождество Лейбница, т.е. $l_{(1)}$ дифференцирует $l_{(2)}$.

$$\begin{aligned} l_{(2)}(e'_i, l_{(2)}(e'_j, e'_k)) + (-1)^{|i|(|j|+|k|)} l_{(2)}(e'_j, l_{(2)}(e'_k, e'_i)) + (-1)^{|k|(|i|+|j|)} l_{(2)}(e'_k, l_{(2)}(e'_i, e'_j)) + \\ + (-1)^{|i|+|j|} l_{(3)}(e'_i, e'_j, l_{(1)}(e'_k)) + (-1)^{(|i|+1)(|j|+|k|)} l_{(3)}(e'_j, e'_k, l_{(1)}(e'_i)) + \\ + (-1)^{|i|+|k|(|i|+|j|+1)} l_{(3)}(e'_k, e'_i, l_{(1)}(e'_j)) + l_{(1)}(l_{(3)}(e'_i, e'_j, e'_k)) \end{aligned} \quad (134)$$

— гомотопическое тождество Якоби. В случае, если тринарная L_∞-операция $l_{(3)} = 0$, оно превращается в обычное тождество Якоби для операции $l_{(2)}$. В случае $l_{(3)} = l_{(4)} = \cdots = 0$ L_∞-алгебра — это обычная DGLA. С точки зрения когомологического векторного поля Q случай DGLA соответствует Q не более чем квадратичному по координатам на $V'[-1]$. Для случая DGLA $l_{(1)} = d$ есть дифференциал, $l_{(2)} = [\bullet, \bullet]$ — скобка, и когомологическое векторное поле Q имеет вид

$$Q = - < d\omega', \frac{\partial}{\partial \omega'} > - < [\omega', \omega'], \frac{\partial}{\partial \omega'} >$$

Ряд теории возмущений (115) для древесной части эффективного действия даёт следующее выражение для L_∞-операций на V' в виде суммы по деревьям:

$$l_{(n)}(\omega', \ldots, \omega') = n! \sum_{T \in \mathbf{T}_{\mathrm{nonPl}},\, |T| = n} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(T)|} \, \mathrm{Iter}_{T; -K[\bullet,\bullet]; r[\bullet,\bullet]}(\iota(\omega'), \cdots, \iota(\omega')) \qquad (135)$$

при $n > 1$ и $l_{(1)}(\omega') = d\omega'$. Выражения для структурных констант операций $l_{(n)}$ получаются из (135) применением дифференциального оператора $\frac{\partial}{\partial \omega^{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial \omega^{i_n}}$. В частности, для $l_{(1)}$ имеем

$$l_{(1)}(e'_i) = de'_i$$

— дифференциал на V'. Для $l_{(2)}$:

$$l_{(2)}(e'_i, e'_j) = r[\iota(e'_i), \iota(e'_j)]$$

— спроецированная на V' скобка в V. И для $l_{(3)}$:

$$l_{(3)}(e'_i,e'_j,e'_k)=r[-K[\iota(e'_i),\iota(e'_j)],\iota(e'_k)]+$$
$$+(-1)^{|i|(|j|+|k|)}r[-K[\iota(e'_j),\iota(e'_k)],\iota(e'_i)]+(-1)^{|k|(|i|+|j|)}r[-K[\iota(e'_k),\iota(e'_i)],\iota(e'_j)] \quad (136)$$

Далее, представим однопетлевую часть эффективного действия в виде $S'^1(\omega')=\log\rho(\omega')$, где $\rho\in \mathrm{Fun}(V'[1])$. Тогда в терминах Q и ρ эффективное действие имеет вид

$$S'=-<p',Q\omega'>+\hbar\log\rho \quad (137)$$

Классическая часть мастер-уравнения (119), как обсуждалось выше, эквивалентна условию $Q^2=0$. Собственно квантовая часть мастер-уравнения (120) в терминах Q, ρ имеет вид

$$\Delta S'^0+\{S'^1,S'^0\}=\sum_i\frac{\partial}{\partial\omega'^i}(Q\omega'^i)+\sum_i(Q\omega'^i)\left(\frac{\partial}{\partial\omega'^i}\log\rho\right)=\sum_i\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\omega'^i}(\rho Q\omega'^i)=$$
$$=\mathrm{div}Q+Q\log\rho=\mathrm{div}_\rho Q=0 \quad (138)$$

где $\mathrm{div}_\rho Q$ есть дивергенция векторного поля Q, определённая мерой $\mu=\rho\cdot\mu_{\mathrm{coord}}=\rho\cdot\prod_i\mathcal{D}\omega'^i$ на $V'[1]$, т.е. мерой с плотностью ρ. Итак, мы пришли к следующей интерпретации квантового мастер-уравнения:

$$Q^2 = 0 \quad (139)$$
$$\mathrm{div}_\rho Q = 0 \quad (140)$$

т.е. Q есть когомологическое векторное поле на $V'[1]$ и ρ есть функция плотности согласованной с Q меры на $V'[1]$, т.е. меры, для которой поток, порождённый Q, сохраняет объём.

Мы определяем “квантовые операции” на V' — набор полилинейных супер-антисимметричных отображений $q_{(n)}:\Lambda^nV'\to\mathbb{R}$ степени $\deg q_{(n)}=-n$ через тэйлоровское разложение $S'^1(\omega')=\log\rho(\omega')$:

$$S'^1(\omega')=\log\rho(\omega')=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n!}\,q_{(n)}(\omega',\ldots,\omega') \quad (141)$$

то есть, структурные константы квантовых операций определяются как

$$q_{(n)}(e'_{i_1},\ldots,e'_{i_n})=\epsilon(i_1,\ldots,i_n)\left(\frac{\partial}{\partial\omega'^{i_n}}\cdots\frac{\partial}{\partial\omega'^{i_1}}\log\rho(\omega')\right)\Big|_{\omega'=0}$$

Квантовая часть мастер-уравнения (119,140) в терминах классических и квантовых операций $l_{(n)},q_{(n)}$ имеет вид системы

$$\frac{1}{n!}\,\mathrm{Str}_{V'}l_{(n+1)}(\omega',\ldots,\omega',\bullet)+\sum_{r\geq0,s\geq1:\,r+s=n}\frac{1}{r!s!}\,q_{(r+1)}(\omega',\ldots,\omega',l_{(s)}(\omega',\ldots,\omega'))=0 \quad (142)$$

для всех $n\geq1$ (уравнение для $n=0$ выполняется автоматически: $\mathrm{Str}_{V'}l_{(1)}(\bullet)=0$, поскольку $\deg l_{(1)}=1$). Уравнения на структурные константы операций получаются из

(142), как и ранее для (133), применением дифференциального оператора $\frac{\partial}{\partial\omega'^{i_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial\omega'^{i_n}}$. В частности для $n=1$:

$$\mathrm{Str}_{V'} l_{(2)}(e'_i,\bullet)+q_{(1)}(l_{(1)}(e'_i))=0$$

— гомотопический вариант условия унимодулярности (82). Для $n=2$:

$$\mathrm{Str}_{V'} l_{(3)}(e'_i,e'_j,\bullet)+q_{(1)}(l_{(2)}(e'_i,e'_j))+(-1)^{|i|+1}q_{(2)}(e'_i,l_{(1)}(e'_j))+(-1)^{(|i|+1)|j|}q_{(2)}(e'_j,l_{(1)}(e'_i))=0$$

Ряд теории возмущений для однопетлевой части эффективного действия (116) даёт выражение для квантовых операций в виде суммы по однопетлевым графам:

$$q_{(n)}(\omega',\ldots,\omega')=-n!\sum_{L\in\mathbf{L}_{\mathrm{nonPl}},\ |L|=n}\frac{1}{|\mathrm{Aut}(L)|}\mathrm{Loop}_{L;-K[\bullet,\bullet]}(\iota(\omega'),\cdots,\iota(\omega'))$$

Структурные константы получаются отсюда, как обычно, применением $\frac{\partial}{\partial\omega'^{i_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial\omega'^{i_n}}$. В частности, для $n=1$ имеем

$$q_{(1)}(e'_i)=-\ \mathrm{Str}_V(-K[\iota(e'_i),\bullet])$$

Для $n=2$:

$$\begin{aligned}q_{(2)}(e'_i,e'_j)=&-\ \mathrm{Str}_V(-K[-K[e'_i,e'_j],\bullet])-\\&-(-1)^{|i|+1}\ \mathrm{Str}_V(-K[e'_i,-K[e'_j,\bullet]])-(-1)^{(|i|+1)|j|}\ \mathrm{Str}_V(-K[e'_j,-K[e'_i,\bullet]])\end{aligned}$$

Итак, мы можем резюмировать алгебраическую структуру, порождённую эффективным действием S' для абстрактной BF-теории, ассоциированной со структурой DGLA на V, на подкомплексе $V'\overset{\iota}{\hookrightarrow}V$.

Определение 12. *Мы называем qL_∞-алегеброй (“квантовой” L_∞) $\mathbb{Z}$-градуированное векторное пространство V', снабжённое когомологическим векторным полем Q (т.е. степени 1 и удовлетворяющим $Q^2=0$) на $V'[1]$, обращающимся в 0 в точке $0\in V'[1]$, и также снабжённое Q-инвариантой (т.е. удовлетворяющей (140)) мерой μ на $V'[1]$.*

Или эквивалентно, в терминах операций:

Определение 13. *qL_∞-алгебра — это $\mathbb{Z}$-градуированное векторное пространство V', снабжённое двумя наборами полилинейных супер-антисимметричных отображений $l_{(n)}:\Lambda^n V'\to V'$ и $q_{(n)}:\Lambda^n V'\to\mathbb{R}$ для $n=1,2,3,\ldots$ — классическими и квантовыми операциями, которые удовлетворяют двум системам уравнений: системе гомотопических тождеств Якоби (133) и системе гомотопических соотношений унимодулярности (142).*

Тем самым, эффективное действие S' порождает на V' структуру qL_∞-алгебры с помощью (137) в терминах когомологического векторного поля и согласованной с ним меры, или, альтернативно, с помощью (132,141), в терминах классических и квантовых операций. Заметим, что эффективное действие является производящей функцией для структурных констант классических и квантовых операций на V', точно так же, как исходное действие абстрактной BF-теории интерпретировалось, как производящая функция для структурных констант дифференциала и скобки на V.

4.5. BF_∞**-теория.** Пусть (V, Q, μ) есть qL_∞-алгебра. Определим ассоциированную с ней BF_∞-теорию с помощью БВ-действия

$$S(\omega, p) = - < p, Q(\omega)\omega > + \hbar \log \rho(\omega) =$$
$$= \left\langle p, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} l_{(n)}(\omega, \ldots, \omega) \right\rangle + \hbar \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} q_{(n)}(\omega, \ldots, \omega) \quad (143)$$

на пространстве полей

$$\mathcal{F} = T^*[-1](V[1])$$

с каноническим БВ-лапласианом Δ. Все обозачения для супер-полей, операций и т.п. — как раньше. Отличие от ситуации раздела 4.1 лишь в том, что теперь мы строим действие не по структуре унимодулярной DGLA на $\mathbb{Z}$-градуированном векторном пространстве V, а по qL_∞-структуре. Абстрактная BF-теория, очевидно, является частным случаем BF_∞-теории, отвечающим ситуации $l_{(3)} = l_{(4)} = \cdots = 0$, $q_{(1)} = q_{(2)} = \cdots = 0$, т.е. отличны от нуля лишь первые две классические операции. Квантовое мастер-уравнение для действия (143) выполняется автоматически, благодаря (139,140) или, эквивалентно, (133,142).

Определим эффективное действие для BF_∞-теории точно так же, как мы определяли эффективное действие для абстрактной BF-теории в разделе 4.3. То есть, нам требуется коцепной комплекс (V', d), вложение $\iota : V' \to V$, являющееся квази-изоморфизмом, и ретракция $r : V \to V'$, которые предполагаются цепными отображениями (мы понимаем $d = l_{(1)}$ как дифференциал на V). Далее, нужна цепная гомотопия $K : V \to V$, стягивающая V на $\iota(V')$, и предполагается стандартный набор соотношений: $d\iota = \iota d$, $dr = rd$, $r\ \iota = \mathrm{id}_{V'}$, $K\iota = rK = 0$, $dK + Kd = \mathcal{P}''$, $K^2 = 0$. Данные индуцирования — тройка отображений (ι, r, K) определяют разложение Ходжа (102) для V и лагранжево подмногообразие $\mathcal{L}_K$ в пространстве ультрафиолетовых полей (104). Определим эффективное действие на инфракрасных полях $S' \in \mathrm{Fun}(\mathcal{F}')$ точно как в разделе 4.3, т.е. с помощью интеграла

$$e^{S'(\omega',p')/\hbar} = \int_{\mathcal{L}_K} e^{S(\iota(\omega')+\omega'',r^*(p')+p'')/\hbar}$$

$$= \frac{1}{N}\int \prod_I \mathcal{D}\omega''^I \prod_{\bar{I}} \mathcal{D}p''_{\bar{I}}\, \exp\frac{1}{\hbar}\left(\left\langle r^*(p')+p''_{\mathcal{L}}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}l_{(n)}(\iota(\omega')+\omega''_{\mathcal{L}},\ldots,\iota(\omega')+\omega''_{\mathcal{L}})\right\rangle + \right.$$

$$\left. +\hbar\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}q_{(n)}(\iota(\omega')+\omega''_{\mathcal{L}},\ldots,\iota(\omega')+\omega''_{\mathcal{L}})\right) \quad (144)$$

Для того, чтобы сформулировать пертурбативный результат для интеграла (144), нам потребуется естественное обобщение обозначений Iter, Loop для итерированных операций из раздела 4.3. Именно, пусть T есть планарное корневое дерево, не обязательно бинарное. Тогда для двух наборов полилинейных отображений $\lambda_n : X^{\otimes n} \to X$, $\tilde{\lambda}_n : X^{\otimes n} \to Y$, где $n \geq 1$, мы определяем отображение $\mathrm{Iter}_{T;\{\lambda_n\};\{\tilde{\lambda}_n\}} : X^{\otimes|T|} \to Y$ следующим образом: дерево раскрашивается элементами X, причём листья раскрашиваются входами Iter, на внутренних вершинах валентности $n+1$ вычисляется операция λ_n на детях, в корне вычислется операция $\tilde{\lambda}_n$ на детях, и выход Iter — это значение в корне. Точно также и следы итерированных операций Loop обобщаются на случай связных ориентированных однопетлевых графов (т.е. с одним циклом), внутренние вершины которых могут иметь любую валентность $n+1 \geq 2$, но для всех вершин требуется, чтобы было ровно одно исходящее ребро, и остальные n — входящие. Определяется отображение $\mathrm{Loop}_{L;\{\lambda_n\}} : X^{\otimes|L|} \to \mathbb{R}$ так же, как раньше: граф L разрезается по ребру цикла и превращается в корневое дерево T с отмеченным i-м листом, и мы полагаем

$$\mathrm{Loop}_{L;\{\lambda_n\}}(x_1,\ldots x_{|L|}) = \mathrm{Str}_X\, \mathrm{Iter}_{T;\{\lambda_n\};\{\lambda_n\}}(x_1,\ldots,x_{i-1},\bullet,x_i,\ldots,x_{|L|+1})$$

Например:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Iter}_{(*(**)*);\{\lambda_n\};\{\tilde{\lambda}_n\}}(x_1,x_2,x_3,x_4) &= \tilde{\lambda}_3(x_1,\lambda_2(x_2,x_3),x_4)\\
\mathrm{Loop}_{(*(*\bullet)*);\{\lambda_n\}}(x_1,x_2,x_3) &= \mathrm{Str}_X\, \lambda_3(x_1,\lambda_2(x_2,\bullet),x_3)
\end{aligned}$$

Под обозначениями $\mathbf{T}_{\mathrm{Pl}}$, $\mathbf{T}_{\mathrm{nonPl}}$, $\mathbf{L}_{\mathrm{Pl}}$, $\mathbf{L}_{\mathrm{nonPl}}$ мы теперь также будем понимать множества планарных/непланарных деревьев и однопетлевых ориентированных графов соответственно, где внутренним вершинам теперь разрешено иметь любую валентность ≥ 3, и лишь требуется, чтобы ровно одно ребро в каждой вершине было исходящим.

Теорема 6. *Эффективное действие для BF_∞-теории, ассоциированной с qL_∞-алгеброй (V,Q,μ), индуцированное на пространстве $\mathcal{F}' = T^*[-1](V'[1])$ с помощью интеграла (144), имеет вид*

$$S'(\omega',p') = S'^0(\omega',p') + \hbar S'^1(\omega')$$

где древесная часть раскладывается в сумму по непланарным корневым деревьям:

$$S'^0(\omega', p') = < p', d\omega' > + \sum_{T\in \mathbf{T}_{\mathrm{nonPl}}\colon |T|\geq 2} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(T)|} < p', \mathrm{Iter}_{T;\{-Kl_{(n)}\}_{n\geq 2};\{rl_{(n)}\}_{n\geq 2}}(\iota(\omega'),\ldots,\iota(\omega')) > \tag{145}$$

и однопетлевая часть раскладывается в следующую сумму по непланарным однопетлевым связным ориентированным графам и корневым деревьям:

$$S'^1(\omega') = -\sum_{L\in\mathbf{L}_{\mathrm{nonPl}}} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(L)|}\mathrm{Loop}_{L;\{-Kl_{(n)}\}_{n\geq 2}}(\iota(\omega'),\ldots,\iota(\omega'))+ \\ + \sum_{T\in \mathbf{T}_{\mathrm{nonPl}}\colon |T|\geq 1} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(T)|}\mathrm{Iter}_{T;\{-Kl_{(n)}\}_{n\geq 2};\{q_{(n)}\}_{n\geq 1}}(\iota(\omega'),\ldots,\iota(\omega')) \tag{146}$$

Эффективное действие S' удовлетворяет квантовому мастер-уравнению и задаёт на $\mathcal{F}'$ теорию типа BF_∞, ассоциированную с qL_∞-структурой на V', с классическими операциями, определяемыми как $l'_{(1)} = d$ и

$$l'_{(n)}(\omega',\ldots,\omega') = n! \sum_{T\in \mathbf{T}_{\mathrm{nonPl}}\colon |T|=n} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(T)|}\mathrm{Iter}_{T;\{-Kl_{(m)}\}_{m\geq 2};\{rl_{(m)}\}_{m\geq 2}}(\iota(\omega'),\ldots,\iota(\omega')) \tag{147}$$

при $n \geq 2$, и квантовыми операциями

$$q'_{(n)}(\omega',\ldots,\omega') = -n! \sum_{L\in\mathbf{L}_{\mathrm{nonPl}}\colon |L|=n} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(L)|}\mathrm{Loop}_{L;\{-Kl_{(m)}\}_{m\geq 2}}(\iota(\omega'),\ldots,\iota(\omega'))+ \\ + n! \sum_{T\in \mathbf{T}_{\mathrm{nonPl}}\colon |T|=n} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(T)|}\mathrm{Iter}_{T;\{-Kl_{(m)}\}_{m\geq 2};\{q_{(m)}\}_{m\geq 1}}(\iota(\omega'),\ldots,\iota(\omega')) \tag{148}$$

для $n \geq 1$.

Доказательство Вывод ряда теории возмущений для (144) совершенно аналогичен выводу из раздела 4.3 для эффективного действия для абстрактной BF-теории. Мы лишь должны включить в правила Фейнмана внутренние вершины всех валентностей $n+1 \geq 3$ с одним исходящим ребром (а также корневые вершины валентностей $n \geq 2$, без исходящих рёбер), соответсвующие классическим операциям $l_{(n)}$ на V или, эквивалентно, слагаемым порядка $O(p\,\omega^n)$ в исходном действии S на V. Также мы должны теперь включить корневые (т.е. без исходящих рёбер) вершины всех валентностей $n \geq 1$, соответствующие квантовым операциям $q_{(n)}$ на V или, эквивалентно, слагаемым порядка $O(\hbar\omega^n)$ в исходном действии. Последние порождают второе слагаемое в (146). Далее, то, что S' удовлетворяет квантовому мастер-уравнению, есть прямое следствие конструкции S' с помощью интеграла (144) и Утверждения 2. Поскольку эффективное действие S' вновь удовлетворяет анзатцу (143), мы интерпретируем его, как действие BF_∞ теории, ассоциированной со структурой qL_∞-алгебры на V', и выражения (147,148) для операций считываются непосредственно из суммы по фейнмановским диаграммам

(145,146). Уравнения (133,142) для $\{l'_{(n)}\}$, $\{q'_{(n)}\}$ выполняются автоматически, как следствие мастер-уравнения на S'.

□

Таким образом, мы можем понимать класс BF_∞-теорий, как замыкание класса абстрактных BF-теорий относительно операции индуцирования эффективного действия.

Определение 14. *Пусть (V,Q,μ) есть qL_∞-алгебра и $V' \overset{\iota}{\hookrightarrow} V$ — подкомплекс (гомотопный V), тогда структуру qL_∞-алгебры на V', определённую с помощью (147,148), мы называем индуцированной (с помощью данных индуцирования (ι, r, K)) qL_∞-структурой на V'.*

Утверждение 7. *Пусть (V,Q,μ) есть qL_∞-алгебра, $V_1 \overset{\iota_1}{\hookrightarrow} V$ — подкомплекс в V, (ι_1, r_1, K_1) — данные индуцирования с V на V_1, и пусть $V_2 \overset{\iota_2}{\hookrightarrow} V_1$ — подкомплекс в V_1, и (ι_2, r_2, K_2) — данные индуцирования с V_1 на V_2. Определим композицию данных индуцирования, как*

$$(\iota, r, K) = (\iota_2, r_2, K_2) \circ (\iota_1, r_1, K_1) := (\iota_1\iota_2, r_2 r_1, K_1 + \iota_1 K_2 r_1) \tag{149}$$

Тогда итерированное индуцирование эффективного действия на V_2 через V_1:

$$(\mathcal{F}, S) \overset{(\iota_1,r_1,K_1)}{\longrightarrow} (\mathcal{F}_1, S_1) \overset{(\iota_2,r_2,K_2)}{\longrightarrow} (\mathcal{F}_2, S_2)$$

даёт то же действие S_2 на V_2, что и прямое индуцирование из V, но с помощью композиции данных индуцирования:

$$(\mathcal{F}, S) \overset{(\iota_2,r_2,K_2)\circ(\iota_1,r_1,K_1)}{\longrightarrow} (\mathcal{F}_2, S_2)$$

Или, эквивалентно, на языке qL_∞-алгебр: итерированное индуцирование

$$(V,Q,\mu) \overset{(\iota_1,r_1,K_1)}{\longrightarrow} (V_1, Q_1, \mu_1) \overset{(\iota_2,r_2,K_2)}{\longrightarrow} (V_2, Q_2, \mu_2)$$

даёт ту же qL_∞ структуру на V_2, что и прямое индуцирование

$$(V,Q,\mu) \overset{(\iota_2,r_2,K_2)\circ(\iota_1,r_1,K_1)}{\longrightarrow} (V_2, Q_2, \mu_2)$$

Доказательство Проверим сначала, что (149) удовлетворяет условиям на данные индуцирования. В самом деле, очевидно, что $\iota_1\iota_2$ и $r_2 r_1$ — цепные отображения, далее $r\iota = r_2(r_1\iota_1)\iota_2 = \mathrm{id}_{V_2}$, $K\iota = (K_1 + \iota_1 K_2 r_1)\iota_1\iota_2 = (K_1\iota_1)\iota_2 + \iota_1(K_2\iota_2) = 0$, $rK = r_2 r_1(K_1 + \iota_1 K_2 r_1) = r_2(r_1 K_1) + (r_2 K_2) r_1 = 0$, $dK + Kd = d(K_1 + \iota_1 K_2 r_1) + (K_1 + \iota_1 K_2 r_1)d = (dK_1 + K_1 d) + \iota_1(dK_2 + K_2 d)r_1 = (\mathrm{id}_V - \iota_1 r_1) + \iota_1(\mathrm{id}_{V_1} - \iota_2 r_2)r_1 = \mathrm{id}_V - \iota r$, $K^2 = (K_1 + \iota_1 K_2 r_1)(K_1 + \iota_1 K_2 r_1) = K_1^2 + \iota_1 K_2^2 r_1 + \iota_1 K_2(r_1 K_1) + (K_1\iota_1)K_2 r_1 = 0$. Следовательно, (149) действительно есть законный набор данных индуцирования.

Введём следующие обозначения для ультрафиолетовых частей комплексов V, V_1: $V_1'' = \ker(r_1) \subset V$, $V_2'' = \ker(r_2) \subset V_1$, т.е. разложения V и V_1 на инфракрасную и ультрафиолетовую части имеют вид $V = \iota_1(V_1) \oplus V_1''$, $V_1 = \iota_2(V_2) \oplus V_2''$. Соответствующие разложения Ходжа, определяемые гомотопиями K_1, K_2 имеют вид $V = \iota_1(V_1) \oplus V''_{1,d-ex} \oplus V''_{1,K_1-ex}$ и $V_1 = \iota_2(V_2) \oplus V''_{2,d-ex} \oplus V''_{2,K_2-ex}$. В то же время, данные индуцирования (149) задают своё разложение V на инфракрасную и ультрафиолетовую часть: $V = \iota(V_2) \oplus V''_{12}$, где $V''_{12} = \ker(r) = V_1'' \oplus \iota_1(V_2'') \subset V$. Соответственно, разложение Ходжа имеет вид $V = \iota(V_2) \oplus V''_{12,d-ex} \oplus V''_{12,K-ex}$, где $V''_{12,d-ex} = V''_{1,d-ex} \oplus \iota_1(V''_{2,d-ex})$ и $V''_{12,K-ex} = V''_{1,K_1-ex} \oplus \iota_1(V''_{2,K_2-ex})$.

Согласно определению эффективного действия (144), экспонента эффективного действия на V_1 есть

$$e^{S_1(\omega_1,p_1)/\hbar} = \int_{\mathcal{L}_{K_1} \subset \mathcal{F}_1''} e^{S(\iota_1(\omega_1)+\omega_1'', r_1^*(p_1)+p_1'')/\hbar} \tag{150}$$

где $\mathcal{L}_{K_1} = N^*[-1](V''_{1,K_1-ex}[1]) \subset \mathcal{F}_1'' = T^*[-1](V_1''[1])$. Итерируя процедуру, для экспоненты эффективного действия, индуцированного на V_2 из (150), имеем

$$\begin{aligned} e^{S_2(\omega_2,p_2)/\hbar} &= \int_{\mathcal{L}_{K_2} \subset \mathcal{F}_2''} e^{S_1(\iota_2(\omega_2)+\omega_2'', r_2^*(p_2)+p_2'')/\hbar} \\ &= \int_{\mathcal{L}_{K_2} \subset \mathcal{F}_2''} \int_{\mathcal{L}_{K_1} \subset \mathcal{F}_1''} e^{S(\iota_1(\iota_2(\omega_2)+\omega_2'')+\omega_1'', r_1^*(r_2^*(p_2)+p_2'')+p_1'')/\hbar} \\ &= \int_{\mathcal{L}_{K_1} \oplus \hat{\iota}_1(\mathcal{L}_{K_2})} e^{S(\iota(\omega_2)+\omega_{12}'', r^*(p_2)+p_{12}'')/\hbar} \end{aligned} \tag{151}$$

где $\mathcal{L}_{K_2} = N^*[-1](V''_{2,K_2-ex}[1]) \subset \mathcal{F}_2'' = T^*[-1](V_2''[1])$ и мы использовали обозначение $\hat{\iota}_1 = \iota_1 \oplus r_1^* : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}$. Заметим, что $\mathcal{L}_{K_1} \oplus \hat{\iota}_1(\mathcal{L}_{K_2}) = N^*[-1](V''_{12,K-ex})$, и, тем самым, мы пришли в точности к выражению, определяющему эффективное действие на V_2 с помощью данных индуцирования (149). $\square$

4.5.1. *Эквивалентность qL_∞-алгебр.* Говоря о канонических преобразованиях действия BF_∞-теории, мы хотим рассматривать не все, а "специальные" канонические преобразования, деформирующие действие внутри класса BF_∞-действий, т.е. не нарушающие анзатц (143).

Определение 15. *Инфинитезимальным специальным каноническим преобразованием для BF_∞-действия S на $\mathcal{F} = T^*[-1](V[1])$ мы называем инфинитезимальное каноническое преобразование $S \mapsto S + \{S, R\} + \hbar\Delta R$ с генератором вида*

$$R = < p, v(\omega)\omega > + \hbar\chi(\omega) \tag{152}$$

где $v(\omega) \in \mathrm{Vect}(V[1])$ есть векторное поле на $V[1]$ с духовым числом $\mathrm{gh}(v) = 0$, и $\chi(\omega) \in \mathrm{Fun}(V[1])$ есть функция на $V[1]$ с духовым числом $\mathrm{gh}(\chi) = -1$. Соответственно, инфинитезимальным каноническим преобразованием (или инфинитезимальной гомотопией) qL_∞-алгебры (V, Q, μ) мы называем инфинитезимальное преобразование когомологического векторного поля и плотности меры вида

$$Q \mapsto Q + [Q, v] \tag{153}$$

$$\rho \mapsto \rho \cdot (1 + \mathrm{div}_\rho v + Q\chi) \tag{154}$$

где под скобкой понимается обычная скобка Ли векторных полей.

То, что для всякого данного BF_∞-действия S любое инфинитезимальное каноническое преобразование, оставляющее его в классе BF_∞-действий, обязано иметь генератор вида (152), вытекает из тривиального подсчёта степеней p и $\hbar$ в формуле канонического преобразования $S \to S + \{S, R\} + \hbar \Delta R$. Мы также можем дать определение проинтегрированных (конечных) специальных канонических преобразований.

Определение 16. *Конечным специальным каноническим преобразованием для BF_∞-действия $S = -< p, Q\omega > +\hbar \log \rho$ на $\mathcal{F} = T^*[-1](V[1])$ мы называем каноническое преобразование вида*

$$S \mapsto \tilde{S} = -< p, U^* Q (U^*)^{-1} \omega > +\hbar (U^* \log \rho + \log \mathrm{Jac}(U) + U^* Q \chi) \tag{155}$$

где $U : V[1] \to V[1]$ — диффеоморфизм, обладающий духовым числом 0, т.е. такой, что обратный образ $U^* : \mathrm{Fun}(V[1]) \to \mathrm{Fun}(V[1])$ сохраняет градуировку, и $\chi \in \mathrm{Fun}(V[1])$ — функция на $V[1]$ с духовым числом -1. Эквивалентно, на языке qL_∞-алгебр мы называем пару (U, χ) гомотопией между двумя qL_∞-структурами (Q, μ) и $(\tilde{Q}, \tilde{\mu})$ на V, если

$$\tilde{Q} = U^* Q (U^*)^{-1} \tag{156}$$

$$\tilde{\mu} = U^*(\mu \cdot e^{Q\chi}) \tag{157}$$

где обратный образ U^* в (157) действует как на меру (не как на функцию).

Очевидно, определение 15 получается из этого подстановкой $U^* = \mathrm{id}_{\mathrm{Fun}(V[1])} + v$, где v — инфинитезимальное векторное поле.

Утверждение 8. *Пусть S есть BF_∞-действие на V и S' — эффективное действие для него на V', индуцированное с помощью данных (ι, r, K). Пусть также $\tilde{S}$ — действие, отличающееся от S на инфинитезимальное специальное каноническое преобразование.*

Тогда эффективное действие $\tilde{S}'$ на V', построенное с помощью тех же данных индуцирования (ι, r, K), отличается от S' на инфинитезимальное специальное каноническое преобразование.

Доказательство Очевидно, поскольку при инфинитезимальном преобразовании $S \mapsto \tilde{S}$ в классе BF_∞-действий, эффективное действие также преобразуется в классе BF_∞-действий, поэтому $\tilde{S}'$ обязано отличаться от S' на инфинитезимальное специальное каноническое преобразование. □

Утверждение 9. *Пусть S есть BF_∞-действие на V, и пусть S'_1 и S'_2 — два эффективных действия для него на V', индуцированные с помощью данных (ι_1, r_1, K_1) и (ι_2, r_2, K_2) соответственно. Тогда S'_1 и S'_2 отличаются на специальное каноническое преобразование.*

Для доказательства нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть (V, d) и (V', d) — два гомотопных комплекса. Тогда конфигурационное пространство данных индуцирования (ι, r, K) с V на V' (т.е. троек вложение-ретракция-цепная гомотопия) является расслоением над конфигурационным пространством разложений Ходжа $\{V = W \oplus V''_{d-ex} \oplus V''_{K-ex} :\ W \sim V'\}$, со слоем — конфигурационным пространством автоморфизмов V' (как коцепного комплекса) $\{(\lambda, \lambda^{-1}, 0)\} \sim$* $\mathrm{Aut}(V')$. *База этого расслоения связна.*

Доказательство леммы. Если задана тройка (ι, r, K), то по ней определяется разложение Ходжа $V = W \oplus V''_{d-ex} \oplus V''_{K-ex}$, где $W = \iota(V')$, $V''_{d-ex} = \ker(r) \cap \mathrm{im}(d)$, $V''_{K-ex} = \ker(r) \cap \mathrm{im}(K)$. В обратную сторону: если задано разложение Ходжа для V и задано вложение $\iota : V' \to W \subset V$, то ретракция восстанавливается как $r = \iota^{-1}\mathcal{P}_W$ (справа стоит проектор на первое слагаемое в разложении Ходжа), и цепная гомотопия восстанавливается как $K = (d|_{V''_{K-ex} \to V''_{d-ex}})^{-1}$, т.е. как обратное отображение к дифференциалу $V''_{K-ex} \xrightarrow{d} V''_{d-ex}$. Таким образом, пространство троек (ι, r, K) является главным расслоением над пространством разложений Ходжа для V со слоем (и структурной группой) — пространством $\mathrm{Aut}(V')$ цепных автоморфизмов V':

$$\mathrm{Aut}(V') \circlearrowright \{(\iota, r, K)\} \to \{V = W \oplus V''_{d-ex} \oplus V''_{K-ex} :\ W \sim V'\}$$

Актоморфизмы $\lambda \in \mathrm{Aut}(V')$ действуют на $\{(\iota, r, K)\}$ как

$$(\iota, r, K) \mapsto (\lambda, \lambda^{-1}, 0) \circ (\iota, r, K) = (\iota\lambda, \lambda^{-1} r, K)$$

Рассмотрим случай, когда дифференциал на V' равен нулю, т.е. $V' = H^\bullet(V)$ — когомологии V. В разложении Ходжа $V''_{d-ex} = \mathrm{im}(d) = d(V)$ и $W \oplus V''_{d-ex} = \ker(d)$ фиксированы самой структурой комплекса на V. Фиксируем какое-нибудь линейное подпространство $W_0 \subset \ker(d)$, такое что $\ker(d) = W_0 \oplus \mathrm{im}(d)$ и $W_0 \cap \mathrm{im}(d) = \{0\}$. Тогда общее W, удовлетворяющее этим условиям, получается из W_0, как график $W = \mathrm{graph}(\alpha)$ линейного, сохраняющего градуировку, отображения $\alpha \in \mathrm{Hom}^0(W_0 \to \mathrm{im}(d))$. Теперь пусть W фиксировано. Выберем какое-нибудь линейное подпространство $V''_{K-ex,0} \subset V$, удовлетворяющее $V = \ker(d) \oplus V''_{K-ex,0}$ и $V''_{K-ex,0} \cap \ker(d) = \{0\}$. Тогда общее V''_{K-ex}, удовлетворяющее этим условиям, имеет вид $V''_{K-ex} = \mathrm{graph}(\beta)$, где $\beta \in \mathrm{Hom}^0(V''_{K-ex,0} \to \ker(d))$. Следовательно, пространство разложений Ходжа $\{V = W \oplus V''_{d-ex} \oplus V''_{K-ex} : \ W \sim V'\}$ есть расслоение над $\mathrm{Hom}^0(W_0 \to \mathrm{im}(d))$ со слоем $\mathrm{Hom}^0(V''_{K-ex,0} \to \ker(d))$ (т.е. и база и слой — векторные пространства) и поэтому связно, и даже стягиваемо. Тем самым, для случая $V' = H^\bullet(V)$ лемма доказана. Также заметим, что это пространство не пусто, поскольку когомологии всегда можно вложить в V как W_0, и всегда можно выбрать дополнение $V''_{K-ex,0}$ к $\ker(d)$ в V.

Теперь перейдём к общему случаю: V' произвольный комплекс, гомотопный V. Выберем какой-нибудь набор данных индуцирования (ι_1, r_1, K_1) с V' на когомологии $H^\bullet(V)$. Тем самым, есть разложение $V' = \iota_1(H(V)) \oplus \tilde{V}''_{d-ex} \oplus \tilde{V}''_{K_1-ex}$. Тогда для общего разложения Ходжа для V: $V = \iota(V') \oplus V''_{d-ex} \oplus V''_{K-ex}$, порождённого тройкой (ι, r, K), имеем

$$\iota(\iota_1(H(V))) \oplus \mathrm{im}(d) = \ker(d) \subset V \tag{158}$$

$$\iota(\tilde{V}''_{d-ex}) \oplus V''_{d-ex} = \mathrm{im}(d) \subset V \tag{159}$$

$$\iota(\tilde{V}''_{K-ex}) \oplus V''_{K-ex} \oplus \ker(d) = V \tag{160}$$

Пользуясь предыдущими аргументами, отсюда получаем: пространство образов вложений, суженных на когомологии, есть $\{\iota(\iota_1(H(V)))\} = \mathrm{Hom}^0(\iota_0(\iota_1(H(V))) \to \mathrm{im}(d))$, где $\iota_0 : V' \to V$ — какое-нибудь вложение. Далее, пространство образов вложений, суженных на точную часть V', есть грассманиан $\{\iota(\tilde{V}''_{d-ex})\} = \mathrm{Gr}(\mathrm{im}(d), \tilde{V}''_{d-ex}) = \prod_n \mathrm{Gr}((\mathrm{im}(d))^n, (\tilde{V}''_{d-ex})^n)$. Пространство $\{V''_{d-ex}\}$ при фиксированном $\iota(\tilde{V}''_{d-ex})$ есть $\mathrm{Hom}^0(V''_{d-ex,0} \to \iota(\tilde{V}''_{d-ex}))$ для какого-нибудь $V''_{d-ex,0}$, удовлетворяющего (159). Далее, выберем какое-нибудь подпространство $U_0 \subset V$ такое, что $U_0 \oplus \ker(d) = V$. Произвольное дополнение к $\ker(d)$ в V имеет вид $U = \mathrm{graph}(\beta)$, где $\beta \in \mathrm{Hom}^0(U_0 \to \ker(d))$. При заданном U пространство образов вложений, суженных на K_1-точную часть V', есть $\{\iota(\tilde{V}''_{K_1-ex})\} = \mathrm{Gr}(U, \tilde{V}''_{K_1-ex})$; для пространства $\{V''_{K-ex}\}$ при фиксированных U, $\iota(\tilde{V}''_{K_1-ex})$ имеем $\{V''_{K-ex}\} = \mathrm{Hom}^0(V''_{K-ex,0} \to \iota(\tilde{V}''_{K_1-ex}))$ для как-нибудь выбранного дополнения $V''_{K-ex,0}$ к $\iota(\tilde{V}''_{K_1-ex})$ в U. Итак, мы показали, что конфигурационное пространство разложений Ходжа гомотопно некоторому векторному расслоению над произведением грассманианов

$$\mathrm{Gr}(\mathrm{im}(d), \tilde{V}''_{d-ex}) \times \mathrm{Gr}(U_0, \tilde{V}''_{K_1-ex})$$

и, в частности, стягиваемо.

□

Доказательство Утверждения 9. Для инфинитезимальной замены данных индуцирования $(\iota_1, r_1, K_1) \mapsto (\iota_2, r_2, K_2)$ буквально применимо Утверждение 6, поскольку в нём нигде не использована специфика абстрактной BF-теории (по сравнению с BF_∞). Поэтому S'_1 и S'_2 отличаются на инфинитезимальное каноническое преобразование. С другой стороны, оба эффективных действия являются BF_∞-действиями, и поэтому это каноническое преобразование — специальное.

Теперь рассмотрим случай конечных специальных канонических преобразований $(\iota_1, r_1, K_1) \mapsto (\iota_2, r_2, K_2)$. Согласно Лемме, такое преобразование можно представить в виде композиции

$$(\iota_1, r_1, K_1) \mapsto (\tilde{\iota}_2, \tilde{r}_2, \tilde{K}_2) \mapsto (\lambda, \lambda^{-1}, 0) \circ (\tilde{\iota}_2, \tilde{r}_2, \tilde{K}_2) = (\iota_2, r_2, K_2)$$

где (ι_1, r_1, K_1) и $(\tilde{\iota}_2, \tilde{r}_2, \tilde{K}_2)$ находятся в одной компоненте связности конфигурационного пространства данных индуцирования. Для преобразования $(\iota_1, r_1, K_1) \mapsto (\tilde{\iota}_2, \tilde{r}_2, \tilde{K}_2)$ соответствующие эффективные действия отличаются на специальное каноническое преобразование, как следствие уже рассмотренного инфинитезимального случая. Следовательно, мы должны только рассмотреть преобразования данных индуцирования вида $(\iota_1, r_1, K_1) \mapsto (\lambda, \lambda^{-1}, 0) \circ (\iota_1, r_1, K_1) = (\iota_2, r_2, K_2)$. Как влияют такие преобразования (автоморфизмы V') на эффективное действие, видно прямо из определения (144): $S'_2 = \hat{\lambda}^* S'_1$, где $\hat{\lambda} = \lambda \oplus (\lambda^*)^{-1}$. Согласно Определению 16, это — конечное специальное каноническое преобразование на V' с $(U, \chi) = (\lambda, 0)$.

□

Определение 17. *Мы называем две qL_∞-алгебры (V_1, Q_1, μ_1) и (V_2, Q_2, μ_2) эквивалентными (гомотопными), если их когомологии (когомологии дифференциала $d = l_{(1)}$) изоморфны $H^\bullet(V_1) = H^\bullet(V_2)$, и индуцированные на когомологиях qL_∞-структуры $(H^\bullet(V), Q'_1, \mu'_1)$ и $(H^\bullet(V), Q'_2, \mu'_2)$ переводятся друг в друга гомотопией (специальным каноническим преобразованием) (U, χ).*

Согласно Утверждению 9, это определение не зависит от выбора данных индуцирования для обеих qL_∞ алгебр на когомологии. Также, согласно Утверждению 8, две qL_∞-структуры на пространстве V, связанные инфинитезимальным специальным каноническим преобразованием, гомотопны. Кроме того, qL_∞-алгебра (V, Q, μ) и любая индуцированная для неё (V', Q', μ') гомотопны (как следствие Утверждения 7).

Две BF_∞-теории, соответствующие двум гомотопным qL_∞-алгебрам, мы полагаем эквивалентными.

Примечание. Представленное здесь изложение понятия гомотопии qL_∞-алгебр обладает следующими двумя недостатками. Во-первых, наше понимание переноса канонического преобразования на подкомплекс основано на Утверждении 3 и явной формуле (90) для переноса инфинитезимального канонического преобразования. Поэтому, Утверждение 8 сформулировано для инфинитезимальных специальных канонических преобразований, и естественно обобщается на связную компоненту единицы в конфигурационном пространстве конечных специальных канонических преобразований, но не на другие компоненты связности — для такого обобщения нам бы потребовалось описание переноса канонического преобразования в конечных (не инфинитезимальных) терминах. Поэтому, в частности, мы не можем гарантировать, что две qL_∞-структуры на пространстве V, связанные конечным специальным каноническим преобразованием (U, χ), обязательно гомотопны.

Во-вторых, для обычных L_∞-алгебр существует понятие L_∞-морфизма. Именно, L_∞-морфизмом между L_∞-алгебрами (V_1, Q_1) и (V_2, Q_2) называется (нелинейное) отображение $U : V_1[1] \to V_2[1]$ степени 0, такое что $Q_1 U^* = U^* Q_2$. Две L_∞-алгебры называются гомотопными, если между ними есть L_∞-квази-изоморфизм, т.е. дополнительно требуется, чтобы линейная часть U индуцировала изоморфизм на когомологиях $H^\bullet(V_1) \cong H^\bullet(V_2)$. Для случая qL_∞-алгебр мы смогли лишь дать определение обратимого qL_∞-морфизма (или qL_∞-автоморфизма) — специального канонического преобразования (Определение 16), которое обладает намного меньшей общностью (в частности, сохраняет размерность). Мы бы хотели понять индуцирование qL_∞-алгебры, как другой пример qL_∞-квази-изоморфизма, и на этом основано наше определение гомотопии для qL_∞-алгебр (Определение 17). Однако, мы не знаем, как дать общее определение qL_∞-морфизма, обобщающее эти частные случаи — qL_∞-автоморфизм и индуцирование.

4.5.2. *Интерпретация эффективного действия через L_∞-морфизм и кручение.*

Утверждение 10. *Пусть есть BF_∞-теория с действием S, ассоциированная с qL_∞-алгеброй (V, Q, μ), и эффективная теория для неё с действием S', ассоциированная с индуцированной qL_∞-алгеброй (V', Q', μ'), и пусть (ι, r, K) — соответствующие данные индуцирования. Зададим нелинейное отображение $U : V'[1] \to V[1]$ с помощью обратного образа на соответствующих алгебрах функций $U^* : \mathrm{Fun}(V[1]) \to \mathrm{Fun}(V'[1])$, который мы определяем как*

$$f(\omega) \mapsto U^*(f)(\omega') = e^{-S'(\omega', p')/\hbar} \int_{\mathcal{L}_K} e^{S(\iota(\omega') + \omega'', r^*(p') + p'')/\hbar} f(\omega) \tag{161}$$

Тогда U имеет следующее пертурбативное разложение:

$$U(\omega') = \iota(\omega') + \sum_{T\in\mathbf{T}_{\mathrm{nonPl}}\colon |T|\geq 2} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(T)|}\mathrm{Iter}_{T;\{-Kl_{(n)}\}_{n\geq 2};\{-Kl_{(n)}\}_{n\geq 2}}(\iota(\omega'),\ldots,\iota(\omega')) \quad (162)$$

и является L_∞-квази-изоморфизмом между L_∞-алгебрами (V,Q) и (V',Q'), т.е. выполнено

$$U^*Q = Q'U^* \quad (163)$$

и кроме того линейная часть U задаёт изоморфизм между когомологиями V и V'.

Доказательство. Во-первых, надо проверить, почему U^*, задаваемое формулой (161), есть гомоморфизм, т.е. $U^*(fg) = U^*(f)U^*(g)$ (и это значит, что U^* действительно есть обратный образ для некоторого отображения $U : V'[1] \to V[1]$). Это непосредственно вытекает из того, что поле ω не взаимодействует само с собой, т.е. не существует связных фейнмановских диаграмм, содержащих более одной исходящей 1-валентной вершины (эти вершины соответствуют вставкам ω под интегралом), и все остальные вершины порождены действием S. Далее, проверим условие L_∞-морфизма (163). Для этого применим БВ-лапласиан Δ' к интегралу $\int_{\mathcal{L}_K} e^{S/\hbar}f = e^{S'/\hbar}U^*(f)$. С одной стороны, имеем

$$\begin{aligned}\Delta'(e^{S'/\hbar}U^*(f)) &= \Delta'(e^{S'/\hbar})U^*(f) + \{e^{S'/\hbar}, U^*(f)\} + e^{S'/\hbar}\Delta'(U^*(f)) \\ &= 0 + \frac{1}{\hbar}e^{S'/\hbar}\{S', U^*(f)\} + 0 = \frac{1}{\hbar}e^{S'/\hbar}Q'U^*(f) \quad (164)\end{aligned}$$

С другой стороны

$$\begin{aligned}\Delta'\int_{\mathcal{L}_K} e^{S/\hbar}f &= \int_{\mathcal{L}_K}(\Delta - \Delta'')(e^{S/\hbar}f) = \int_{\mathcal{L}_K}\Delta(e^{S/\hbar}f) \\ &= \frac{1}{\hbar}\int_{\mathcal{L}_K} e^{S/\hbar}\{S,f\} = \frac{1}{\hbar}\int_{\mathcal{L}_K} e^{S/\hbar}Qf = \frac{1}{\hbar}e^{S'/\hbar}U^*(Qf) \quad (165)\end{aligned}$$

Тем самым, U в самом деле есть L_∞-морфизм. То, что это квази-изоморфизм, видно из того, что линейная часть U есть вложение ι. Пертурбативное разложение (162) получается из непосредственного рассмотрения фейнмановских диаграмм для интеграла (161). □

В формуле (162) выражение $U(\omega')$ выглядит несколько двусмысленно. Мы его понимаем, как определённое через $U^*(f)(\omega') = f(U(\omega'))$, и поэтому $U(\omega') = U^*(\omega)$, также как $\iota(\omega') = \iota^*(\omega)$, где мы имеем ввиду, что ι действует на e'_i в разложении по базису $\omega' = e'_i\omega'^i$, в то время как ι^* действует на ω^i в $\omega = e_i\omega^i$. Можно также интерпретировать $U(\omega')$ через компоненты L_∞-морфизма — антисимметричные полилинейные отображения $U_{(n)} : \Lambda^n V' \to V$, которые вводятся аналогично классическим операциям $l_{(n)}$ через тэйлоровское разложение Q. Именно, структурные константы компонент $U_{(n)}$ определяются из

$$U(\omega') = e_i U^*(\omega^i) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} e_i U^i_{(n)}(e'_{j_1}, \ldots, e'_{j_n}) \omega'^{j_1} \cdots \omega'^{j_n} \epsilon(j_1, \ldots, j_n)$$

где знак ϵ определяется с помощью (129). Поэтому $U(\omega')$ интерпретируется либо как U^*, действующее на координаты ω^i на $V[1]$, либо с помощью компонент $U_{(n)}$, действующих на векторы $e'_j \in V'$.

Сравнивая (162) с (145), заметим, что можно написать

$$S'^0(\omega', p') = < p', \sum_{n=1}^{\infty} r \circ \frac{1}{n!} l_{(n)}(U(\omega'), \ldots, U(\omega')) > = S^0(U(\omega'), r^*(p'))$$

т.е. значение древесной части эффективного действия в любой точке $\mathcal{F}'$ даётся значением исходного действия, в точке, сдвинутой вдоль $\mathcal{L}_K$ специальным образом (и этот сдвиг как раз и даётся L_∞-морфизмом): $\omega' \mapsto \omega = U(\omega') = \iota(\omega') + K(\cdots)$, $p' \mapsto r^*(p')$.

Утверждение 11. *Эффективное действие BF_∞-теории, определённое с помощью (144) может быть представлено в следующем виде:*

$$S'(\omega', p') = S^0(U(\omega'), r^*(p')) + \hbar S^1(U(\omega')) + \hbar \mathrm{Str}_V \log(1 + K \circ I(U(\omega'))) \tag{166}$$

где линейный, зависящий от ω оператор $I(\omega) \in \mathrm{Fun}(V[1]) \otimes \mathrm{End}(V)$ определяется как

$$I(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} l_{(n+1)}(\omega, \ldots, \omega, \bullet) \tag{167}$$

где U есть L_∞-морфизм (162).

Доказательство. То, что $S^0(U(\omega'), r^*(p'))$ и $S^1(U(\omega'))$ совпадают с (145) и второй суммой (по деревьям) в (146), вытекает непосредственно из формулы (162) для U. Поэтому нам остаётся доказать, что $\mathrm{Str}_V \log(1 + KI(U(\omega')))$ совпадает с первой суммой в (146). В самом деле,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Str}_V \log(1 + KI(U(\omega'))) &= -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \mathrm{Str}_V (-KI(U(\omega')))^m \\
= -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \mathrm{Str}_V & \left(\sum_{T \in \mathbf{T}_{\mathrm{Pl}}:\, |T| \geq 1} \mathrm{Iter}_{T; \{-\frac{1}{n!} K l_{(n)}\}_{n \geq 2}; \{-\frac{1}{n!} K l_{(n+1)}(*, \cdots, *, \bullet)\}_{n \geq 1}} (\iota(\omega'), \ldots, \iota(\omega')) \right)^m \\
&= -\sum_{L \in \mathbf{L}_{\mathrm{Pl}}} \frac{1}{[L]} \mathrm{Loop}_{L; \{-\frac{1}{n!} K l_{(n)}\}_{n \geq 2}} (\iota(\omega'), \ldots, \iota(\omega')) \\
&= -\sum_{L \in \mathbf{L}_{\mathrm{nonPl}}} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(L)|} \mathrm{Loop}_{L; \{-K l_{(n)}\}_{n \geq 2}} (\iota(\omega'), \ldots, \iota(\omega'))
\end{aligned} \tag{168}$$

где мы перешли к сумме по планарным графам, для удобства обращения с симметрийными коэффициентами, и обозначили $[L]$ длину цикла в L; $\mathbf{L}_{\mathrm{Pl}}$ следует понимать как множество однопетлевых планарных графов, с одним отмеченным ребром на цикле.

□

Выражение (166) для эффективного действия можно также понять следующим образом. Введём функцию $\tau \in \mathrm{Fun}(V'[1])$ как

$$\tau(\omega') = \det_V(1 + KI(U(\omega'))) \tag{169}$$

где имеется ввиду супер-детерминант: $\det_V(1+KI(U(\omega'))) := \exp\left(\mathrm{Str}_V \log(1 + KI(U(\omega')))\right)$. Функция τ зависит от данных индуцирования (ι, r, K), и может быть понята, как фиксация калибровки для плохо определённого выражения $\det_V(d + I(U(\omega')))$ (детерминанта гессиана действия $\frac{\partial}{\partial\omega''_{\mathcal{L}}}\frac{\partial}{\partial p''_{\mathcal{L}}} S|_{\mathcal{L}_K}$ в стационарной точке на $\mathcal{L}_K$). Поэтому мы называем τ "кручением", по аналогии с кручением Рэя-Зингера. В некотором смысле τ играет роль якобиана L_∞-морфизма (ср. с определением конечного специального канонического преобразования (155)). Итак, в терминах L_∞-морфизма U и кручения τ, эффективное действие записывается как

$$S'(\omega', p') = S(U(\omega'), r^*(p')) + \hbar \log \tau(\omega')$$

5. Эффективная BF-теория на симплициальном комплексе

Мы хотим применить конструкцию эффективного действия, объяснённую в разделе 4, к ситуации индуцирования для абстрактной BF-теории, ассоциированной с дифференциальной градуированной алгеброй Ли $\mathfrak{g}$-значных дифференциальных форм на многообразии $V = \Omega^\bullet(M, \mathfrak{g})$ (т.е. для топологической BF-теории на многообразии M) на подкомплекс $V' = C^\bullet(\Xi, \mathfrak{g}) \hookrightarrow V$ $\mathfrak{g}$-значных клеточных коцепей симплициального комплекса Ξ (триангуляции многообразия M). При этом многообразие M предполагается компактным многообразием с углами, не обязательно ориентируемым, и мы предполагаем, что $\mathfrak{g}$ есть алгебра Ли компактной конечномерной группы Ли G (калибровочной группы). Первая задача состоит в том, чтобы предъявить набор данных индуцирования (ι, r, K), т.е. вложение $\iota : C^\bullet(\Xi, \mathfrak{g}) \to \Omega^\bullet(M, \mathfrak{g})$, ретракцию $r : \Omega^\bullet(M, \mathfrak{g}) \to C^\bullet(\Xi, \mathfrak{g})$ и цепную гомотопию $K : \Omega^\bullet(M, \mathfrak{g}) \to \Omega^{\bullet-1}(M, \mathfrak{g})$. Предлагается использовать в качестве ι вложение клеточных коцепей на Ξ с помощью форм Уитни [29], в качестве ретракции r — интегрирование дифференциальной формы по симплексам Ξ, и в качестве K — явную цепную гомотопию Дюпона [14], стягивающую дифференциальные формы на формы Уитни. В изложении этих конструкций, мы используем работу [15].

В разделах 5.1,5.2 мы излагаем конструкцию форм Уитни и оператора Дюпона на стандартном симплексе и строим данные индуцирования для симплициального комплекса $\Omega^\bullet(M, \mathfrak{g}) \xrightarrow{(\iota_\Xi, r_\Xi, K_\Xi)} C^\bullet(\Xi, \mathfrak{g})$.

В разделе 5.3 мы вводим понятие симплициального BF-действия S_Ξ — эффективного действия для топологической BF-теории на многообразии M, индуцированного на клеточных коцепях триангуляции Ξ с помощью данных индуцирования $(\iota_\Xi, r_\Xi, K_\Xi)$. Также мы обсуждаем важнейшее свойство симплициального действия — его симплициальную локальность (Теорема 7). Именно, S_Ξ представляется в виде суммы вкладов ("укороченных действий") для отдельных симплексов Ξ. Эти вклады находятся из решения задачи индуцирования для одного стандартного симплекса (в каждой размерности $D \geq 0$).

В разделе 5.4 предлагается абстрактная конструкция склейки для qL_∞-алгебр и доказывается согласованность операции склейки с операцией индуцирования (раздел 5.4.2). Эта конструкция в некотором смысле проясняет результат о симплициальной локальности симплициального действия на триангуляции с более общих позиций.

В разделе 5.5 мы явно вычисляем укороченное действие для 1-симплекса (Теорема 8). Явная проверка мастер-уравнения для симплициального действия для 1-симплекса (раздел 5.5.1) сводится к нетривиальному квадратичному тождеству для чисел Бернулли (272). Это тождество, разумеется, может быть получено и более непосредственно [2]. Также из явной проверки квантовой части мастер-уравнения мы видим, что однопетлевая часть ответа для 1-симплекса полностью восстанавливается из древесной с помощью мастер-уравнения. Классическая часть индуцированной qL_∞-структуры на клеточных коцепях отрезка (раздел 5.5.2), производимая древесной частью симплициального действия для 1-симплекса, является известным результатом (см. [12], [21]).

В разделе 5.6 мы обращаемся к задаче вычисления укороченного действия для симплекса общей размерности. Здесь мы не можем предъявить явного ответа и лишь предъявляем пертурбативный результат, т.е. вычисляем вклады нескольких первых фейнмановских диаграмм (Теорема 9). Используемая нами техника позволяет вычислять значения древесных диаграмм для симплекса произвольной размерности. Однако значения однопетлевых диаграмм мы можем лишь частично восстанавливать, пользуясь соображениями симметрии и древесным результатом в сочетании с мастер-уравнением. В разделе 5.6.1 мы демонстрируем явное вычисление простейшей нетривиальной однопетлевой диаграммы для 2-симплекса, причём конечный ответ оказывается согласованным с предсказанием, сделанным на основе древесного ответа и мастер-уравнения.

5.1. **Формы Уитни.** Пусть $\Delta^n = [0 \cdots n]$ есть стандартный n-симплекс, с вершинами, занумерованными целыми числами от 0 до n, и барицентрическими координатами

$(t_0, \dots, t_n)$, где $t_0 + \dots + t_n = 1$ и $t_i \geq 0$ для любого i. Введём набор линейных дифференциальных форм

$$\chi_{i_0 \cdots i_k} = k! \sum_{r=0}^{k} (-1)^r t_{i_r} dt_{i_0} \wedge \cdots \widehat{dt_{i_r}} \cdots \wedge dt_{i_k} \in \Omega^k(\Delta^n) \tag{170}$$

для любой последовательности $i_0, \dots, i_k$ вершин симплекса Δ^n, и шляпка означает исключение. Для форм $\chi_{i_0 \cdots i_k}$ выполняются следующие свойства.

- Согласованность с перестановками вершин:

$$\chi_{i_{\pi(0)} \cdots i_{\pi(k)}} = (-1)^\pi \chi_{i_0 \cdots i_k} \tag{171}$$

  для любой перестановки $\pi \in S_k$. Поэтому форму $\chi_{i_0 \cdots i_k} = \chi_\sigma$ можно считать соответствующей ориентированному симплексу $\sigma = [i_0 \cdots i_k]$, k-грани Δ^n.

- Сужение формы χ_σ на σ даёт стандартную форму объёма на σ:

$$(\chi_\sigma)|_\sigma = k! dt_{i_1} \wedge \cdots \wedge dt_{i_k}$$

  Поэтому, в частности, интеграл χ_σ по самой грани σ

$$\int_\sigma \chi_\sigma = 1 \tag{172}$$

- Если σ, σ' — две грани Δ^n и σ не содержится в σ', то сужение

$$(\chi_\sigma)|_{\sigma'} = 0 \tag{173}$$

  В частности, поэтому для любой грани $\sigma' \neq \sigma$

$$\int_{\sigma'} \chi_\sigma = 0 \tag{174}$$

- Дифференциал де Рама действует на формы χ как

$$d\chi_{i_0 \cdots i_k} = \sum_i \chi_{i i_0 \cdots i_k} \tag{175}$$

Линейная оболочка форм χ_σ образует подкомплекс $\Omega^\bullet_W(\Delta^n) \subset \Omega^\bullet(\Delta^n)$ в алгебре дифференциальных форм на Δ^n. Комплекс $\Omega^\bullet_W(\Delta^n)$ называется комплексом Уитни, и его элементы — формами Уитни. Изоморфизм между комплексом клеточных коцепей стандартной триангуляции Δ^n (т.е. состоящей из граней Δ^n всех размерностей) $C^\bullet(\Delta^n)$ и комплексом Уитни $\Omega^\bullet_W(\Delta^n)$, задаётся отображением

$$\iota_{\Delta^n} : e_\sigma \mapsto \chi_\sigma$$

посылающим базисную клеточную коцепь e_σ в форму Уитни χ_σ для каждой грани $\sigma \subset \Delta^n$. Тем самым, построено вложение $\iota_{\Delta^n} : C^\bullet(\Delta^n) \hookrightarrow \Omega^\bullet(\Delta^n)$, и образ этого вложения — комплекс Уитни $\iota_{\Delta^n}(C^\bullet(\Delta^n)) = \Omega^\bullet_W(\Delta^n) \subset \Omega^\bullet(\Delta^n)$. То, что это вложение согласовано с дифференциалом, следует из (175). Важным свойством комплекса Уитни для симплекса является согласованность с ограничением на грань: $\Omega^\bullet_W(\Delta^n)|_\sigma = \Omega^\bullet_W(\sigma)$ для всякой грани $\sigma \subset \Delta^n$.

Теперь пусть Ξ есть триангуляция многообразия M. Для всякого симплекса $\sigma \in \Xi$ мы определяем соответствующую базисную форму Уитни χ_σ через сужения на симплексы $\sigma' \in \Xi$ как

$$(\chi_\sigma)|_{\sigma'} = \begin{cases} \chi_\sigma^{(\sigma')}, & \sigma \subset \sigma' \\ 0, & \sigma \not\subset \sigma' \end{cases}$$

где $\chi_\sigma^{(\sigma')} \in \Omega^\bullet(\sigma')$ — форма Уитни на σ', соответствующая грани $\sigma \subset \sigma'$, определённая с помощью (170). Формы χ_σ являются кусочно-линейными дифференциальными формами на M, и их линейная оболочка $\Omega^\bullet_W(\Xi) \subset \Omega^\bullet(M)$ (комплекс Уитни для триангуляции Ξ) является подкомплексом, т.е. замкнута относительно дифференциала де Рама. Иначе можно сформулировать конструкцию $\Omega^\bullet_W(\Xi)$, как склейку комплексов Уитни для симплексов старшей размерности в Ξ по граням коразмерности 1, т.е. с помощью отображений ограничения $\Omega^\bullet_W(\sigma) \to \Omega^\bullet_W(\sigma)|_{\sigma'} = \Omega^\bullet_W(\sigma')$, где $\sigma' \subset \sigma$, $\dim\sigma' = \dim\sigma - 1$.

Вложение клеточных коцепей триангуляции Ξ в дифференциальные формы задаётся снова как $\iota_\Xi : e_\sigma \mapsto \chi_\sigma$, т.е. базисная коцепь, соответствующая симплексу $\sigma \in \Xi$ посылается в соответствующую дифференциальную форму Уитни на M. Тем самым, есть цепное вложение $\iota_\Xi : C^\bullet(\Xi) \hookrightarrow \Omega^\bullet(M)$, образ которого есть $\Omega^\bullet_W(\Xi)$. Ретракцию $r_\Xi : \Omega^\bullet(M) \to C^\bullet(\Xi)$ мы задаём с помощью интегралов по симплексам:

$$\alpha \mapsto \sum_{\sigma\in\Xi} \left(\int_\sigma \alpha\right) e_\sigma$$

для $\alpha \in \Omega^\bullet(M)$. То, что r_Ξ есть цепное отображение, следует из теоремы Стокса, и то, что $r_\Xi \circ \iota_\Xi = \mathrm{id}_{C^\bullet(\Xi)}$, следует из свойств (172,174) форм Уитни.

5.2. **Оператор цепной гомотопии Дюпона.** Рассмотрим сначала снова случай одного n-симплекса $\Delta^n = [0\cdots n]$. Введём для каждой вершины i симплекса отображение гомотетии

$$\phi_i : [0,1] \times \Delta^n \to \Delta^n$$

заданное формулой

$$\phi_i(u; t_0, \ldots, t_n) = (ut_0, \ldots, ut_i + (1-u), \ldots, ut_n)$$

Пусть $\pi : [0,1] \times \Delta^n \to \Delta^n$ есть проекция на второй сомножитель, и пусть $\pi_* : \Omega^\bullet([0,1] \times \Delta^n) \to \Omega^{\bullet-1}(\Delta^n)$ — интегрирование по первому сомножителю. Введём операторы

$$h^i : \Omega^\bullet(\Delta^n) \to \Omega^{\bullet-1}(\Delta^n)$$

как

$$h^i\alpha = \pi_*\phi_i^*\alpha$$

для $\alpha \in \Omega^\bullet(\Delta^n)$. Пусть $\mathrm{ev}^i : \Omega^\bullet(\Delta^n) \to \mathbb{R}$ есть отображение вычисления значения формы в вершине i (тождественно равное нулю для форм степени ≥ 1). Из теоремы Стокса следует, что h^i является цепной гомотопией между тождественным отображением $\mathrm{id} : \Omega^\bullet(\Delta^n) \to \Omega^\bullet(\Delta^n)$ и ev^i:

$$dh^i + h^i d = \mathrm{id} - \mathrm{ev}^i$$

Также выполняется соотношение

$$h^i h^j + h^j h^i = 0$$

поскольку $h^i h^j \alpha = \pi_* \phi_{ij}^* \alpha$, где $\phi_{ij} : [0,1] \times [0,1] \times \Delta^n \to \Delta^n$ есть отображение

$$\phi_{ij}(u, v; t_0, \dots, t_n) = (uvt_k + v(1-u)\delta_{ik} + (1-v)\delta_{jk})$$

и $\phi_{ji}(u,v) = \phi_{ij}(\tilde{v}, \tilde{u})$, где $(u,v) \mapsto (\tilde{u}, \tilde{v})$ есть диффеоморфизм квадрата $[0,1] \times [0,1]$, заданный с помощью $1 - v = \tilde{u}(1-\tilde{v})$, $v(1-u) = (1-\tilde{u})$.

Оператор Дюпона $K_{\Delta^n} : \Omega^\bullet(\Delta^n) \to \Omega^{\bullet-1}(\Delta^n)$ определяется как

$$\begin{aligned} K_{\Delta^n} &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \sum_{0 \leq i_0 < \dots < i_k \leq n} \chi_{i_0 \cdots i_k} h^{i_k} \cdots h^{i_0} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \sum_{i_0, \dots, i_k = 0}^{n} t_{i_0} dt_{i_1} \cdots dt_{i_k} h^{i_k} \cdots h^{i_0} \end{aligned} \tag{176}$$

и удовлетворяет следующему набору свойств.

(1) Согласованность с вложением грани $\sigma \hookrightarrow \Delta^n$:

$$(K_{\Delta^n}\alpha)|_\sigma = K_\sigma(\alpha|_\sigma) \tag{177}$$

для любой формы $\alpha \in \Omega^\bullet(\Delta^n)$

(2) Оператор Дюпона равен нулю на формах Уитни

$$K_{\Delta^n} \iota_{\Delta^n} = 0 \tag{178}$$

и интегралы по граням для образа оператора K также равны нулю

$$r_{\Delta^n} K_{\Delta^n} = 0 \tag{179}$$

(3) "Симплициальная теорема де Рама": оператор K_{Δ^n} задаёт цепную гомотопию между тождественным отображением $\mathrm{id} : \Omega^\bullet(\Delta^n) \to \Omega^\bullet(\Delta^n)$ и проекцией на формы Уитни:

$$dK_{\Delta^n} + K_{\Delta^n} d = \mathrm{id} - \iota_{\Delta^n} r_{\Delta^n} \tag{180}$$

(4) Необходимое для разложения Ходжа свойство [15]

$$(K_{\Delta^n})^2 = 0 \tag{181}$$

Свойство (177) вытекает из свойства (173) для форм Уитни. Оно означает, что в (176) при ограничении на σ все члены равны нулю, кроме тех, где все $i_0, \dots, i_k$ — вершины грани σ. Также мы используем, что гомотетия ϕ_i к вершине $i \in \sigma \subset \Delta^n$ посылает точки на σ в точки на σ. Из (177) следует, в частности, что ограничение $(K_{\Delta^n}\alpha)|_\sigma$ не содержит компоненты степени $\dim \sigma$, и отсюда немедленно вытекает (179). Свойство (178) доказывается прямым вычислением, которое мы здесь приведём.

Доказательство (178) Мы должны показать, что $K\chi_{i_0\cdots i_k} = 0$. Пользуясь S_n-симметрией симплекса Δ^n, положим $[i_0 \cdots i_k] = [0 \cdots k]$. Посмотрим сначала, как h^i действует на $\chi_{0\cdots k}$. В случае $i > k$ имеем

$$\begin{aligned}
\phi_i^*\chi_{0\cdots k} &= k!\sum_{r=0}^{k}(-1)^r u t_r (t_0 du + u dt_0)\cdots(\widehat{t_r du + u dt_r})\cdots(t_k du + u dt_k) \\
&= k! u^k du \left(\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{r-1}(-1)^{r+s} t_r t_s dt_0 \cdots \widehat{dt_s}\cdots\widehat{dt_r}\cdots dt_k \right. + \\
&\quad \left. + \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=r+1}^{k}(-1)^{r+s+1} t_r t_s dt_0 \cdots \widehat{dt_r}\cdots\widehat{dt_s}\cdots dt_k\right) + u^{k+1}\chi_{0\cdots k}
\end{aligned}$$

при перестановке r и s первая сумма в скобках переходит во вторую с обратным знаком, поэтому выражение в скобках равно нулю и $\phi_i^*\chi_{0\cdots k} = u^{k+1}\chi_{0\cdots k}$ — является формой степени 0 на отрезке $[0,1]$, поэтому

$$i > k \Rightarrow h^i\chi_{0\cdots k} = 0$$

Теперь рассмотрим случай $i \le k$.

$$\begin{aligned}
\phi_i^*\chi_{0\cdots k} &= k!\sum_{r=0}^{k}(-1)^r (u t_r + (1-u)\delta_{ir}) \prod_{0\le j\le k,\, j\ne r}((t_j - \delta_{ij})du + u dt_j) \\
&= k! u^{k-1} du \left(\sum_{0\le s<r\le k}(-1)^{r+s}(u t_r + (1-u)\delta_{ir})(t_s - \delta_{is}) dt_0\cdots\widehat{dt_s}\cdots\widehat{dt_r}\cdots dt_k \right. + \\
&\quad \left. + \sum_{0\le r<s\le k}(-1)^{r+s+1}(u t_r + (1-u)\delta_{ir})(t_s - \delta_{is}) dt_0\cdots\widehat{dt_r}\cdots\widehat{dt_s}\cdots dt_k\right) + \\
&\quad + \left(u^{k+1}\chi_{0\cdots k} + (-1)^i k!(1-u)u^k dt_0\cdots\widehat{dt_i}\cdots dt_k\right) \\
&= k! u^k du \left(\sum_{0\le s<r\le k}(-1)^{r+s} t_r t_s dt_0\cdots\widehat{dt_s}\cdots\widehat{dt_r}\cdots dt_k + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{0\le r<s\le k}(-1)^{r+s+1} dt_r dt_s dt_0\cdots\widehat{dt_r}\cdots\widehat{dt_s}\cdots dt_k\right) - \\
&- k! u^k du \left(\sum_{i<r\le k}(-1)^{i+r} t_r dt_0\cdots\widehat{dt_i}\cdots\widehat{dt_r}\cdots dt_k + \sum_{0\le r<i}(-1)^{i+r+1} t_r dt_0\cdots\widehat{dt_r}\cdots\widehat{dt_i}\cdots dt_k\right) +
\end{aligned}$$

$$+ k!(1-u)u^{k-1}du \left(\sum_{0\le s<i} (-1)^{i+s} t_s dt_0 \cdots \widehat{dt_s} \cdots \widehat{dt_i} \cdots dt_k + \right.$$

$$\left. + \sum_{i<s\le k} (-1)^{i+s+1} t_s dt_0 \cdots \widehat{dt_i} \cdots \widehat{dt_s} \cdots dt_k \right) +$$

$$+ \left(u^{k+1}\chi_{0\cdots k} + (-1)^i k!(1-u)u^k dt_0 \cdots \widehat{dt_i} \cdots dt_k \right)$$

$$= \left(k! u^k du \cdot 0 + (-1)^i k u^k du \chi_{0\cdots\widehat{i}\cdots k} + (-1)^i k(1-u)u^{k-1} du \chi_{0\cdots\widehat{i}\cdots k} \right) +$$

$$+ \left(u^{k+1}\chi_{0\cdots k} + (-1)^i k!(1-u)u^k dt_0 \cdots \widehat{dt_i} \cdots dt_k \right)$$

$$= (-1)^i k u^{k-1} du\, \chi_{0\cdots\widehat{i}\cdots k} + \left(u^{k+1}\chi_{0\cdots k} + (-1)^i k!(1-u)u^k dt_0 \cdots \widehat{dt_i} \cdots dt_k \right) \quad (182)$$

Формой степени 1 по u здесь является только первое слагаемое в конечном выражении, поэтому приходим к элегантному ответу

$$h^i \chi_{0\cdots k} = \begin{cases} (-1)^i \chi_{0\cdots\widehat{i}\cdots k}, & 0 \le i \le k \\ 0, & i > k \end{cases}$$

Или, как отсюда немедленно следует, для формы Уитни, соответствующей произвольной грани $\sigma = [j_0 \cdots j_k] \subset \Delta^n$:

$$h^i \chi_{j_0\cdots j_k} = \begin{cases} (-1)^r \chi_{j_0\cdots\widehat{j_r}\cdots j_k}, & i = j_r \\ 0, & i \notin [j_0 \cdots j_k] \end{cases}$$

Теперь, пользуясь этим, можно вычислить $K_{\Delta^n}\chi_{0\cdots k}$:

$$K_{\Delta^n}\chi_{0\cdots k} = \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l \sum_{0\le i_0<\cdots<i_l\le n} \chi_{i_0\cdots i_l} h^{i_l} \cdots h^{i_0} \chi_{0\cdots k}$$

$$= \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l \sum_{0\le i_0<\cdots<i_l\le k} (-1)^{i_0+(i_1+1)+\cdots+(i_l+l)} \chi_{i_0\cdots i_l} \chi_{0\cdots\widehat{i_0}\cdots\widehat{i_l}\cdots k}$$

$$= \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l \sum_{0\le i_0<\cdots<i_l\le k} \sum_{0\le r\le l} \sum_{0\le s\le k,\, s\ne i_j} (-1)^{r+s+\sharp\{j:\, i_j<s\}} t_r t_s dt_{i_l} \cdots \widehat{dt_{i_r}} \cdots dt_{i_0} \cdot$$

$$\cdot dt_0 \cdots \widehat{dt_{i_0}} \cdots \widehat{dt_s} \cdots \widehat{dt_{i_l}} \cdots dt_k$$

$$= \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l \sum_{0\le i_0<\cdots<i_l\le k} \left(\sum_{0\le r\le l} \sum_{0\le s<i_r,\, s\ne i_j} (-1)^{r+s+i_r+\sharp\{j:\, i_j<s\}+\sharp\{j:\, s<i_j<i_r\}} \cdot \right.$$

$$\cdot t_r t_s dt_0 \cdots \widehat{dt_s} \cdots \widehat{dt_{i_r}} \cdots dt_k +$$

$$\left. + \sum_{0\le r\le l} \sum_{i_r<s\le k:\, s\ne i_j} (-1)^{r+s+i_r+\sharp\{j:\, i_j<s\}+\sharp\{j:\, i_r<i_j<s\}} t_r t_s dt_0 \cdots \widehat{dt_{i_r}} \cdots \widehat{dt_s} \cdots dt_k \right)$$

$$= \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l C_{k-1}^l \left(\sum_{0\le s<q\le k} (-1)^{s+q} t_q t_s dt_0 \cdots \widehat{dt_s} \cdots \widehat{dt_q} \cdots dt_k + \right.$$

$$+\sum_{0\le q<s\le k}(-1)^{s+q+1}t_q t_s dt_0\cdots\widehat{dt_q}\cdots\widehat{dt_s}\cdots dt_k\Bigg)=0 \quad (183)$$

Последнее выражение равно нулю по двум причинам: во-первых, выражение в скобках есть ноль, во-вторых, оно явно не зависит от l и $\sum_{l=0}^{k-1}C_{k-1}^l=0$, где C_{k-1}^l — биномиальные коэффициенты.

□

Заметим, что в вычислении (183) мы попутно доказали следующее важное свойство форм Уитни: для любой грани $\sigma=[i_0\cdots i_k]\subset\Delta^n$ и любого целого $0\le l\le k-1$ имеется квадратичное соотношение для форм Уитни:

$$\sum_{j_0<\cdots<j_l,\,j_{l+1}<\cdots<j_k\colon\{j_0\cdots j_l\}\cup\{j_{l+1}\cdots j_k\}=\{i_0\cdots i_k\}}(-1)^{(j_0\cdots j_k)}\chi_{j_0\cdots j_l}\wedge\chi_{j_{l+1}\cdots j_k}=0 \qquad (184)$$

где мы суммируем по всем способам разбить множество вершин σ на два подмножества, с $l+1$ и $k-l$ элементами, соответственно. Знак $(-1)^{(j_0\cdots j_k)}$ — это знак перестановки $[j_0\cdots j_k]\to[i_0\cdots i_k]$. Например, для грани $\sigma=[012]$ и $l=0$ квадратичное соотношение (184) имеет вид

$$\chi_0\chi_{12}-\chi_1\chi_{02}+\chi_2\chi_{01}=0$$

Приведём также вывод симплициальной теоремы де Рама (180).

Доказательство (180) Вычислим супер-коммутатор $[d,K_{\Delta^n}]=dK+Kd$:

$$\begin{aligned}
[d,K_{\Delta^n}]&=\sum_{k=0}^n(-1)^k\sum_{i_0,\dots,i_k=0}^n\Big(dt_{i_0}\cdots dt_{i_k}h^{i_k}\cdots h^{i_0}+\\
&\qquad+\sum_{r=0}^k(-1)^r t_{i_0}dt_{i_1}\cdots dt_{i_k}h^{i_k}\cdots[d,h^{i_r}]\cdots h^{i_0}\Big)\\
&=\sum_{k=0}^n(-1)^k\sum_{i_0,\dots,i_k=0}^n\Bigg(dt_{i_0}\cdots dt_{i_k}h^{i_k}\cdots h^{i_0}+\sum_{r=0}^k(-1)^r t_{i_0}dt_{i_1}\cdots dt_{i_k}h^{i_k}\cdots\widehat{h^{i_r}}\cdots h^{i_0}-\\
&\qquad-\sum_{r=0}^k(-1)^r t_{i_0}dt_{i_1}\cdots dt_{i_k}h^{i_k}\cdots \mathrm{ev}^{i_r}\cdots h^{i_0}\Bigg)\\
&=\sum_{k=0}^n(-1)^k\left(\sum_{i_0,\dots,i_k=0}^n dt_{i_0}\cdots dt_{i_k}h^{i_k}\cdots h^{i_0}+\sum_{i_1,\dots,i_k=0}^n dt_{i_1}\cdots dt_{i_k}h^{i_k}\cdots h^{i_1}\right)-\\
&\qquad-\sum_{k=0}^n\sum_{i_0,\dots,i_k=0}^n t_{i_0}dt_{i_1}\cdots dt_{i_k}\mathrm{ev}^{i_k}h^{i_{k-1}}\cdots h^{i_0}\\
&=\mathrm{id}-\sum_{k=0}^n\sum_{i_0,\dots,i_k=0}^n t_{i_0}dt_{i_1}\cdots dt_{i_k}\mathrm{ev}^{i_k}h^{i_{k-1}}\cdots h^{i_0}
\end{aligned}$$

Теперь нам осталось показать, что

$$\mathrm{ev}^{i_k}h^{i_{k-1}}\cdots h^{i_0}\alpha=\int_{[i_0\cdots i_k]}\alpha \qquad (185)$$

— интеграл по соответствующей грани в Δ^n, для любой k-формы $\alpha \in \Omega^k(\Delta^n)$ (ясно, что для формы отличной от k степени левая и правая часть (185) равны нулю автоматически).

Обозначим $f(x) = (h^{i_{k-1}} \cdots h^{i_0}\alpha)(x)$ — функция на симплексе Δ^n, и $x \in \Delta^n$ — точка на симплексе. Можно представить

$$f = \pi_* \phi^*_{i_0 \cdots i_{k-1}} \alpha$$

где

$$\phi_{i_0 \cdots i_{k-1}} = \phi_{i_0} \cdots \phi_{i_{k-1}} : [0,1]^k \times \Delta^n \to \Delta^n$$

и π_* — интегрирование по кубу $[0,1]^k$. Вместо того, чтобы вычислять $f(x)$, как интеграл по кубу от обратного образа формы α при отображении $\phi_{i_0 \cdots i_{k-1}}$, можно вычислять интеграл от самой формы α на симплексе, но по прямому образу куба в симплексе (этот образ зависит от точки x):

$$f(x) = \int_{\phi_{i_0 \cdots i_{k-1}}([0,1]^k \times \{x\}) \subset \Delta^n} \alpha$$

Поскольку $\phi_{i_0 \cdots i_{k-1}}$ есть итерированная гомотетия — сначала по направлению к вершине $[i_{k-1}]$, потом к $[i_{k-2}]$, и т.д., понятно, что образ куба $[0,1]^k$ есть просто выпуклая оболочка набора вершин $i_0, \cdots, i_{k-1}$ и точки x:

$$\phi_{i_0 \cdots i_{k-1}}([0,1]^k \times \{x\}) = \mathrm{Conv}([i_0], \cdots, [i_{k-1}], x)$$

т.е. k-симплекс в Δ^n, опирающийся на $(k-1)$-грань $[i_0 \cdots i_{k-1}]$ и с вершиной в точке x. Мы обозначаем геометрические вершины в квадратных скобках, чтобы не путать номера вершин с соответствующими точками. Тем самым, мы показали, что для любой k-формы $\alpha \in \Omega^k(\Delta^n)$, любой k-грани $[i_0 \cdots i_{k-1}] \subset \Delta^n$ и любой точки $x \in \Delta^n$,

$$(h^{i_{k-1}} \cdots h^{i_0}\alpha)(x) = \int_{\mathrm{Conv}([i_0], \cdots, [i_{k-1}], x)} \alpha$$

в частности, если положить $x = [i_k]$, мы приходим к (185).

□

Пусть теперь есть многообразие M с триангуляцией Ξ. Тогда мы определяем оператор цепной гомотопии $K_\Xi : \Omega^\bullet(M) \to \Omega^\bullet(M)$ с помощью сужений на симплексы Ξ, т.е. для любого $\sigma \in \Xi$ мы полагаем

$$(K_\Xi \alpha)|_\sigma = K_\sigma(\alpha|_\sigma) \tag{186}$$

для всякой дифференциальной формы $\alpha \in \Omega^\bullet(M)$. Благодаря свойству (177) согласованности оператора Дюпона с вложением грани, определение (186) самосогласовано. Как следует из рассмотрения сужений на отдельные симплексы триангуляции, свойства оператора Дюпона (178,179,180,181) на симплексе глобализуются до таких же свойств на триангуляции:

$$\begin{aligned} K_\Xi \iota_\Xi &= 0 \\ r_\Xi K_\Xi &= 0 \\ dK_\Xi + K_\Xi d &= \mathrm{id}_{\Omega^\bullet(M)} - \iota_\Xi r_\Xi \\ (K_\Xi)^2 &= 0 \end{aligned}$$

5.3. **Симплициальное BF-действие.** Мы интересуемся случаем топологической BF-теории, т.е. абстрактной BF-теории, ассоциированной с DGLA $\mathfrak{g}$-значных дифференциальных форм на многообразии M:

$$V = \Omega^\bullet(M, \mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \otimes \Omega^\bullet(M)$$

и индуцированием эффективного действия S_Ξ для неё на пространстве полей $\mathcal{F}_\Xi = T^*[-1](V_\Xi[1])$, канонически построенным по комплексу $\mathfrak{g}$-значных клеточных коцепей для триангуляции Ξ многообразия M:

$$V_\Xi = C^\bullet(\Xi, \mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \otimes C^\bullet(\Xi)$$

В качестве данных индуцирования мы выбираем тройку отображений $(\iota_\Xi, r_\Xi, K_\Xi)$, построенных в разделах 5.1, 5.2. Тем самым, пространство V разделяется на инфракрасную и ультрафиолетовую части

$$\mathfrak{g} \otimes \Omega^\bullet(M) = \mathfrak{g} \otimes \iota_\Xi(C^\bullet(\Xi)) \oplus \mathfrak{g} \otimes \Omega''^\bullet(M)$$

где инфракрасная часть — комплекс $\mathfrak{g}$-значных форм Уитни на триангуляции $\mathfrak{g} \otimes \Omega^\bullet_W(\Xi)$ и ультрафиолетовая часть состоит из $\mathfrak{g}$-значных форм $\alpha'' \in \mathfrak{g} \otimes \Omega''^\bullet(M)$, интегралы которых по всем симплексам триангуляции нулевые:

$$\int_\sigma \alpha'' = 0$$

И далее, пространство ультрафиолетовых форм разделяется на d-точную и K_Ξ-точную части:

$$\mathfrak{g} \otimes \Omega''^\bullet(M) = \mathfrak{g} \otimes \Omega''^\bullet_{d-ex}(M) \oplus \mathfrak{g} \otimes \Omega''^\bullet_{K-ex}(M)$$

Важно отметить, что, по сравнению с общим случаем индуцирования эффективного BF-действия, рассматриваемая ситуация обладает следующими двумя особенностями. Во-первых отображения $(\iota_\Xi, r_\Xi, K_\Xi)$ нетривиально действуют лишь на де рамовскую (коммутативную) часть форм, т.е. на второй множитель в $\mathfrak{g} \otimes \Omega^\bullet(M)$, и тривиальны в коэффициентах $\mathfrak{g}$. Во-вторых, данные индуцирования $(\iota_\Xi, r_\Xi, K_\Xi)$ по конструкции согласованы с отображениями ограничения на симплексы триангуляции $\Omega^\bullet(M) \to \Omega^\bullet(\sigma)$, $C^\bullet(\Xi) \to C^\bullet(\sigma)$.

Пусть (e_σ) — базисные коцепи на Ξ, соответствующие симплексам триангуляции и (e^σ) — базисные цепи. Пусть также (T_a) — базис (генераторы) алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и (T^a) — двойственный базис в $\mathfrak{g}^*$. Тогда, в соотвествии с общим формализмом, координаты на пространстве инфракрасных полей $\mathcal{F}_\Xi = T^*[-1](V_\Xi[1])$ есть $(\omega^{\sigma a}, p_{\sigma a})$, с духовыми числами $\mathrm{gh}(\omega^{\sigma a}) = 1 - |\sigma|$, $\mathrm{gh}(p_{\sigma a}) = -2 + |\sigma|$, где $|\sigma|$ — размерность симплекса σ. Соответственно, супер-поля имеют вид

$$\omega_\Xi = \sum_{a,\sigma} T_a e_\sigma \omega^{\sigma a},\ p_\Xi = \sum_{a,\sigma} p_{\sigma a} T^a e^\sigma$$

Однако, нам удобнее в данной ситуации перейти к системе $\mathfrak{g}$-значных координат $\omega^\sigma = \sum_a T_a \omega^{\sigma a} : \mathcal{F}_\Xi \to \mathfrak{g}$, и $\mathfrak{g}^*$-значных координат $p_\sigma = \sum_a p_{\sigma a} T^a : \mathcal{F}_\Xi \to \mathfrak{g}^*$, причём духовые числа снова есть $\mathrm{gh}(\omega^\sigma) = 1 - |\sigma|$, $\mathrm{gh}(p_\sigma) = -2 + |\sigma|$. В терминах координат $(\omega^\sigma, p_\sigma)$ супер-поля имеют вид

$$\omega_\Xi = \sum_\sigma e_\sigma \omega^\sigma,\ p_\Xi = \sum_\sigma p_\sigma e^\sigma$$

Можно понимать ω_Ξ как $\mathfrak{g}$-значную коцепь на Ξ с тотальной степенью $\mathrm{gh} + \deg = 1$ (мы полагаем, что базисные коцепи и цепи обладают де рамовской степенью $\deg(e_\sigma) = -\deg(e^\sigma) = |\sigma|$), и соответственно p_Ξ — как $\mathfrak{g}^*$-значную цепь с тотальной степенью $\mathrm{gh} + \deg = -2$. Также ω^σ понимается как значение коцепи ω_Ξ на симплексе $\sigma \in \Xi$, и p_σ — как значение цепи p_Ξ на σ.

Действие $S_\Xi(\omega_\Xi, p_\Xi)$ эффективной BF_∞-теории на пространстве $\mathcal{F}_\Xi$, определяемое пертурбативным рядом (115,116), мы называем симплициальным BF-действием для триангуляции Ξ.

Теорема 7 (Симплициальная локальность симплициального BF-действия S_Ξ)**.** *Существует семейство универсальных функций*

$$\bar{S}_{\Delta^n}(\{\omega^\sigma\}_{\sigma\subset\Delta^n}, p_{\Delta^n}) \in \mathrm{Fun}(g \otimes C^\bullet(\Delta^n)[1] \oplus \mathfrak{g}^* \otimes C_n(\Delta^n)[-2])$$

параметризованное целыми неотрицательными n (каждое $\bar{S}$ есть функция значений коцепи ω на всех гранях симплекса Δ^n и значения цепи p только на старшей клетке), такое что для любой триангуляции Ξ любого многообразия M имеет место разложение S_Ξ по симплексам (всех размерностей) триангуляции

$$S_\Xi(\omega_\Xi, p_\Xi) = \sum_{\sigma\in\Xi} \bar{S}_\sigma(\{\omega^{\sigma'}\}_{\sigma'\subset\sigma}, p_\sigma) \tag{187}$$

Таким образом, симплициальное BF-действие S_Ξ зависит от полей ω_Ξ, p_Ξ симплициально-локальным образом, т.е. раскладывается в сумму по симплексам, где каждое слагаемое $\bar{S}_\sigma$ зависит лишь от ограничения ω_Ξ и p_Ξ на симплекс σ, и никак не зависит от комбинаторики триангуляции Ξ.

Доказательство. Рассмотрим сначала древесную часть эффективного действия на Ξ:

$$S^0_\Xi = \sum_{\sigma,\sigma_1\in\Xi} < p_\sigma e^\sigma, de_{\sigma_1}\omega^{\sigma_1} > + \sum_{T\in\mathbf{T}_{\mathrm{nonPl}}:\,|T|\geq 2}\ \sum_{\sigma,\sigma_1,\ldots,\sigma_{|T|}\in\Xi} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(T)|}\cdot$$

$$\cdot < p_\sigma e^\sigma, r_\Xi\circ \mathrm{Iter}_{T;-K_\Xi[\bullet,\bullet];[\bullet,\bullet]}(\iota_\Xi(e_{\sigma_1}\omega^{\sigma_1}),\ldots,\iota_\Xi(e_{\sigma_{|T|}}\omega^{\sigma_{|T|}})) >$$

$$= \sum_{\sigma,\sigma_1\in\Xi} d^\sigma_{\sigma_1} < p_\sigma, \omega^{\sigma_1} >_{\mathfrak{g}} +$$

$$+ \sum_{T\in\mathbf{T}_{\mathrm{nonPl}}:\,|T|\geq 2}\ \sum_{\sigma,\sigma_1,\ldots,\sigma_{|T|}\in\Xi} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(T)|} \left\langle p_\sigma, \int_\sigma \mathrm{Iter}_{T;-K_\Xi[\bullet,\bullet];[\bullet,\bullet]}(\chi_{\sigma_1}\omega^{\sigma_1},\ldots,\chi_{\sigma_{|T|}}\omega^{\sigma_{|T|}}) \right\rangle_{\mathfrak{g}}$$

где $d^\sigma_{\sigma_1} =< e^\sigma, de_{\sigma_1} >$ — матрица дифференциала на $C^\bullet(\Xi)$, т.е. $d^\sigma_{\sigma_1} = \pm 1$, если σ_1 есть грань коразмерности 1 в σ и $d^\sigma_{\sigma_1} = 0$ в противном случае. Мы обозначаем $< \bullet, \bullet >_{\mathfrak{g}}$: $\mathfrak{g}^*\otimes\mathfrak{g}\to\mathbb{R}$ спаривание между алгеброй Ли и двойственным пространством. Далее, оператор K_Ξ обладает следующим свойством: для того, чтобы ограничение $(K_\Xi\alpha)|_\sigma \neq 0$ для произвольной формы $\alpha\in\Omega^\bullet(M)$, необходимо, чтобы $\alpha|_\sigma\neq 0$. Также для того, чтобы ограничение произведение форм Уитни $(\chi_{\sigma_1}\wedge\chi_{\sigma_2})|_\sigma \neq 0$, необходимо, чтобы σ_1 и σ_2 были гранями σ; и для того, чтобы $(\alpha\wedge\chi_{\sigma_1})|_\sigma\neq 0$, необходимо, чтобы σ_1 было гранью σ и чтобы $\alpha|_\sigma\neq 0$. Из этих наблюдений вытекает, что в выражение

$$\sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_{|T|}} \int_\sigma \mathrm{Iter}_{T;-K_\Xi[\bullet,\bullet];[\bullet,\bullet]}(\chi_{\sigma_1}\omega^{\sigma_1},\ldots,\chi_{\sigma_{|T|}}\omega^{\sigma_{|T|}})$$

дают вклад только те слагаемые, где все симплексы $\sigma_1,\ldots,\sigma_{|T|}$ являются гранями симплекса σ. Поэтому можно написать

$$S^0_\Xi = \sum_{\sigma\in\Xi} \bar{S}^0_\sigma(\{\omega^{\sigma'}\}_{\sigma'\subset\sigma}, p_\sigma)$$

где мы определяем слагаемые $\bar{S}^0_\sigma$ с помощью суммы по деревьям

$$\bar{S}^0_\sigma = \left\langle p_\sigma, \sum_{\sigma_1} d^\sigma_{\sigma_1}\omega^{\sigma_1} + \right.$$

$$\left. + \sum_{T\in\mathbf{T}_{\mathrm{nonPl}}:\,|T|\geq 2}\ \sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_{|T|}\subset\sigma} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(T)|} \int_\sigma \mathrm{Iter}_{T;-K_\sigma[\bullet,\bullet];[\bullet,\bullet]}(\chi_{\sigma_1}\omega^{\sigma_1},\ldots,\chi_{\sigma_{|T|}}\omega^{\sigma_{|T|}}) \right\rangle_{\mathfrak{g}}$$

В этом выражении мы понимаем формы Уитни $\chi_{\sigma_j} = \chi^{(\sigma)}_{\sigma_j}\in\Omega^\bullet(\sigma)$ как дифференциальные формы на симплексе σ.

Теперь рассмотрим однопетлевую часть эффективного действия на Ξ

$$S^1_\Xi = -\sum_{L\in\mathbf{L}_{\mathrm{nonPl}}}\sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_{|L|}\in\Xi}\frac{1}{|\mathrm{Aut}(L)|}\mathrm{Loop}_{L;-K_\Xi[\bullet,\bullet]}(\chi_{\sigma_1}\omega^{\sigma_1},\ldots,\chi_{\sigma_{|L|}}\omega^{\sigma_{|L|}})$$

Мы хотим разбить супер-следы по $\Omega^\bullet(M,\mathfrak{g})$, в соответствии со следующим разложением пространства дифференциальных форм:

$$\Omega^\bullet(M) = \bigoplus_{\sigma\in\Xi}\Omega^\bullet_0(\sigma) \tag{188}$$

Мы обозначаем $\Omega^\bullet_0(\sigma)$ пространство дифференциальных форм на симплексе σ, с нулевым ограничением на границу $\partial\sigma$:

$$\Omega^\bullet_0(\sigma) = \{\alpha\in\Omega^\bullet(\sigma):\ \alpha|_{\partial\sigma}=0\}$$

В разложении (188) мы подразумеваем, что проекции $\Omega^\bullet(M)\to\Omega^\bullet_0(\sigma)$ есть просто отображения ограничения на соответствующий симплекс; вложение $\Omega^\bullet_0(\sigma)\to\Omega^\bullet(M)$ для симплекса σ старшей размерности есть продолжение формы $\alpha\in\Omega^\bullet_0(\sigma)$ нулём на дополнение к σ в M. Для симплексов размерности $\dim\sigma<\dim M$ мы вкладываем $\alpha\in\Omega^\bullet_0(\sigma)$ в $\Omega^\bullet(M)$ с помощью функции сглаживания $\rho_\sigma\in C^\infty(M)$ с носителем в малой окрестности $U_\sigma\subset M$, содержащей грань σ (т.е. U_σ есть “утолщение” σ), и равной единице на самой грани σ, т.е. вложение $\Omega^\bullet_0(\sigma)\to\Omega^\bullet(M)$ задаётся как $\alpha\mapsto\rho_\sigma\cdot\pi^*_\sigma\alpha$, где $\pi_\sigma: U_\sigma\to\sigma$ есть проекция на грань.

Используя (188), мы разбиваем супер-следы по $\Omega^\bullet(M)$ как

$$\mathrm{Loop}_{L;-K_\Xi[\bullet,\bullet];\Omega^\bullet(M,\mathfrak{g})}(\chi_{\sigma_1}\omega^{\sigma_1},\ldots,\chi_{\sigma_{|L|}}\omega^{\sigma_{|L|}}) = \sum_{\sigma\in\Xi}\mathrm{Loop}_{L;-K_\sigma[\bullet,\bullet];\Omega^\bullet_0(\sigma,\mathfrak{g})}(\chi_{\sigma_1}\omega^{\sigma_1},\ldots,\chi_{\sigma_{|L|}}\omega^{\sigma_{|L|}})$$

(мы теперь указываем в обозначении Loop пространство, по которому берётся супер-след). Согласно тем же аргументам, которые мы использовали для древесной части S_Ξ, $\mathrm{Loop}_{L;-K_\sigma[\bullet,\bullet];\Omega^\bullet_0(\sigma,\mathfrak{g})}(\chi_{\sigma_1}\omega^{\sigma_1},\ldots,\chi_{\sigma_{|L|}}\omega^{\sigma_{|L|}})$ может быть отлично от нуля, только если все симплексы $\sigma_1,\ldots,\sigma_{|L|}$ являются гранями σ. Поэтому

$$S^1_\Xi = \sum_\sigma \bar S^1_\sigma(\{\omega^{\sigma'}\}_{\sigma'\subset\sigma})$$

где

$$\bar S^1_\sigma = -\sum_{L\in\mathbf{L}_{\mathrm{nonPl}}}\sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_{|L|}\subset\sigma}\frac{1}{|\mathrm{Aut}(L)|}\mathrm{Loop}_{L;-K_\sigma[\bullet,\bullet];\Omega^\bullet_0(\sigma,\mathfrak{g})}(\chi_{\sigma_1}\omega^{\sigma_1},\ldots,\chi_{\sigma_{|L|}}\omega^{\sigma_{|L|}})$$

Тем самым, (187) доказано, причём

$$\bar S_\sigma = \bar S^0_\sigma(\{\omega^{\sigma'}\}_{\sigma'\subset\sigma},p_\sigma)+\hbar\bar S^1_\sigma(\{\omega^{\sigma'}\}_{\sigma'\subset\sigma}) = \Bigg\langle p_\sigma, \sum_{\sigma_1}d^\sigma_{\sigma_1}\omega^{\sigma_1}+$$

$$+\sum_{T\in\mathbf{T}_{\mathrm{nonPl}}:\,|T|\geq 2}\sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_{|T|}\subset\sigma}\frac{1}{|\mathrm{Aut}(T)|}\int_\sigma \mathrm{Iter}_{T;-K_\sigma[\bullet,\bullet];[\bullet,\bullet]}(\chi_{\sigma_1}\omega^{\sigma_1},\ldots,\chi_{\sigma_{|T|}}\omega^{\sigma_{|T|}})\Bigg\rangle_{\mathfrak{g}} -$$

$$-\hbar\sum_{L\in\mathbf{L}_{\mathrm{nonPl}}}\sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_{|L|}\subset\sigma}\frac{1}{|\mathrm{Aut}(L)|}\mathrm{Loop}_{L;-K_\sigma[\bullet,\bullet];\Omega_0^\bullet(\sigma,\mathfrak{g})}(\chi_{\sigma_1}\omega^{\sigma_1},\ldots,\chi_{\sigma_{|L|}}\omega^{\sigma_{|L|}}) \quad (189)$$

□

Из (187) следует, что, для того, чтобы найти симплициальное действие S_Ξ для произвольной триангуляции многообразия, достаточно знать семейство универсальных функций $\bar{S}_{\Delta^n}$ для $n\geq 0$. Последние в свою очередь восстанавливаются, если знать симплициальное действие S_{Δ^n} для $M=\Delta^n$ — одного симплекса со стандартной триангуляцией, в каждой размерности $n\geq 0$:

$$\bar{S}_{\Delta^n}=\sum_{\sigma\subset\Delta^n}(-1)^{n-|\sigma|}S_\sigma \quad (190)$$

Тем самым, чтобы написать общее действие симплициальной BF-теории, нам нужно проделать серию унивирсальных вычислений — вычислить S_{Δ^n} для $n=0,1,2,\ldots$

Заметим также, что функции $\bar{S}_{\Delta^n}$ не удовлетворяют мастер-уравнению, например просто потому, что они являются функциями на пространстве $g\otimes C^\bullet(\Delta^n)[1]\oplus\mathfrak{g}^*\otimes C_n(\Delta^n)[-2]$, на котором нет естественной БВ-структуры. Однако, их суммы (187) по граням любого симплициального комплекса Ξ по конструкции удовлетворяют мастер-уравнению.

Мы будем называть $\bar{S}_{\Delta^n}$ "укороченным" симплициальным BF-действием для симплекса Δ^n.

Мы пришли к S_Ξ действию на симплициальном комплексе, индуцируя его как эффективное действие для топологической BF-теории на многообразии, с некоторым специальным выбором данных индуцирования (ι_Ξ,r_Ξ,K_Ξ), и обнаружили, что ответ (187) в некотором смысле состоит из ответов для отдельных симплексов. Оказывается, можно пойти с другого конца и получить S_Ξ с помощью некоторой универсальной процедуры склейки для симплициальных действий на отдельных симплексах Ξ, т.е. в этом подходе нам не нужно многообразие M, и мы занимаемся не индуцированием эффективного действия, а построением нового решения мастер-уравнения S_Ξ по семейству "стандартных" решений $\{S_{\Delta^n}\}_{n\geq 0}$.

5.4. **Конструкция склейки для qL_∞-алгебр.** В этом разделе мы опишем абстрактную конструкция склейки для qL_∞-алгебр.

Определение 18. *Данными склейки мы называем следующий набор данных:*

- *две qL_∞-алгебры (V,Q_V,ρ_V) и (W,Q_W,ρ_W)*
- *пара проекций $\pi_1,\pi_2:V\to W$*
- *пара вложений $\iota_1,\iota_2:W\to V$*

Причём мы требуем выполнения следующих свойств:

$$\pi_1\iota_1=\pi_2\iota_2=\mathrm{id}_W \quad (191)$$

$$\pi_1\iota_2 = \pi_2\iota_1 = 0 \tag{192}$$

$$Q_V\pi_1^* = \pi_1^* Q_W \tag{193}$$

$$Q_V\pi_2^* = \pi_2^* Q_W \tag{194}$$

где $\pi_{1,2}^* : \mathrm{Fun}(W[1]) \to \mathrm{Fun}(V[1])$ *— отображения обратного образа для проекций* $\pi_{1,2}$.

Свойства (191,192) означают, что проекции $\pi_{1,2}$ обращают соответствующие вложения $\iota_{1,2}$ и что образы вложений $\iota_{1,2}$ в V не пересекаются. Свойства (193,194) означают, что $\pi_{1,2}$ являются линейными L_∞-морфизмами между L_∞-алгебрами (V, Q_V) и (W, Q_W). В терминах операций это свойство имеет вид

$$\pi_1 l_{V(n)}(\underbrace{\omega_V, \ldots, \omega_V}_{n}) = l_{W(n)}(\underbrace{\pi_1\omega_V, \ldots, \pi_1\omega_V}_{n}) \tag{195}$$

$$\pi_2 l_{V(n)}(\underbrace{\omega_V, \ldots, \omega_V}_{n}) = l_{W(n)}(\underbrace{\pi_2\omega_V, \ldots, \pi_2\omega_V}_{n}) \tag{196}$$

для всех $n \geq 1$. Заметим, для $n = 1$ это означает, что $\pi_{1,2}$ являются цепными отображениями. От вложений $\iota_{1,2}$ мы не требуем никакой согласованности с алгебраической структурой на V, W, в частности, не требуем, чтобы они были цепными отображениями. Таким образом, $\iota_{1,2}$ — просто пара линейных отображений векторных пространств.

Благодаря (191,192), имеется следующее разложение векторного пространства V:

$$V = U \oplus \iota_1(W) \oplus \iota_2(W) \tag{197}$$

где $U = \ker(\iota_1\pi_1 + \iota_2\pi_2) = \ker(\pi_1) \cap \ker(\pi_2) \subset V$. Введём следующие линейные комбинации $\pi_{1,2}$ и $\iota_{1,2}$:

$$\pi_- = \pi_2 - \pi_1, \quad \pi_+ = \frac{\pi_1 + \pi_2}{2}, \quad \iota_- = \frac{\iota_2 - \iota_1}{2}, \quad \iota_+ = \iota_1 + \iota_2 \tag{198}$$

(заметим, что $\pi_\pm$ уже не L_∞ морфизмы). Для них автоматически выполнены соотношения

$$\pi_-\iota_- = \pi_+\iota_+ = \mathrm{id}_W, \quad \pi_-\iota_+ = \pi_+\iota_- = 0$$

и возникает перекошенный вариант разложения (197):

$$V = U \oplus \iota_+(W) \oplus \iota_-(W) = V' \oplus V'' \tag{199}$$

где введены обозначения

$$V' = \ker(\pi_-) = U \oplus \iota_+(W), \quad V'' = \iota_-(W)$$

Введём также вложение $\iota_{V',V} : V' \to V$ и проекцию $\pi_{V,V'} : V \to V'$, определённые разложением (199). Также обозначим

$$\pi = \pi_1\iota_{V',V} : V' \to W$$

проекцию из V' на W (заметим, что, ограничения π_1 и π_2 на V' совпадают, и можно было определить $\pi = \pi_2 \iota_{V',V}$).

Определение 19. *Мы определяем "склеенную" по данным $((V, Q_V, \rho_V), (W, Q_W, \rho_W), \pi_{1,2}, \iota_{1,2})$ qL_∞-алгебру как тройку $(V', Q_{V'}, \rho_{V'})$:*

$$V' = \ker \pi_- \subset V \tag{200}$$

$$Q_{V'} = \iota^*_{V',V} Q_V \pi^*_{V,V'} \tag{201}$$

$$\rho_{V'} = \frac{\iota^*_{V',V}\rho_V}{\pi^* \rho_W} \tag{202}$$

где $\iota^*_{V',V} : \mathrm{Fun}(V[1]) \to \mathrm{Fun}(V'[1])$ и $\pi_{V,V'} : \mathrm{Fun}(V'[1]) \to \mathrm{Fun}(V[1])$ — отображения обратного образа, порождённые вложением $\iota_{V',V}$ и проекцией $\pi_{V,V'}$, соответственно. Эквивалентно, можно сформулировать (201,202) в терминах операций:

$$l_{V'(n)}(\underbrace{\omega_{V'}, \ldots, \omega_{V'}}_{n}) = \pi_{V,V'} l_{V(n)}(\underbrace{\iota_{V',V}\omega_{V'}, \ldots, \iota_{V',V}\omega_{V'}}_{n}) \tag{203}$$

$$q_{V'(n)}(\underbrace{\omega_{V'}, \ldots, \omega_{V'}}_{n}) = q_{V(n)}(\underbrace{\iota_{V',V}\omega_{V'}, \ldots, \iota_{V',V}\omega_{V'}}_{n}) - q_{W(n)}(\underbrace{\pi\omega_{V'}, \ldots, \pi\omega_{V'}}_{n}) \tag{204}$$

для всех $n \geq 1$.

Утверждение 12. (1) *Тройка $(V', Q_{V'}, \rho_{V'})$ удовлетворяет соотношениям qL_∞-алгебры, т.е. выполнено*

$$Q^2_{V'} = 0 \tag{205}$$

$$Q_{V'}(\rho_{V'}) + \rho_{V'} \mathrm{div}\, Q_{V'} = 0 \tag{206}$$

(2) *L_∞-часть склеенной алгебры $(V', Q_{V'})$ является L_∞-подалгеброй в (V, Q_V), т.е. когомологическое векторное поле Q_V касательно к подпространству $V'[1] \subset V[1]$ и $Q_{V'}$ есть ограничение $Q_{V'} = Q_V|_{V'[1]}$. Иначе можно сказать, что и вложение $\iota_{V',V}$ и проекция $\pi_{V,V'}$ являются линейными L_∞-морфизмами.*

Сначала мы докажем следующую лемму, обобщающую (2).

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ — два Q-многообразия, с когомологическими векторными полями $Q_\mathcal{M}$ и $Q_\mathcal{N}$ соответственно. Пусть также задана пара отображений $u_{1,2} : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, удовлетворяющих $Q_\mathcal{M} u^*_{1,2} = u^*_{1,2} Q_\mathcal{N}$. Тогда $Q_\mathcal{M}$ касательно к подмногообразию $\mathcal{M}' = \{x \in \mathcal{M} \,|\, u_1(x) = u_2(x)\} \subset \mathcal{M}$ и сужение $Q_{\mathcal{M}'} = (Q_\mathcal{M})|_{\mathcal{M}'}$ является когомологическим векторным полем на $\mathcal{M}'$.*

Доказательство Леммы 2. Кольцо функций $\mathrm{Fun}(\mathcal{M}')$ канонически отождествляется с фактором $\mathrm{Fun}(\mathcal{M})/(\mathrm{im}(u^*_2 - u^*_1))$. Также имеется каноническое вложение $\iota_{\mathcal{M}',\mathcal{M}} : \mathcal{M}' \to$

$\mathcal{M}$ (обратный образ для него $\iota^*_{\mathcal{M}',\mathcal{M}}$ — это в точности каноническая проекция на фактор $\mathrm{Fun}(\mathcal{M}) \to \mathrm{Fun}(\mathcal{M}')$). Временно введём какую-нибудь проекцию $\pi_{\mathcal{M},\mathcal{M}'} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$, удовлетворяющую $\pi_{\mathcal{M},\mathcal{M}'} \circ \iota_{\mathcal{M}',\mathcal{M}} = \mathrm{id}_{\mathcal{M}'}$. Определим векторное поле $Q_{\mathcal{M}'}$ на $\mathcal{M}'$ как

$$Q_{\mathcal{M}'} = \iota^*_{\mathcal{M}',\mathcal{M}} Q_{\mathcal{M}} \pi^*_{\mathcal{M},\mathcal{M}'} \tag{207}$$

Утверждение, что $Q_{\mathcal{M}}$ касательно к $\mathcal{M}'$ означает, что такое $Q_{\mathcal{M}'}$ не зависит от проекции $\pi^*_{\mathcal{M},\mathcal{M}'}$.

В самом деле, пусть есть ещё вторая проекция $\tilde{\pi}_{\mathcal{M},\mathcal{M}'}$ и пусть $f \in \mathrm{Fun}(\mathcal{M}')$ — тестовая функция. Тогда $(\tilde{\pi}^*_{\mathcal{M},\mathcal{M}'} - \pi^*_{\mathcal{M},\mathcal{M}'})(f)$ проецируется в 0 при отображении $\iota^*_{\mathcal{M}',\mathcal{M}}$ (проекции на фактор) и, следовательно, лежит в идеале $(\mathrm{im}(u_2^* - u_1^*))$. Следовательно, имеем разложение $(\tilde{\pi}^*_{\mathcal{M},\mathcal{M}'} - \pi^*_{\mathcal{M},\mathcal{M}'})(f) = \sum_i g_i \cdot (u_2^* - u_1^*)(h_i)$, для некоторых функций $g_i \in \mathrm{Fun}(\mathcal{M})$ и некоторых $h_i \in \mathrm{Fun}(\mathcal{N})$. Применим к этому разложению $Q_{\mathcal{M}}$:

$$\begin{aligned} Q_{\mathcal{M}}(\tilde{\pi}^*_{\mathcal{M},\mathcal{M}'} - \pi^*_{\mathcal{M},\mathcal{M}'})(f) &= \sum_i Q_{\mathcal{M}}(g_i) \cdot (u_2^* - u_1^*)(h_i) + g_i \cdot Q_{\mathcal{M}}(u_2^* - u_1^*)(h_i) && (208)\\ &= \sum_i Q_{\mathcal{M}}(g_i) \cdot (u_2^* - u_1^*)(h_i) + g_i \cdot (u_2^* - u_1^*) Q_{\mathcal{N}}(h_i) && (209)\end{aligned}$$

где в первом равенстве использовано правило Лейбница, а во втором — то, что $u^*_{1,2}$ коммутируют с Q. Тем самым $Q_{\mathcal{M}}(\tilde{\pi}^*_{\mathcal{M},\mathcal{M}'} - \pi^*_{\mathcal{M},\mathcal{M}'})(f)$ лежит в идеале $(\mathrm{im}(u_2^* - u_1^*))$, а значит $\iota^*_{\mathcal{M}',\mathcal{M}} Q_{\mathcal{M}}(\tilde{\pi}^*_{\mathcal{M},\mathcal{M}'} - \pi^*_{\mathcal{M},\mathcal{M}'}) = 0$ и, следовательно, $Q_{\mathcal{M}'}$ не зависит от выбора проекции $\pi_{\mathcal{M},\mathcal{M}'}$. Что и требовалось доказать.

Далее, легко понять, почему $Q^2_{\mathcal{M}'} = 0$. В самом деле,

$$Q^2_{\mathcal{M}'} = \iota^*_{\mathcal{M}',\mathcal{M}} Q^2_{\mathcal{M}} \pi^*_{\mathcal{M},\mathcal{M}'} - \iota^*_{\mathcal{M}',\mathcal{M}} Q_{\mathcal{M}} (1 - \pi^*_{\mathcal{M},\mathcal{M}'} \iota^*_{\mathcal{M}',\mathcal{M}}) Q_{\mathcal{M}} \pi^*_{\mathcal{M},\mathcal{M}'} \tag{210}$$

первое слагаемое равно 0, потому что $Q^2_{\mathcal{M}} = 0$ по условию. Второе слагаемое равно 0, потому что $1 - \pi^*_{\mathcal{M},\mathcal{M}'} \iota^*_{\mathcal{M}',\mathcal{M}}$ — это проекция на идеал $(\mathrm{im}(u_2^* - u_1^*)) \subset \mathrm{Fun}(\mathcal{M})$, а как мы только что показали этот идеал замкнут относительно действия $Q_{\mathcal{M}}$. Таким образом $Q^2_{\mathcal{M}'} = 0$.

□

Доказательство Утверждения 12. Часть (2) Утверждения есть линейный частный случай Леммы 2: $\mathcal{M} = V[1]$, $\mathcal{N} = W[1]$ — градуированные векторные пространства, $Q_{\mathcal{M}} = Q_V$, $Q_{\mathcal{N}} = Q_W$; отображения $u_{1,2}$ в данном случае — линейные L_∞-морфизмы $\pi_{1,2}$. Из их линейности следует, что подмногообразие $\mathcal{M}' = V'[1]$ является векторным подпространством. То, что $\pi_{V,V'}$ является L_∞-морфизмом, следует из конструкции (201), а то, что вложение $\iota_{V',V}$ есть L_∞-морфизм, следует из Леммы 2.

Классическая часть мастер-уравнения (205) очевидно следует из Леммы 2. Докажем квантовую часть мастер-уравнения (206): $Q_{V'}(\log \rho_{V'}) + \mathrm{div}\, Q_{V'} = 0$. Поскольку вложение

$\iota_{V',V} : V' \to V$ — (линейный) L_∞-морфизм, проекция $\pi = \pi_1 \iota_{V',V} : V' \to W$ также есть (линейный) L_∞-морфизм. Поэтому

$$\begin{aligned} Q_{V'}(\log \rho_{V'}) &= Q_{V'}(\iota^*_{V',V} \log \rho_V - \pi^* \log \rho_W) && (211) \\ &= \iota^*_{V',V} Q_V \log \rho_V - \pi^* Q_W \log \rho_W && (212) \\ &= -\iota^*_{V',V} \mathrm{div}\, Q_V + \pi^* \mathrm{div}\, Q_W && (213) \end{aligned}$$

где в последнем равенстве мы использовали квантовое мастер-уравнение на V и W. Тем самым, осталось показать, что

$$(\mathrm{div}\, Q_V)|_{V'[1]} = \mathrm{div}\, Q_{V'} + \pi^* \mathrm{div}\, Q_W \tag{214}$$

Испльзуем разложение Q_V по L_∞-операциям на $l_{V(n)} : \Lambda^n V \to V$:

$$Q_V = -\left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} l_{V(n)}(\omega, \cdots, \omega), \frac{\partial}{\partial \omega} \right\rangle \tag{215}$$

Разложим ω на касательную и нормальную к V' компоненты: $\omega = \omega' + \omega''$, где $\omega' = (\mathrm{id}_V - \iota_- \pi_-)\omega$ и $\omega'' = \iota_- \pi_- \omega$. Вычислим дивергенцию $(\mathrm{div}\, Q_V)|_{V'[1]}$:

$$\begin{aligned} (\mathrm{div}\, Q_V)|_{V'[1]} &= -\left(\mathrm{Str}_V \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} l_{V(n)}(\omega, \cdots, \omega, \bullet) \right)\Bigg|_{V'[1]} && (216) \\ &= -\mathrm{Str}_{V'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} l_{V(n)}(\omega', \cdots, \omega', \bullet) - && (217) \\ &\quad -\mathrm{Str}_{V''} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} l_{V(n)}(\omega', \cdots, \omega', \bullet) \\ &= \mathrm{div}\, Q_{V'} - \mathrm{Str}_{V''} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} l_{V(n)}(\omega', \cdots, \omega', \bullet) && (218) \end{aligned}$$

(это просто разложение дивергенции на касательную и нормальную части). Осталось вычислить последнее слагаемое, т.е. нормальную часть дивергенции $(\mathrm{div}'' Q_V)|_{V'[1]}$:

$$\begin{aligned} \pi_- l_{V(n)}(\omega', \cdots, \omega', \iota_- x) &= (\pi_2 - \pi_1) l_{V(n)}(\omega', \cdots, \omega', \iota_- x) && (219) \\ &= l_{W(n)}(\pi\omega', \cdots, \pi\omega', \pi_- \iota_- x) && (220) \\ &= l_{W(n)}(\pi\omega', \cdots, \pi\omega', x) && (221) \end{aligned}$$

где $x \in W$, $l_{W(n)}$ — операции в W, и мы воспользвались тем, что проекции $\pi_{1,2}$ являются L_∞-морфизмами и следовательно проносятся через операции. Отсюда немедленно вытекает, что $\mathrm{Str}_{V''} l_{V(n)}(\omega', \cdots, \omega', \bullet) = \mathrm{Str}_W l_{W(n)}(\pi\omega', \cdots, \pi\omega', \bullet)$. Тем самым доказано, что $(\mathrm{div}'' Q_V)|_{V'[1]} = \pi^* \mathrm{div}\, Q_W$, откуда получаем (214).

□

Отметим, что ключевым местом вывода, из-за которого нам пришлось вводить вложения $\iota_{1,2}$ с непересекающимися образами является переход (220)-(221), где используется $\pi_-\iota_- = \mathrm{id}_W$.

Важный частный случай склейки такой: исходная qL_∞-алгебра — это прямая сумма двух qL_∞-алгебр: $V = V_1 \oplus V_2$, $Q_V = Q_{V_1} \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes Q_{V_2}$, $\rho_V = \rho_{V_1} \otimes \rho_{V_2}$. При этом вложения и проекции устроены как $\iota_1, \pi_1 : W \rightleftarrows V_1$ и $\iota_2, \pi_2 : W \rightleftarrows V_2$ (и конечно мы требуем, чтобы проекции были L_∞-морфизмами). Тем самым есть два отдельных разложения $V_1 = U_1 \oplus \iota_1(W)$, $V_2 = U_2 \oplus \iota_2(W)$. Склеенная qL_∞-структура возникает на $V' = U_1 \oplus U_2 \oplus \iota_+(W)$.

Для случая симплициальной BF-теории это значит следующее: пусть есть три симплициальных комплекса Ξ_1, Ξ_2 и F, причём F вкладывается как симплициальный подкомлекс в Ξ_1 и в Ξ_2. Тогда на коцепных комплексах $V_{1,2} = \mathfrak{g} \otimes C^\bullet(\Xi_{1,2})$, $W = \mathfrak{g} \otimes C^\bullet(F)$ возникают естественные данные склейки - вложения и проекции. Именно, пусть $\{\sigma^1\}$, $\{\sigma^2\}$ — множества симплексов Ξ_1 и Ξ_2, не попадающих в образ F в Ξ_1 и Ξ_2, соотвественно, и пусть $\{\sigma^{1F}\}$ и $\{\sigma^{2F}\}$ — множества симплексов образов F в Ξ_1 и Ξ_2, соответственно, и также обзначим $\{\sigma^F\}$ множество симплексов F. Тогда вложения $\iota_{1,2}$ и проекции $\pi_{1,2}$ устроены очевидным образом:

$$\iota_{1,2}: \qquad e_{\sigma^F} \mapsto e_{\sigma^{1,2F}}$$

$$\pi_{1,2}: \begin{cases} e_{\sigma^{1,2F}} & \mapsto \quad e_{\sigma^F} \\ e_{\sigma^{1,2}} & \mapsto \quad 0 \end{cases}$$

Склеенное по этим отображениям из $C^\bullet(\Xi_{1,2})$ пространство с базисом $\{e_{\sigma^1}\} \cup \{e_{\sigma^2}\} \cup \{e_{\sigma^{+F}} = e_{\sigma^{1F}} + e_{\sigma^{2F}}\}$ естественно отождествляется с пространством коцепей $C^\bullet(\Xi')$ симплициального комплекса, склеенного из Ξ_1 и Ξ_2 по F, с множеством симплексов $\{\sigma^1\} \cup \{\sigma^2\} \cup \{\sigma^{+F}\}$. То, что проекции $\pi_{1,2}$ являются L_∞-морфизмами для соответствующих L_∞-алгебр, следует из (187). В самом деле,

$$\pi_1 l_{\Xi_1(n)} \left(\sum_{\sigma^1} e_{\sigma^1} \omega^{\sigma^1} + \sum_{\sigma^{1F}} e_{\sigma^{1F}} \omega^{\sigma^{1F}}, \ldots, \sum_{\sigma^1} e_{\sigma^1} \omega^{\sigma^1} + \sum_{\sigma^{1F}} e_{\sigma^{1F}} \omega^{\sigma^{1F}} \right)$$
$$= l_{F(n)} \left(\sum_{\sigma^{1F}} \pi_1(e_{\sigma^{1F}}) \omega^{\sigma^{1F}}, \ldots, \sum_{\sigma^{1F}} \pi_1(e_{\sigma^{1F}}) \omega^{\sigma^{1F}} \right)$$

т.е. проекция проносится через классические операции — условие линейного L_∞-морфизма, и точно так же для π_2. Если исходные qL_∞-структуры на $\mathfrak{g} \otimes C^\bullet(\Xi_{1,2})$ имеют вид

$$Q_{\Xi^1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \Xi_1} (-1)^{|\sigma|+1} l^{\sigma}_{\Xi_1(n)} \left(e_{\sigma_1} \omega^{\sigma_1}, \ldots, e_{\sigma_n} \omega^{\sigma_n} \right) \frac{\partial}{\partial \omega^\sigma}$$
$$Q_{\Xi^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \Xi_2} (-1)^{|\sigma|+1} l^{\sigma}_{\Xi_2(n)} \left(e_{\sigma_1} \omega^{\sigma_1}, \ldots, e_{\sigma_n} \omega^{\sigma_n} \right) \frac{\partial}{\partial \omega^\sigma}$$

$$
\begin{aligned}
\log \rho_{\Xi_1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n \in \Xi_1} q_{\Xi_1(n)} \left(e_{\sigma_1} \omega^{\sigma_1}, \ldots, e_{\sigma_n} \omega^{\sigma_n}\right) \\
\log \rho_{\Xi_2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n \in \Xi_2} q_{\Xi_2(n)} \left(e_{\sigma_1} \omega^{\sigma_1}, \ldots, e_{\sigma_n} \omega^{\sigma_n}\right)
\end{aligned}
$$

то, согласно общей конструкции склейки, qL_∞-структура на $\mathfrak{g} \otimes C^\bullet(\Xi')$ есть

$$
\begin{aligned}
Q_{\Xi'} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma^1 \in \Xi_1 \setminus F;\ \sigma_1,\ldots,\sigma_n \in \Xi_1 \subset \Xi'} (-1)^{|\sigma^1|+1} l^{\sigma^1}_{\Xi_1(n)} \left(e_{\sigma_1} \omega^{\sigma_1}, \ldots, e_{\sigma_n} \omega^{\sigma_n}\right) \frac{\partial}{\partial \omega^{\sigma^1}} + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma^2 \in \Xi_2 \setminus F;\ \sigma_1,\ldots,\sigma_n \in \Xi_2 \subset \Xi'} (-1)^{|\sigma^2|+1} l^{\sigma^2}_{\Xi_2(n)} \left(e_{\sigma_1} \omega^{\sigma_1}, \ldots, e_{\sigma_n} \omega^{\sigma_n}\right) \frac{\partial}{\partial \omega^{\sigma^2}} + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma^{+F}, \sigma_1^{+F},\ldots,\sigma_n^{+F} \in F \subset \Xi'} (-1)^{|\sigma^{+F}|+1} l^{\sigma^{+F}}_{F(n)} \left(e_{\sigma_1^{+F}} \omega^{\sigma_1^{+F}}, \ldots, e^{+F}_{\sigma_n} \omega^{\sigma_n^{+F}}\right) \frac{\partial}{\partial \omega^{\sigma^{+F}}} \\
\log \rho_{\Xi'} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n \in \Xi_1 \subset \Xi'} q_{\Xi_1(n)} \left(e_{\sigma_1} \omega^{\sigma_1}, \ldots, e_{\sigma_n} \omega^{\sigma_n}\right) + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n \in \Xi_2 \subset \Xi'} q_{\Xi_2(n)} \left(e_{\sigma_1} \omega^{\sigma_1}, \ldots, e_{\sigma_n} \omega^{\sigma_n}\right) - \\
&- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma_1^{+F},\ldots,\sigma_n^{+F} \in F \subset \Xi'} q_{F(n)} \left(e_{\sigma_1^{+F}} \omega^{\sigma_1^{+F}}, \ldots, e^{+F}_{\sigma_n} \omega^{\sigma_n^{+F}}\right)
\end{aligned}
$$

Или, в более лаконичной записи,

$$
\begin{aligned}
Q_{\Xi'} &= Q_{\Xi_1}\big|_{\omega^{\sigma 1F} \mapsto \omega^{\sigma+F},\ \frac{\partial}{\partial \omega^{\sigma 1F}} \mapsto \frac{\partial}{\partial \omega^{\sigma+F}}} + Q_{\Xi_2}\big|_{\omega^{\sigma 2F} \mapsto \omega^{\sigma+F},\ \frac{\partial}{\partial \omega^{\sigma 2F}} \mapsto \frac{\partial}{\partial \omega^{\sigma+F}}} - \\
&\quad - Q_F\big|_{\omega^{\sigma F} \mapsto \omega^{\sigma+F},\ \frac{\partial}{\partial \omega^{\sigma F}} \mapsto \frac{\partial}{\partial \omega^{\sigma+F}}} \\
\log \rho_{\Xi'} &= \log \rho_{\Xi_1}\big|_{\omega^{\sigma 1F} \mapsto \omega^{\sigma+F}} + \log \rho_{\Xi_2}\big|_{\omega^{\sigma 2F} \mapsto \omega^{\sigma+F}} - \log \rho_F\big|_{\omega^{\sigma F} \mapsto \omega^{\sigma+F}}
\end{aligned}
$$

Соответственно, склееное BF_∞-действие на $\mathfrak{g} \otimes C^\bullet(\Xi')$ можно записать как

$$
S_{\Xi'} = S_{\Xi_1}\big|_{\omega^{\sigma 1F} \mapsto \omega^{\sigma+F},\ p_{\sigma 1F} \mapsto p_{\sigma+F}} + S_{\Xi_2}\big|_{\omega^{\sigma 2F} \mapsto \omega^{\sigma+F},\ p_{\sigma 2F} \mapsto p_{\sigma+F}} - S_F\big|_{\omega^{\sigma F} \mapsto \omega^{\sigma+F},\ p_{\sigma F} \mapsto p_{\sigma+F}} \tag{222}
$$

Таким образом, итерируя данную конструкцию, мы можем “склеить” симплициальное действие S_Ξ для произвольного симплициального комплекса Ξ из действий для отдельных симплексов: мы начинаем с любого выбранного симплекса, и подклеиваем остальные симплексы по очереди. Полученное таким образом S_Ξ, согласно Утверждению 12, по конструкции удовлетворяет мастер-уравнению. То, что S_Ξ не зависит от порядка склейки симплексов, следует из того, что действия на отдельных симплексах мы можем записать как

$$
S_\sigma = \sum_{\sigma' \subset \sigma} \bar{S}'_\sigma
$$

и тогда для S_Ξ, с помощью (222), получаем выражение (187), явно не зависящее от порядка склейки. При этом мы никак не используем конструкцию эффективного действия и многообразие M, геометрически реализующее симплициальный комплекс Ξ. Поэтому конструкция склейки даёт более общий вариант симплициальной BF-теории, именно Ξ — произвольный симплициальный комплекс, не обязательно триангуляция некоторого многообразия.

Приведём также пример склейки, когда V не представляется как $V_1 \oplus V_2$: склеивание отрезка в окружность. Общая конструкция успешно обслуживает эту ситуацию. Имеем $V = \mathfrak{g}e_0 \oplus \mathfrak{g}e_1 \oplus \mathfrak{g}e_{01}$ — коцепной комплекс (триангулированного) отрезка $[0,1]$, где $e_{0,1,01}$ — базисные коцепи. Далее, $W = \mathfrak{g}e_A$ (A - название точки склейки). Проекции $\pi_{1,2}$ и вложения $\iota_{1,2}$ зададим как

$$\pi_1 : xe_0 + ye_1 + ze_{01} \mapsto xe_A \tag{223}$$

$$\pi_2 : xe_0 + ye_1 + ze_{01} \mapsto ye_A \tag{224}$$

$$\iota_1 : xe_A \mapsto xe_0 \tag{225}$$

$$\iota_2 : xe_A \mapsto xe_1 \tag{226}$$

Тогда получаем по конструкции $V = V' \oplus V''$, где $V' = \ker \pi_- = \mathfrak{g} \otimes e_+ \oplus \mathfrak{g} \otimes e_{01}$ (здесь $e_+ = \iota_+(e_A) = e_1 + e_2$) — коцепной комплекс окружности, вложенный в коцепной комплекс отрезка, и $V'' = \mathfrak{g} \otimes e_-$, где $e_- = \iota_-(e_A) = \frac{e_2 - e_1}{2}$, — коцепной комплекс точки A, вложенный как линейное подпространство (не подкомплекс) в V.

5.4.1. *Конструкция наложения граничного условия.* Опишем ещё одну общую конструкцию для qL_∞-алгебр, похожую на конструкцию склейки, но более простую — конструкцию наложения граничного условия (иначе, конструкция отрывания подкомплеса). Пусть V и W — две qL_∞-алгебры и задан линейный L_∞-морфизм $\pi_1 : V \to W$. Тогда на $V' = \ker \pi_1 \subset V$ возникает ограниченная qL_∞-структура $Q_{V'} = (Q_V)|_{V'}$, $\rho_{V'} = (\rho_V)|_{V'}$. Классическое мастер-уравнение выполняется по Лемме 2, а квантовое доказывается проверкой того, что нормальная часть дивергенции $\mathrm{div}'' Q_V = 0$, рассуждением аналогичным (219)-(221).

Геометрический пример здесь следующий: пусть есть пара симплициальный комплекс Ξ и его симплициальный подкомплекс F, тогда $V = \mathfrak{g} \otimes C^\bullet(\Xi)$, $W = \mathfrak{g} \otimes C^\bullet(F)$, проекция строится по геометрическому вложению. Тогда индуцируется qL_∞-структура на $V' = \mathfrak{g} \otimes C^\bullet(\Xi')$, где $\Xi' = \Xi \backslash F$, уже не обязательно симплициальный комплекс.

Например, можно взять в качестве Ξ отрезок $[0,1]$, а в качестве F — точку $[A]$, вложенную как правый конец отрезка $[1]$. Тогда Ξ' — это отрезок без правой граничной точки, и это, конечно, не клеточный комплекс, однако коцепной комплекс (в отличие от цепного) там определён: $V' = \mathfrak{g}\otimes e_0 \oplus \mathfrak{g}\otimes e_{01}$ и на нём есть остаточная qL_∞-структура.

Мы доведём этот пример, а также пример склейки отрезка в окружность, до явных ответов в разделе 5.5.3.

5.4.2. *Согласованность операций склеивания и индуцирования.* В этом разделе мы докажем некоторое общее утверждение, позволяющее (при выполнении некоторых условий согласования) утверждать, что операции склеивания и индуцирования для qL_∞ алгебр коммутируют. В частности, оно позволяет в некоторых случаях интерпретировать склейку эффективных BF_∞-действий, как эффективное действие для другой BF_∞-теории (что очень полезно как косвенный способ вычислять эффективное действие, поскольку склейка — технически гораздо более простая операция, чем индуцирование). Также это утверждение можно понимать как абстрактный вариант Теоремы 7.

Пусть есть две qL_∞-алгебры (V, Q_V, ρ_V), (W, Q_W, ρ_W) и данные склейки для них $\pi_{1,2} : V \to W$, $\iota_{1,2} : W \to V$. Тогда на $V' = \ker \pi_-$ есть склеенная qL_∞ структура $(V', Q_{V'}, \rho_{V'})$ (все обозначения — как в Определениях 18,19). Пусть также есть два ретракта $\bar V \hookrightarrow V$, $\bar W \hookrightarrow W$ и заданы два набора данных индуцирования: $V \xrightarrow{(\iota_V, r_V, K_V)} \bar V$ и $W \xrightarrow{(\iota_W, r_W, K_W)} \bar W$ (стрелки означают не направление, в котором бьют отображения (ι, r, K), а направление, в котором переносится qL_∞-структура). Тогда на $\bar V$, $\bar W$ возникают индуцированные qL_∞-структуры (с помощью формул гомотопического переноса (147,148), см. Определение 14): $(\bar V, Q_{\bar V}, \rho_{\bar V})$ и $(\bar W, Q_{\bar W}, \rho_{\bar W})$. Таким образом, имеется следующий набор данных:

$$\begin{array}{ccc} (V, Q_V, \rho_V),\ (W, Q_W, \rho_W) & \xrightarrow[\text{индуцирование}]{(\iota_V, r_V, K_V),\ (\iota_W, r_W, K_W)} & (\bar V, Q_{\bar V}, \rho_{\bar V}),\ (\bar W, Q_{\bar W}, \rho_{\bar W}) \\ {\scriptstyle (\pi_{1,2}, \iota_{1,2})}\big\downarrow{\scriptstyle \text{склейка}} & & \\ (V', Q_{V'}, \rho_{V'}) & & \end{array} \tag{227}$$

Определение 20 (Согласованность данных склейки и данных индуцирования, индуцированные данные склейки, склеенные данные индуцирования)**.** *Мы называем пару данных индуцирования* (ι_V, r_V, K_V), (ι_W, r_W, K_W) *согласованной с данными склейки* $(\pi_{1,2}, \iota_{1,2})$, *если выполнено*

$$\iota_W \bar\pi_1 = \pi_1 \iota_V, \quad \iota_W \bar\pi_2 = \pi_2 \iota_V \tag{228}$$

$$r_W \pi_1 = \bar\pi_1 r_V, \quad r_W \pi_2 = \bar\pi_2 r_V \tag{229}$$

$$K_W \pi_1 = \pi_1 K_V, \quad K_W \pi_2 = \pi_2 K_V \tag{230}$$

где введена пара проекций $\bar\pi_{1,2} : \bar V \to \bar W$*:*

$$\bar\pi_1 = r_W \pi_1 \iota_V, \quad \bar\pi_2 = r_W \pi_2 \iota_V \tag{231}$$

Если (228,229,230) выполнено, то мы называем индуцированными данными склейки набор отображений $\bar\pi_{1,2} : \bar V \to \bar W$, $\bar\iota_{1,2} : \bar W \to \bar V$, где проекции задаются с помощью (231) и вложения есть

$$\bar\iota_1 = r_V \iota_1 \iota_W, \quad \bar\iota_2 = r_V \iota_2 \iota_W \tag{232}$$

Далее, мы вводим линейные комбинации проекций и вложений $\bar\pi_\pm : \bar V \to \bar W$, $\bar\iota_\pm : \bar W \to \bar V$ как в (198) и определяем склеенное пространство $\bar V' = \ker \bar\pi_- \subset \bar V$, вместе с вложением $\iota_{\bar V', \bar V} : \bar V' \to \bar V$ и проекцией $\pi_{\bar V, \bar V'} : \bar V \to \bar V'$. Мы называем склеенными данными индуцирования $(\iota_{V'}, r_{V'}, K_{V'})$ следующий набор отображений:

$$\iota_{V'} = \pi_{V,V'} \iota_V \iota_{\bar V', \bar V} : \quad \bar V' \to V' \tag{233}$$

$$r_{V'} = \pi_{\bar V, \bar V'} r_V \iota_{V',V} : \quad V' \to \bar V' \tag{234}$$

$$K_{V'} = \pi_{V,V'} K_V \iota_{V',V} : \quad V' \to V' \tag{235}$$

Утверждение 13. *Пусть данные индуцирования (ι_V, r_V, K_V), (ι_W, r_W, K_W) и согласованные с ними данные склейки $(\pi_{1,2}, \iota_{1,2})$, т.е. выполнено (228–230). Тогда:*

1. *Отображения (231,232) удовлетворяют аксиомам данных склейки (191–194).*
2. *Отображения (233–235) удовлетворяют аксиомам данных индуцирования (121–126).*
3. *Склеенная с помощью данных склейки $(\bar\pi_{1,2}, \bar\iota_{1,2})$ qL_∞-структура на $\bar V'$ совпадает с индуцированной с помощью данных индуцирования $(\iota_{V'}, r_{V'}, K_{V'})$.*

Иными словами, диаграмма (227) достраивается до коммутативного квадрата

$$\begin{array}{ccc}
(V, Q_V, \rho_V),\ (W, Q_W, \rho_W) & \xrightarrow[\text{индуцирование}]{(\iota_V, r_V, K_V),\ (\iota_W, r_W, K_W)} & (\bar V, Q_{\bar V}, \rho_{\bar V}),\ (\bar W, Q_{\bar W}, \rho_{\bar W}) \\
{\scriptstyle (\pi_{1,2}, \iota_{1,2})}\Big\downarrow{\scriptstyle \text{склейка}} & & {\scriptstyle (\bar\pi_{1,2}, \bar\iota_{1,2})}\Big\downarrow{\scriptstyle \text{индуцированная склейка}} \\
(V', Q_{V'}, \rho_{V'}) & \xrightarrow[\text{склеенное индуцирование}]{(\iota_{V'}, r_{V'}, K_{V'})} & (\bar V', Q_{\bar V'}, \rho_{\bar V'})
\end{array} \tag{236}$$

Доказательство. Сначала докажем (1). Аксиомы (191,192) склейки проверяются тривиально с помощью (228,229):

$$\bar\pi_1 \bar\iota_1 = \bar\pi_1 r_V \iota_1 \iota_W = r_W \pi_1 \iota_1 \iota_W = r_W \mathrm{id}_W \iota_W = \mathrm{id}_{\bar W}$$

$$\bar\pi_1 \bar\iota_2 = \bar\pi_1 r_V \iota_2 \iota_W = r_W \underbrace{\pi_1 \iota_2}_{=0} \iota_W = 0$$

и аналогично проверяется $\bar\pi_2 \bar\iota_2 = \mathrm{id}_{\bar W}$, $\bar\pi_2 \bar\iota_1 = 0$. Теперь мы должны проверить, что $\bar\pi_{1,2}$ являются L_∞-морфизмами, т.е., что

$$\bar\pi_1 l_{\bar V(n)}(\omega_{\bar V}, \ldots, \omega_{\bar V}) = l_{\bar W(n)}(\bar\pi_1 \omega_{\bar V}, \ldots, \bar\pi_1 \omega_{\bar V}), \quad \bar\pi_2 l_{\bar V(n)}(\omega_{\bar V}, \ldots, \omega_{\bar V}) = l_{\bar W(n)}(\bar\pi_2 \omega_{\bar V}, \ldots, \bar\pi_2 \omega_{\bar V})$$

для $n \geq 1$. Индуцированные L_∞-операции $l_{\bar V(n)} : \Lambda^n \bar V \to \bar V, \quad l_{\bar W(n)} : \Lambda^n \bar W \to \bar W$ строятся с помощью (147) как суммы по деревьям:

$$\begin{aligned}
l_{\bar V(n)}(\omega_{\bar V}, \ldots, \omega_{\bar V}) &= n! \sum_{T \in \mathbf{T}_{\text{nonPl}}:\ |T|=n} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(T)|} \cdot \\
&\qquad \cdot \mathrm{Iter}_{T;\{-K_V l_{V(m)}\}_{m\geq 2};\{r_V l_{V(m)}\}_{m\geq 2}}(\iota_V(\omega_{\bar V}), \ldots, \iota_V(\omega_{\bar V})) \\
l_{\bar W(n)}(\omega_{\bar W}, \ldots, \omega_{\bar W}) &= n! \sum_{T \in \mathbf{T}_{\text{nonPl}}:\ |T|=n} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(T)|} \cdot \\
&\qquad \cdot \mathrm{Iter}_{T;\{-K_W l_{W(m)}\}_{m\geq 2};\{r_W l_{W(m)}\}_{m\geq 2}}(\iota_W(\omega_{\bar W}), \ldots, \iota_W(\omega_{\bar W}))
\end{aligned}$$

для $n \geq 2$ (для $n = 1$ унарные операции — дифференциалы соответствующих комплексов $l_{\bar V(1)} = d_{\bar V}$, $l_{\bar W(1)} = d_{\bar W}$). Пользуясь (228–230) и (195), получаем

$$\begin{aligned}
&\bar\pi_1 l_{\bar V(n)}(\omega_{\bar V}, \ldots, \omega_{\bar V}) \\
&\quad = n! \sum_{T \in \mathbf{T}_{\text{nonPl}}:\ |T|=n} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(T)|} \mathrm{Iter}_{T;\{-K_V l_{V(m)}\}_{m\geq 2};\{\underbrace{\bar\pi_1 r_V}_{=r_W \pi_1} l_{V(m)}\}_{m\geq 2}}(\iota_V(\omega_{\bar V}), \ldots, \iota_V(\omega_{\bar V})) \\
&\quad = n! \sum_{T \in \mathbf{T}_{\text{nonPl}}:\ |T|=n} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(T)|} \mathrm{Iter}_{T;\{-K_W l_{W(m)}\}_{m\geq 2};\{r_W l_{W(m)}\}_{m\geq 2}}(\underbrace{\pi_1 \iota_V(\omega_{\bar V})}_{=\iota_W \bar\pi_1 \omega_{\bar V}}, \ldots, \underbrace{\pi_1 \iota_V(\omega_{\bar V})}_{=\iota_W \bar\pi_1 \omega_{\bar V}}) \\
&\quad = l_{\bar W(n)}(\bar\pi_1 \omega_{\bar V}, \ldots, \bar\pi_1 \omega_{\bar V})
\end{aligned}$$

для $n \geq 2$. Для $n = 1$ мы должны проверить, что проекция $\bar\pi_1$ — цепное отображение, что очевидно, поскольку она является по определению (231) композицией цепных отображений. Таким образом, мы проверили, что $\bar\pi_1$ есть L_∞-морфизм. Для $\bar\pi_2$ проверка аналогичная. Тем самым, мы доказали часть (1) Утверждения.

Докажем часть (2). То, что $\iota_{V'}, r_{V'}$ — цепные отображения (аксиомы (121,122)), следует из части (2) Утверждения 12: $\iota_{V',V}, \pi_{V,V'}$ и $\iota_{\bar V',\bar V}, \pi_{\bar V,\bar V'}$ являются L_∞-морфизмами, и, в частности, цепными отображениями. Следовательно, склеенное вложение $\iota_{V'}$ (233) и склеенная ретракция $r_{V'}$ (234) являются композициями цепных отображений, а значит, и сами являются цепными отображениями. Далее, для проверки аксиомы (123), воспользуемся следующим представлением для проекции на склеенное пространство:

$$\iota_{V',V} \pi_{V,V'} = \mathrm{id}_V - \iota_- \pi_-$$

(очевидно из конструкции склеенного пространства $V' = \ker \pi_-$). Отсюда следует

$$r_{V'} \iota_{V'} = \pi_{\bar V,\bar V'} r_V \underbrace{\iota_{V',V} \pi_{V,V'}}_{=\mathrm{id}_V - \iota_- \pi_-} \iota_V \iota_{\bar V',\bar V} = \mathrm{id}_{\bar V'} - \pi_{\bar V,\bar V'} r_V \iota_- \underbrace{\pi_- \iota_V}_{=\iota_W \bar\pi_-} \iota_{\bar V',\bar V} = \mathrm{id}_{\bar V'} - 0$$

Последнее слагаемое равно нулю, поскольку проекция $\bar\pi_-$ равна нулю на образе вложения $\iota_{\bar V',\bar V}$. Аналогично проверяется и аксиома (124):

$$r_{V'}K_{V'} = \pi_{\bar V,\bar V'}r_V\underbrace{\iota_{V',V}\pi_{V,V'}}_{=\mathrm{id}_V-\iota_-\pi_-}K_V\iota_{V',V} = \pi_{\bar V,\bar V'}\underbrace{r_VK_V}_{=0}\iota_{V',V} - \pi_{\bar V,\bar V'}r_V\iota_-\pi_-K_V\iota_{V',V} =$$

$$= 0 - \pi_{\bar V,\bar V'}r_V\iota_-K_W\underbrace{\pi_-\iota_{V',V}}_{=0} = 0$$

$$K_{V'}\iota_{V'} = \pi_{V,V'}K_V\underbrace{\iota_{V',V}\pi_{V,V'}}_{=\mathrm{id}_V-\iota_-\pi_-}\iota_V\iota_{\bar V',\bar V} = \pi_{V,V'}\underbrace{K_V\iota_V}_{=0}\iota_{\bar V',\bar V} - \pi_{V,V'}K_V\iota_-\pi_-\iota_V\iota_{\bar V',\bar V} =$$

$$= 0 - \pi_{V,V'}K_V\iota_-\iota_W\underbrace{\bar\pi_-\iota_{\bar V',\bar V}}_{=0} = 0$$

Далее, проверим свойство цепной гомотопии (125):

$$d_{V'}K_{V'}+K_{V'}d_{V'} = \pi_{V,V'}(\underbrace{d_VK_V+K_Vd_V}_{=\mathrm{id}_V-\iota_Vr_V})\iota_{V',V} = \mathrm{id}_{V'}-\pi_{V,V'}\iota_V(\underbrace{\iota_{\bar V',\bar V}\pi_{\bar V,\bar V'}+\bar\iota_-\bar\pi_-}_{=\mathrm{id}_{\bar V}})r_V\iota_{V',V} =$$

$$= \mathrm{id}_{V'} - \iota_{V'}r_{V'} - \pi_{V,V'}\iota_V\bar\iota_-r_W\underbrace{\pi_-\iota_{V',V}}_{=0} = \mathrm{id}_{V'} - \iota_{V'}r_{V'}$$

Наконец, проверим (126):

$$(K_{V'})^2 = \pi_{V,V'}K_V\underbrace{\iota_{V',V}\pi_{V,V'}}_{=\mathrm{id}_V-\iota_-\pi_-}K_V\iota_{V',V} = \pi_{V,V'}\underbrace{(K_V)^2}_{=0}\iota_{V',V} - \pi_{V,V'}K_V\iota_-K_W\underbrace{\pi_-\iota_{V',V}}_{=0} = 0$$

Итак, часть (2) Утверждения доказана.

Обратимся к части (3). Классические операции склеенной из $(\bar V, Q_{\bar V}, \rho_{\bar V})$, $(\bar W, Q_{\bar W}, \rho_{\bar W})$ qL_∞-структуры на $\bar V'$, согласно (203), имеют вид

$$l_{\bar V'(n)}(\omega_{\bar V'},\ldots,\omega_{\bar V'}) = \pi_{\bar V,\bar V'}l_{\bar V(n)}(\iota_{\bar V',\bar V}\omega_{\bar V'},\ldots,\iota_{\bar V',\bar V}\omega_{\bar V'}) =$$
$$= n!\sum_{T\in\mathbf{T}_{\mathrm{nonPl}}:\ |T|=n}\frac{1}{|\mathrm{Aut}(T)|}\mathrm{Iter}_{T;\{-K_Vl_{V(m)}\}_{m\ge2};\{\pi_{\bar V,\bar V'}r_Vl_{V(m)}\}_{m\ge2}}(\iota_V\iota_{\bar V',\bar V}\omega_{\bar V'},\ldots,\iota_V\iota_{\bar V',\bar V}\omega_{\bar V'}) \tag{237}$$

Воспользуемся тем, что

$$\pi_{\bar V,\bar V'}r_V = \pi_{\bar V,\bar V'}r_V(\iota_{V',V}\pi_{V,V'}+\iota_-\pi_-) = r_{V'}\pi_{V,V'} + \pi_{\bar V,\bar V'}r_V\iota_-\pi_- \tag{238}$$

и тем, что $\pi_{V,V'}$ и $\pi_{1,2}$ являются L_∞-морфизмами:

$$\mathrm{Iter}_{T;\{-K_Vl_{V(m)}\}_{m\ge2};\{\pi_{\bar V,\bar V'}r_Vl_{V(m)}\}_{m\ge2}}(\iota_V\iota_{\bar V',\bar V}\omega_{\bar V'},\ldots,\iota_V\iota_{\bar V',\bar V}\omega_{\bar V'}) =$$

$$= \mathrm{Iter}_{T;\{-K_Vl_{V(m)}\}_{m\ge2};\{(r_{V'}\pi_{V,V'}+\pi_{\bar V,\bar V'}r_V\iota_-\pi_-)l_{V(m)}\}_{m\ge2}}(\iota_V\iota_{\bar V',\bar V}\omega_{\bar V'},\ldots,\iota_V\iota_{\bar V',\bar V}\omega_{\bar V'}) =$$

$$= \mathrm{Iter}_{T;\{-K_Vl_{V(m)}\}_{m\ge2};\{r_{V'}l_{V'(m)}(\pi_{V,V'}\bullet,\ldots,\pi_{V,V'}\bullet)\}_{m\ge2}}(\iota_V\iota_{\bar V',\bar V}\omega_{\bar V'},\ldots,\iota_V\iota_{\bar V',\bar V}\omega_{\bar V'}) +$$

$$+ \mathrm{Iter}_{T;\{-K_Wl_{W(m)}\}_{m\ge2};\{\pi_{\bar V,\bar V'}r_V\iota_-l_{W(m)}\}_{m\ge2}}(\iota_W\underbrace{\bar\pi_2\iota_{\bar V',\bar V}}_{=\bar\pi}\omega_{\bar V'},\ldots,\iota_W\underbrace{\bar\pi_2\iota_{\bar V',\bar V}}_{=\bar\pi}\omega_{\bar V'}) -$$

$$- \mathrm{Iter}_{T;\{-K_Wl_{W(m)}\}_{m\ge2};\{\pi_{\bar V,\bar V'}r_V\iota_-l_{W(m)}\}_{m\ge2}}(\iota_W\underbrace{\bar\pi_1\iota_{\bar V',\bar V}}_{=\bar\pi}\omega_{\bar V'},\ldots,\iota_W\underbrace{\bar\pi_1\iota_{\bar V',\bar V}}_{=\bar\pi}\omega_{\bar V'}) =$$

$$= \mathrm{Iter}_{T;\{-K_V l_{V(m)}\}_{m\geq 2};\{r_{V'}l_{V'(m)}(\pi_{V,V'}\bullet,\dots,\pi_{V,V'}\bullet)\}_{m\geq 2}}(\iota_V\iota_{\bar V',\bar V}\omega_{\bar V'},\dots,\iota_V\iota_{\bar V',\bar V}\omega_{\bar V'}) \quad (239)$$

где $\bar\pi = \bar\pi_1\iota_{\bar V',\bar V} = \bar\pi_2\iota_{\bar V',\bar V} : \bar V' \to \bar W$. Таким образом, второе слагаемое в (238) не даёт вклада в (237). Теперь мы хотим показать, что аналогичную манипуляцию по протаскиванию проекции $\pi_{V,V'}$ через вершину дерева мы можем проделать не только в корне дерева T, но и в любой внутренней вершине. Для этого рассмотрим поддерево $\tilde T \subset T$, имеющее корнем интересующую нас внутреннюю вершину T и содержащую всех её потомков. Имеем

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Iter}_{\tilde T;\{-K_V l_{V(m)}\}_{m\geq 2};\{-\pi_{V,V'}K_V l_{V(m)}\}_{m\geq 2}}(\iota_V\iota_{\bar V',\bar V}\omega_{\bar V'},\dots,\iota_V\iota_{\bar V',\bar V}\omega_{\bar V'}) = \\
&= \mathrm{Iter}_{\tilde T;\{-K_V l_{V(m)}\}_{m\geq 2};\{(-K_{V'}\pi_{V,V'}-\pi_{V,V'}K_V\iota_-\pi_-)l_{V(m)}\}_{m\geq 2}}(\iota_V\iota_{\bar V',\bar V}\omega_{\bar V'},\dots,\iota_V\iota_{\bar V',\bar V}\omega_{\bar V'}) = \\
&= \mathrm{Iter}_{\tilde T;\{-K_V l_{V(m)}\}_{m\geq 2};\{-K_{V'}l_{V'(m)}(\pi_{V,V'}\bullet,\dots,\pi_{V,V'}\bullet)\}_{m\geq 2}}(\iota_V\iota_{\bar V',\bar V}\omega_{\bar V'},\dots,\iota_V\iota_{\bar V',\bar V}\omega_{\bar V'}) + \\
&+ \mathrm{Iter}_{\tilde T;\{-K_W l_{W(m)}\}_{m\geq 2};\{-\pi_{V,V'}K_V\iota_- l_{W(m)}\}_{m\geq 2}}(\iota_W\underbrace{\bar\pi_2\iota_{\bar V',\bar V}}_{=\bar\pi}\omega_{\bar V'},\dots,\iota_W\underbrace{\bar\pi_2\iota_{\bar V',\bar V}}_{\bar\pi}\omega_{\bar V'}) - \\
&- \mathrm{Iter}_{\tilde T;\{-K_W l_{W(m)}\}_{m\geq 2};\{-\pi_{V,V'}K_V\iota_- l_{W(m)}\}_{m\geq 2}}(\iota_W\underbrace{\bar\pi_1\iota_{\bar V',\bar V}}_{=\bar\pi}\omega_{\bar V'},\dots,\iota_W\underbrace{\bar\pi_1\iota_{\bar V',\bar V}}_{\bar\pi}\omega_{\bar V'}) = \\
&= \mathrm{Iter}_{\tilde T;\{-K_V l_{V(m)}\}_{m\geq 2};\{-K_{V'}l_{V'(m)}(\pi_{V,V'}\bullet,\dots,\pi_{V,V'}\bullet)\}_{m\geq 2}}(\iota_V\iota_{\bar V',\bar V}\omega_{\bar V'},\dots,\iota_V\iota_{\bar V',\bar V}\omega_{\bar V'})
\end{aligned}$$

Отсюда по индукции получаем

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Iter}_{\tilde T;\{-K_V l_{V(m)}\}_{m\geq 2};\{-\pi_{V,V'}K_V l_{V(m)}\}_{m\geq 2}}(\iota_V\iota_{\bar V',\bar V}\omega_{\bar V'},\dots,\iota_V\iota_{\bar V',\bar V}\omega_{\bar V'}) = \\
&= \mathrm{Iter}_{\tilde T;\{-K_{V'}l_{V'(m)}\}_{m\geq 2};\{-K_{V'}l_{V'(m)}\}_{m\geq 2}}(\underbrace{\pi_{V,V'}\iota_V\iota_{\bar V',\bar V}}_{=\iota_{V'}}\omega_{\bar V'},\dots,\underbrace{\pi_{V,V'}\iota_V\iota_{\bar V',\bar V}}_{=\iota_{V'}}\omega_{\bar V'}) \quad (240)
\end{aligned}$$

Следовательно, мы можем, пользуясь (239,240) переписать склеенные L_∞-операции на $\bar V'$ (237) как

$$\begin{aligned}
&l_{\bar V'(n)}(\omega_{\bar V'},\dots,\omega_{\bar V'}) = \\
&= n!\sum_{T\in\mathbf{T}_{\mathrm{nonPl}}:\,|T|=n}\frac{1}{|\mathrm{Aut}(T)|}\mathrm{Iter}_{T;\{-K_{V'}l_{V'(m)}\}_{m\geq 2};\{r_{V'}l_{V'(m)}\}_{m\geq 2}}(\iota_{V'}(\omega_{\bar V'}),\dots,\iota_{V'}(\omega_{\bar V'}))
\end{aligned}$$

То есть, мы пришли в точности к выражению для индуцированных из L_∞-алгебры $(V', Q_{V'})$ L_∞-операций на $\bar V'$. Тем самым, мы доказали часть (3) на уровне классических операций. Ещё мы должны отдельно рассмотреть случай унарной операции $n=1$, поскольку представление для индуцированных операций в виде суммы по деревьям работает только для $n\geq 2$. Однако, проверка согласованности на уровне склеенной унарной операции (дифференциала) $l_{\bar V'(1)} = d_{\bar V'}$ состоит в проверке согласованности с ним данных индуцирования $(\iota_{V'}, r_{V'}, K_{V'})$, а точнее, в проверке аксиом (121,122), которая уже была нами проделана при доказательстве части (2) Утверждения.

Перейдём теперь к доказательству части (3) на уровне квантовых операций $q_{\bar{V}',(n)}$. Склеенные из $\bar{V}$, $\bar{W}$ квантовые операции на $\bar{V}'$, согласно (204), имеют вид

$$\begin{aligned}q_{\bar{V}'(n)}(\omega_{\bar{V}'},\ldots,\omega_{\bar{V}'}) &= q_{\bar{V}(n)}(\iota_{\bar{V}',\bar{V}}\omega_{\bar{V}'},\ldots,\iota_{\bar{V}',\bar{V}}\omega_{\bar{V}'}) - q_{\bar{W}(n)}(\bar{\pi}\omega_{\bar{V}'},\ldots,\bar{\pi}\omega_{\bar{V}'}) = \\ &= -n!\sum_{L\in\mathbf{L}_{\mathrm{nonPl}}\colon |L|=n}\frac{1}{|\mathrm{Aut}(L)|}\Big(\mathrm{Loop}_{L;\{-K_V l_{V(m)}\}_{m\geq 2};V}(\iota_V\iota_{\bar{V}',\bar{V}}\omega_{\bar{V}'},\ldots,\iota_V\iota_{\bar{V}',\bar{V}}\omega_{\bar{V}'}) - \\ &\qquad -\mathrm{Loop}_{L;\{-K_W l_{W(m)}\}_{m\geq 2};W}(\iota_W\bar{\pi}\omega_{\bar{V}'},\ldots,\iota_W\bar{\pi}\omega_{\bar{V}'})\Big) + \\ &+ n!\sum_{T\in\mathbf{T}_{\mathrm{nonPl}}\colon |T|=n}\frac{1}{|\mathrm{Aut}(T)|}\Big(\mathrm{Iter}_{T;\{-K_V l_{V(m)}\}_{m\geq 2};\{q_{V(m)}\}_{m\geq 1}}(\iota_V\iota_{\bar{V}',\bar{V}}\omega_{\bar{V}'},\ldots,\iota_V\iota_{\bar{V}',\bar{V}}\omega_{\bar{V}'}) - \\ &\qquad -\mathrm{Iter}_{T;\{-K_W l_{W(m)}\}_{m\geq 2};\{q_{W(m)}\}_{m\geq 1}}(\iota_W\bar{\pi}\omega_{\bar{V}'},\ldots,\iota_W\bar{\pi}\omega_{\bar{V}'})\Big)\end{aligned} \tag{241}$$

(третий индекс у Loop означает пространство, по которому берётся супер-след). С другой стороны, индуцированные из V' квантовые операции (временно обозначим их $\tilde{q}_{\bar{V}'(n)}$) имеют вид

$$\begin{aligned}\tilde{q}_{\bar{V}'(n)}(\omega_{\bar{V}'},\ldots,\omega_{\bar{V}'}) &= -n!\sum_{L\in\mathbf{L}_{\mathrm{nonPl}}\colon |L|=n}\frac{1}{|\mathrm{Aut}(L)|}\mathrm{Loop}_{L;\{-K_{V'}l_{V'(m)}\}_{m\geq 2};V'}(\iota_{V'}\omega_{\bar{V}'},\ldots,\iota_{V'}\omega_{\bar{V}'}) + \\ &+ n!\sum_{T\in\mathbf{T}_{\mathrm{nonPl}}\colon |T|=n}\frac{1}{|\mathrm{Aut}(T)|}\mathrm{Iter}_{T;\{-K_{V'}l_{V'(m)}\}_{m\geq 2};\{q_{V'(m)}\}_{m\geq 1}}(\iota_{V'}\omega_{\bar{V}'},\ldots,\iota_{V'}\omega_{\bar{V}'})\end{aligned} \tag{242}$$

Обозначим $\hat{L}$ дерево, полученное разрезанием однопетлевой диаграммы L по какому-нибудь ребру цикла, и допустим для удобства записи, что для L выбирается такой планарный представитель, что разрезанное ребро в L (т.е. отмеченный лист в $\hat{L}$) оказывается последним листом $\hat{L}$ при обходе против часовой стрелки, начиная от корня. Будем вычислять супер-следы по V в (241), пользуясь разложением $V = \iota_{V',V}(V')\oplus\iota_-(W)$:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Loop}_{L;\{-K_V l_{V(m)}\}_{m\geq 2};V}(\iota_V\iota_{\bar{V}',\bar{V}}\omega_{\bar{V}'},\ldots,\iota_V\iota_{\bar{V}',\bar{V}}\omega_{\bar{V}'}) = \\ &\qquad = \mathrm{Str}_V\mathrm{Iter}_{\hat{L};\{-K_V l_{V(m)}\}_{m\geq 2};\{-K_V l_{V(m)}\}_{m\geq 2}}(\iota_V\iota_{\bar{V}',\bar{V}}\omega_{\bar{V}'},\ldots,\iota_V\iota_{\bar{V}',\bar{V}}\omega_{\bar{V}'},\bullet) = \\ &\quad = \mathrm{Str}_{V'}\mathrm{Iter}_{\hat{L};\{-K_V l_{V(m)}\}_{m\geq 2};\{-\pi_{V,V'}K_V l_{V(m)}\}_{m\geq 2}}(\iota_V\iota_{\bar{V}',\bar{V}}\omega_{\bar{V}'},\ldots,\iota_V\iota_{\bar{V}',\bar{V}}\omega_{\bar{V}'},\iota_{V',V}\bullet) + \\ &\qquad + \mathrm{Str}_W\mathrm{Iter}_{\hat{L};\{-K_V l_{V(m)}\}_{m\geq 2};\{-\pi_- K_V l_{V(m)}\}_{m\geq 2}}(\iota_V\iota_{\bar{V}',\bar{V}}\omega_{\bar{V}'},\ldots,\iota_V\iota_{\bar{V}',\bar{V}}\omega_{\bar{V}'},\iota_-\bullet)\end{aligned} \tag{243}$$

Для вычисления первого слагаемого здесь, мы пользуемся (240) (точнее, тривиальной модификацией, когда последний лист раскрашен как $\iota_{V',V}\bullet$):

$$\begin{aligned}&\mathrm{Str}_{V'}\mathrm{Iter}_{\hat{L};\{-K_V l_{V(m)}\}_{m\geq 2};\{-\pi_{V,V'}K_V l_{V(m)}\}_{m\geq 2}}(\iota_V\iota_{\bar{V}',\bar{V}}\omega_{\bar{V}'},\ldots,\iota_V\iota_{\bar{V}',\bar{V}}\omega_{\bar{V}'},\iota_{V',V}\bullet) = \\ &\qquad = \mathrm{Iter}_{\hat{L};\{-K_{V'}l_{V'(m)}\}_{m\geq 2};\{-K_{V'}l_{V'(m)}\}_{m\geq 2}}(\iota_{V'}\omega_{\bar{V}'},\ldots,\iota_{V'}\omega_{\bar{V}'},\bullet) = \\ &\qquad\qquad = \mathrm{Loop}_{L;\{-K_{V'}l_{V'(m)}\}_{m\geq 2};V'}(\iota_{V'}\omega_{\bar{V}'},\ldots,\iota_{V'}\omega_{\bar{V}'})\end{aligned} \tag{244}$$

Для вычисления второго слагаемое в (243), мы проносим проекцию π_- на листья, пользуясь (228,230) и тем, что $\pi_{1,2}$ являются L_∞-морфизмами (195,196):

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Str}_W \mathrm{Iter}_{\hat{L};\{-K_V l_{V(m)}\}_{m\ge 2};\{-\pi_- K_V l_{V(m)}\}_{m\ge 2}}(\iota_V \iota_{\bar{V}',\bar{V}}\omega_{\bar{V}'},\ldots,\iota_V \iota_{\bar{V}',\bar{V}}\omega_{\bar{V}'},\iota_-\bullet) =\\
&= \mathrm{Str}_W \mathrm{Iter}_{\hat{L};\{-K_W l_{W(m)}\}_{m\ge 2};\{-K_W l_{W(m)}\}_{m\ge 2}}(\iota_W \underbrace{\bar{\pi}_2 \iota_{\bar{V}',\bar{V}}}_{=\bar{\pi}}\omega_{\bar{V}'},\ldots,\iota_W \underbrace{\bar{\pi}_2 \iota_{\bar{V}',\bar{V}}}_{=\bar{\pi}}\omega_{\bar{V}'},\underbrace{\pi_2\iota_-}_{\frac{1}{2}\mathrm{id}_W}\bullet) -\\
&- \mathrm{Str}_W \mathrm{Iter}_{\hat{L};\{-K_W l_{W(m)}\}_{m\ge 2};\{-K_W l_{W(m)}\}_{m\ge 2}}(\iota_W \underbrace{\bar{\pi}_1 \iota_{\bar{V}',\bar{V}}}_{=\bar{\pi}}\omega_{\bar{V}'},\ldots,\iota_W \underbrace{\bar{\pi}_1 \iota_{\bar{V}',\bar{V}}}_{=\bar{\pi}}\omega_{\bar{V}'},\underbrace{\pi_1\iota_-}_{-\frac{1}{2}\mathrm{id}_W}\bullet) =\\
&= \mathrm{Loop}_{L;\{-K_W l_{W(m)}\}_{m\ge 2};W}(\iota_W \bar{\pi}\omega_{\bar{V}'},\ldots,\iota_W \bar{\pi}\omega_{\bar{V}'}) \qquad (245)
\end{aligned}$$

Подставляя (243) вместе с (244,245) в (241), видим, что первое слагаемое (сумма по однопетлевым графам) в (241) совпадает с первым слагаемым в (242). Теперь нам осталось только сравнить суммы по деревьям в (241) и (242). Вычислим вклады деревьев в (242), используя (240):

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Iter}_{T;\{-K_{V'} l_{V'(m)}\}_{m\ge 2};\{q_{V'(m)}\}_{m\ge 1}}(\iota_{V'}\omega_{\bar{V}'},\ldots,\iota_{V'}\omega_{\bar{V}'}) =\\
&= \mathrm{Iter}_{T;\{-K_V l_{V(m)}\}_{m\ge 2};\{q_{V'(m)}(\pi_{V,V'}\bullet,\ldots,\pi_{V,V'}\bullet)\}_{m\ge 1}}(\iota_V \iota_{\bar{V}',\bar{V}}\omega_{\bar{V}'},\ldots,\iota_V \iota_{\bar{V}',\bar{V}}\omega_{\bar{V}'}) =\\
&= \mathrm{Iter}_{T;\{-K_V l_{V(m)}\}_{m\ge 2};\{q_{V(m)}(\underbrace{\iota_{V',V}\pi_{V,V'}}_{=\mathrm{id}_V-\iota_-\pi_-}\bullet,\ldots,\underbrace{\iota_{V',V}\pi_{V,V'}}_{=\mathrm{id}_V-\iota_-\pi_-}\bullet)\}_{m\ge 1}}(\iota_V \iota_{\bar{V}',\bar{V}}\omega_{\bar{V}'},\ldots,\iota_V \iota_{\bar{V}',\bar{V}}\omega_{\bar{V}'}) -\\
&- \mathrm{Iter}_{T;\{-K_V l_{V(m)}\}_{m\ge 2};\{q_{W(m)}(\underbrace{\pi\pi_{V,V'}}_{=\pi_1}\bullet,\ldots,\underbrace{\pi\pi_{V,V'}}_{=\pi_1}\bullet)\}_{m\ge 1}}(\iota_V \iota_{\bar{V}',\bar{V}}\omega_{\bar{V}'},\ldots,\iota_V \iota_{\bar{V}',\bar{V}}\omega_{\bar{V}'})
\end{aligned}$$

в разложении проекций $\iota_{V',V}\pi_{V,V'} = \mathrm{id}_V - \iota_-\pi_-$ вторым слагаемым можно пренебречь, поскольку

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Iter}_{\tilde{T};\{-K_V l_{V(m)}\}_{m\ge 2};\{-\pi_- K_V l_{V(m)}\}_{m\ge 2}}(\iota_V \iota_{\bar{V}',\bar{V}}\omega_{\bar{V}'},\ldots,\iota_V \iota_{\bar{V}',\bar{V}}\omega_{\bar{V}'}) =\\
&= \mathrm{Iter}_{\tilde{T};\{-K_W l_{W(m)}\}_{m\ge 2};\{-K_W l_{W(m)}\}_{m\ge 2}}(\iota_W \underbrace{\bar{\pi}_2 \iota_{\bar{V}',\bar{V}}}_{=\bar{\pi}}\omega_{\bar{V}'},\ldots,\iota_W \underbrace{\bar{\pi}_2 \iota_{\bar{V}',\bar{V}}}_{=\bar{\pi}_2}\omega_{\bar{V}'}) -\\
&- \mathrm{Iter}_{\tilde{T};\{-K_W l_{W(m)}\}_{m\ge 2};\{-K_W l_{W(m)}\}_{m\ge 2}}(\iota_W \underbrace{\bar{\pi}_1 \iota_{\bar{V}',\bar{V}}}_{=\bar{\pi}}\omega_{\bar{V}'},\ldots,\iota_W \underbrace{\bar{\pi}_1 \iota_{\bar{V}',\bar{V}}}_{=\bar{\pi}_2}\omega_{\bar{V}'}) = 0
\end{aligned}$$

(полностью аналогично сокращению в (239)). Следовательно,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Iter}_{T;\{-K_{V'} l_{V'(m)}\}_{m\ge 2};\{q_{V'(m)}\}_{m\ge 1}}(\iota_{V'}\omega_{\bar{V}'},\ldots,\iota_{V'}\omega_{\bar{V}'}) =\\
&= \mathrm{Iter}_{T;\{-K_V l_{V(m)}\}_{m\ge 2};\{q_{V(m)}\}_{m\ge 1}}(\iota_V \iota_{\bar{V}',\bar{V}}\omega_{\bar{V}'},\ldots,\iota_V \iota_{\bar{V}',\bar{V}}\omega_{\bar{V}'}) -\\
&- \mathrm{Iter}_{T;\{-K_W l_{W(m)}\}_{m\ge 2};\{q_{W(m)}\}_{m\ge 1}}(\iota_W \bar{\pi}\omega_{\bar{V}'},\ldots,\iota_W \bar{\pi}\omega_{\bar{V}'})
\end{aligned}$$

И мы видим, что вклады деревьев в (241) и (242) совпадают. Это завершает доказательство части (3) Утверждения.

□

Важный для симплициальной BF-теории частный случай Утверждения 13 слудующий. Пусть есть компактное многообразие с границей M и ещё одно компактное (возможно, с границей) многообразие N, и заданы два вложения N в границу M, т.е.

$$\mathrm{emb}_1, \mathrm{emb}_2 : N \to \partial M$$

причём образы вложений $\mathrm{emb}_1, \mathrm{emb}_2$ не пересекаются

$$\mathrm{emb}_1(N) \cap \mathrm{emb}_2(N) = \varnothing$$

Отсюда возникает пара отображений обратного образа для дифференциальных форм:

$$\pi_{1,2} = \mathrm{emb}_{1,2}^* : \quad \Omega^\bullet(M, \mathfrak{g}) \to \Omega^\bullet(M, \mathfrak{g})$$

Далее, пусть U_1, U_2 — малые окрестности (утолщения) $\mathrm{emb}_1(N) \subset M$ и $\mathrm{emb}_2(N) \subset M$, соответственно, пусть есть две сглаживающие функции $\rho_{1,2} \in C^\infty(M)$ с носителями в U_1 и U_2, соответственно, и принимающие значение 1 на $\mathrm{emb}_1(N)$ и $\mathrm{emb}_2(N)$, соответственно:

$$\rho_1 \circ \mathrm{emb}_1 = \rho_2 \circ \mathrm{emb}_2 = 1$$

Обозначим также $\pi_\perp^1 : U_1 \to N, \quad \pi_\perp^2 : U_2 \to N$ проекции из U_1, U_2 на N (точка из U_1 посылается в ближайшую в как-нибудь выбранной метрике точку образа $\mathrm{emb}_1(N)$, значение $\pi_\perp^1$ есть прообраз этой точки в N; для $\pi_\perp^2$ — аналогично). Вложения $\iota_{1,2}$ для дифференциальных форм вводятся как

$$\iota_{1,2} = \rho_{1,2} \cdot (\pi_\perp^{1,2})^* : \quad \Omega^\bullet(N, \mathfrak{g}) \to \Omega^\bullet(M, \mathfrak{g})$$

Пара проекций $\pi_{1,2}$ и пара вложений $\iota_{1,2}$ являются данными склейки для qL_∞-алгебр (в данном случае — просто DGLA, т.е. $l_{(n)} = 0$ при $n \geq 3$ и $q_{(n)} = 0$ при $n \geq 1$) дифференциальных форм $V = \Omega^\bullet(M, \mathfrak{g})$, $W = \Omega^\bullet(N, \mathfrak{g})$. Аксиомы (191,192) склейки очевидны, а аксиомы (193,194) следуют из того, что $\pi_{1,2}$ являются гомоморфизмами DGLA, а значит, линейными L_∞-морфизмами. Далее, склеенная qL_∞-алгебра (опять же, в данном случае — DGLA) V' отождествляется с алгеброй дифференциальных форм $\Omega^\bullet(M', \mathfrak{g})$ на склеенном многообразии, полученном из M склеиванием двух компонент границы — $\mathrm{emb}_1(N)$ и $\mathrm{emb}_2(N)$:

$$M' = M / \{\mathrm{emb}_1(x) \sim \mathrm{emb}_2(x) | \; x \in N\}$$

Надо заметить, что для того, чтобы отождествить V' с $\Omega^\bullet(M', \mathfrak{g})$, мы должны требовать непрерывности только касательной к поверхности склейки $N \hookrightarrow M'$ составляющей дифференциальных форм, нормальной же составляющей (в какой-нибудь метрике) дифференциальной формы разрешено иметь разрыв при переходе через поверхность склейки N.

Теперь допустим, что задана триангуляция Ξ многообразия M и триангуляция F многообразия N. Тогда коцепях $C^\bullet(\Xi,\mathfrak{g})$ возникает индуцированная из $\Omega^\bullet(M,\mathfrak{g})$ qL_∞-структура, и на коцепях $C^\bullet(F,\mathfrak{g})$ возникает индуцированная из $\Omega^\bullet(N,\mathfrak{g})$ qL_∞-структура, соответствующие стандартные данные индуцирования (вложение с помощью форм Уитни, ретракция с помощью интегралов по симплексам, цепная гомотопия — оператор Дюпона) мы обозначаем $(\iota_\Xi, r_\Xi, K_\Xi)$ и (ι_F, r_F, K_F). Предположим дополнительно, что вложения $\mathrm{emb}_{1,2}$ согласованы с триангуляцией (т.е. переводят симплексы в симплексы) и вкладывают F в Ξ как симплициальный подкомплекс двумя способами: $\overline{\mathrm{emb}}_{1,2}: F \to \Xi$. Тогда автоматически выполнены условия согласованности склейки и индуцирования (228,229,230) (причём (228) вытекает из согласованности форм Уитни на симплексе с отображением ограничения на грань, (230) следует из (177), условие 229 очевидно). Индуцированные данные склейки $\bar\pi_{1,2}: C^\bullet(\Xi,\mathfrak{g}) \to C^\bullet(F,\mathfrak{g}),\quad \bar\iota_{1,2}: C^\bullet(F,\mathfrak{g}) \to C^\bullet(\Xi,\mathfrak{g})$ есть просто ограничения коцепей на Ξ на коцепи на F, индуцированные симплициальными вложениями $\overline{\mathrm{emb}}_{1,2}$, и соответствующие вложения коцепей на F в коцепи на Ξ (с носителями на $\overline{\mathrm{emb}}_{1,2}(F)$, соответственно). И, конечно, в отличие от случая дифференциальных форм, здесь не возникает функций сглаживания для вложений. Склеенные данные индуцирования $\Omega^\bullet(M',\mathfrak{g}) \xrightarrow{(\iota_{\Xi'}, r_{\Xi'}, K_{\Xi'})} C^\bullet(\Xi',\mathfrak{g})$ оказываются стандартными данными индуцирования для триангуляции Ξ'. Поэтому, согласно Утверждению 13, склеенное из S_Ξ, S_F действие совпадает с эффективным действием $S_{\Xi'}$, индуцированным из топологической BF-теории на M' с помощью стандартных данных индуцирования. Диаграмма (236) в данном случае имеет вид

$$\begin{array}{ccc}
\Omega^\bullet(M,\mathfrak{g}),\ \Omega^\bullet(N,\mathfrak{g}) & \xrightarrow[\text{стандартное индуцирование}]{(\iota_\Xi, r_\Xi, K_\Xi),\ (\iota_F, r_F, K_F)} & (C^\bullet(\Xi,\mathfrak{g}), S_\Xi),\ (C^\bullet(F,\mathfrak{g}), S_F) \\
{\scriptstyle (\pi_{1,2},\iota_{1,2})}\big\downarrow{\scriptstyle \text{склейка}} & & {\scriptstyle (\bar\pi_{1,2},\bar\iota_{1,2})}\big\downarrow{\scriptstyle \text{индуцированная склейка}} \\
\Omega^\bullet(M',\mathfrak{g}) & \xrightarrow[\text{стандартное индуцирование}]{(\iota_{\Xi'}, r_{\Xi'}, K_{\Xi'})} & (C^\bullet(\Xi',\mathfrak{g}), S_{\Xi'})
\end{array}$$

Возможен также случай, когда склеенный клеточный комплекс Ξ' не является "честной"триангуляцией. Например, для склеивания отрезка со стандартной триангуляцией в окружность (склейка по граничным точкам) склеенный клеточный комплекс есть $\{[+],[01]\}$. Данные склейки (для дифференциальных форм) здесь, очевидно, согласованы со стандартными данными индуцирования для отрезка, и поэтому склеенное симплициальное действие для отрезка в самом деле даёт эффективное действие для окружности.

Склеенные данные индуцирования здесь имеют вид

$$\iota_{\mathcal{S}^1}: \quad xe_+ + ye_{01} \quad \mapsto \quad x + ydt \tag{246}$$

$$r_{\mathcal{S}^1}: \quad f + gdt \quad \mapsto \quad f(0)e_+ + \left(\int_{\mathcal{S}^1} g(\tilde{t})d\tilde{t}\right) e_{01} \tag{247}$$

$$K_{\mathcal{S}^1}: \quad f + gdt \quad \mapsto \quad \int_0^t g(\tilde{t})d\tilde{t} - t\left(\int_{\mathcal{S}^1} g(\tilde{t})d\tilde{t}\right) \tag{248}$$

Интересен случай, когда многообразие $M = M_1 \sqcup M_2$ есть дизъюнктное объединение и $\mathrm{emb}_1 : N \to \partial M_1$, $\mathrm{emb}_2 : N \to \partial M_2$. Причём для $M_{1,2}$ и N заданы триангуляции $\Xi_{1,2}, F$ и вложения $\mathrm{emb}_{1,2}$ согласованы с триангуляцией. Тогда мы описываем склеивание двух многообразий $M_{1,2}$ по куску границы в новое многообразие M', и обнаруживаем, что симплициальное действие для M' со склеенной триангуляцией Ξ' совпадает с действием, склеенным из симплициальных действий на $\Xi_{1,2}$ и F. Таким образом, стартуя со склейки двух симплексов по грани и последовательно приклеивая новые симплексы, мы можем получить из Утверждения 13 Теорему 7.

Возможность склеивать из стандартных данных индуцирования для отдельных симплексов $\Omega^\bullet(\sigma) \xrightarrow{(\iota_\sigma, r_\sigma, K_\sigma)} C^\bullet(\sigma)$ данные индуцирования для симплициального комплекса $\Omega^\bullet(\Xi) \xrightarrow{(\iota_\Xi, r_\Xi, K_\Xi)} C^\bullet(\Xi)$ происходит из двух фактов. Во-первых из согласованности стандартных данных индуцирования для симплекса с ограничением дифференциальных форм и коцепей на грань $\sigma' \subset \sigma$, что означает коммутативность трёх диаграмм

$$\begin{array}{ccc} \Omega^\bullet(\sigma) & \xleftarrow{\iota_\sigma} & C^\bullet(\sigma) \\ {\scriptstyle \bullet|_{\sigma'}}\downarrow & & {\scriptstyle \bullet|_{\sigma'}}\downarrow \\ \Omega^\bullet(\sigma') & \xleftarrow{\iota_{\sigma'}} & C^\bullet(\sigma') \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \Omega^\bullet(\sigma) & \xrightarrow{r_\sigma} & C^\bullet(\sigma) \\ {\scriptstyle \bullet|_{\sigma'}}\downarrow & & {\scriptstyle \bullet|_{\sigma'}}\downarrow \\ \Omega^\bullet(\sigma') & \xrightarrow{r_{\sigma'}} & C^\bullet(\sigma') \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \Omega^\bullet(\sigma) & \xrightarrow{K_\sigma} & \Omega^\bullet(\sigma) \\ {\scriptstyle \bullet|_{\sigma'}}\downarrow & & {\scriptstyle \bullet|_{\sigma'}}\downarrow \\ \Omega^\bullet(\sigma') & \xrightarrow{K_{\sigma'}} & \Omega^\bullet(\sigma') \end{array}$$

для всякой грани $\sigma' \subset \sigma$ (коммутативность первой диаграммы — свойство форм Уитни, второй — очевидное свойство интегралов по граням, третье — свойство оператора Дюпона). Второй факт — согласованность стандартных данных индуцирования для симплекса с действием группы перестановок вершин симплекса S_{n+1} на дифференциальные формы $\Omega^\bullet(\Delta^n)$ и коцепи $C^\bullet(\Delta^n)$:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^\bullet(\Delta^n) & \xleftarrow{\iota_{\Delta^n}} & C^\bullet(\Delta^n) \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & {\scriptstyle \pi}\downarrow \\ \Omega^\bullet(\Delta^n) & \xleftarrow{\iota_{\Delta^n}} & C^\bullet(\Delta^n) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \Omega^\bullet(\Delta^n) & \xrightarrow{r_{\Delta^n}} & C^\bullet(\Delta^n) \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & {\scriptstyle \pi}\downarrow \\ \Omega^\bullet(\Delta^n) & \xrightarrow{r_{\Delta^n}} & C^\bullet(\Delta^n) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \Omega^\bullet(\Delta^n) & \xrightarrow{K_{\Delta^n}} & \Omega^\bullet(\Delta^n) \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & {\scriptstyle \pi}\downarrow \\ \Omega^\bullet(\Delta^n) & \xrightarrow{K_{\Delta^n}} & \Omega^\bullet(\Delta^n) \end{array} \tag{249}$$

для всякой перестановки вершин $\pi \in S_{n+1}$. Имеется ввиду действие на дифференциальные формы вида $t_i \mapsto t_{\pi(i)}$, $dt_i \mapsto dt_{\pi(i)}$ и на коцепи — вида $e_{i_0 \cdots i_k} \mapsto e_{\pi(i_0)\cdots\pi(i_k)}$, при этом мы имеем ввиду $e_{\pi'(i_0)\cdots\pi'(i_k)} = (-1)^{\pi'} e_{i_0\cdots i_k}$ для "внутренних" перестановок вершин грани $\pi' : (i_0, \ldots, i_k) \mapsto (i_0, \ldots, i_k)$. Согласованность данных индуцирования с симметрией симплекса (249) важна потому, что в противном случае нам бы пришлось склеивать симплициальный комплекс из симплексов с пронумерованными вершинами и следить за согласованностью нумерации при склейке.

5.5. **Симплициальное BF-действие на отрезке.** Как мы показали в разделе 5.3, задача вычисления симплициального BF-действия S_Ξ для произвольного симплициального комплекса Ξ сводится к серии универсальных вычислений для $\Xi = \Delta^D$ — одного симплекса размерности D со стандартной триангуляцией.

Для $D = 0$ задача тривиальна, поскольку 0-симплекс $\Delta^0 = [0]$ есть точка ($[0]$ — название вершины) и алгебра $\mathfrak{g}$-значных дифференциальных форм $\Omega^\bullet(\Delta^0, \mathfrak{g})$ совпадает с комплексом $\mathfrak{g}$-значных клеточных коцепей $C^\bullet(\Delta^0, \mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \otimes e_0 \cong \mathfrak{g}$. То есть, пространство ультрафиолетовых форм в данном случае нулевое: $\Omega''^\bullet(\Delta^0) = \{0\}$ и задача индуцирования тривиальна, т.е. симплициальное действие совпадает с исходным действием абстрактной BF-теории для алгебры Ли $\Omega^\bullet(\Delta^0, \mathfrak{g}) \cong \mathfrak{g}$:

$$S_{\Delta^0} =< p_0, \frac{1}{2}[\omega^0, \omega^0] >_\mathfrak{g} \tag{250}$$

где $< \bullet, \bullet >_\mathfrak{g}$: $\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ есть каноническое спаривение между $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$. Это действие является функцией на пространстве полей $\mathcal{F}_{\Delta^0} = T^*[-1](\mathfrak{g}[1]) = \mathfrak{g}[1] \oplus \mathfrak{g}^*[-2]$, причём ω^0 есть $\mathfrak{g}$-значная координатная функция на первом слагаемом и p_0 — $\mathfrak{g}^*$-значная координатная функция на втором слагаемом, $\mathrm{gh}(\omega^0) = 1$, $\mathrm{gh}(p_0) = -2$. Действие (250) является BF_∞-действием, соответствующим естественной qL_∞ структуре на $\mathfrak{g}$-значных коцепях на точке $C^\bullet(\Delta^0, \mathfrak{g}) \cong \mathfrak{g}$: есть только одна классическая операция $l_{(2)}(x, y) = [x, y]$ для $x, y \in \mathfrak{g}$ и все остальные операции отсутствуют: $l_{(1)} = l_{(3)} = l_{(4)} = \cdots = 0$, $q_{(1)} = q_{(2)} = \cdots = 0$. Эквивалентно, в терминах когомологического векторного поля и плотности меры:

$$Q_{\Delta^0} = -\left\langle \frac{1}{2}[\omega^0, \omega^0], \frac{\partial}{\partial \omega^0} \right\rangle_\mathfrak{g} = -\sum_{a,b,c} \frac{1}{2} f^a_{bc} \omega^{0b} \omega^{0c} \frac{\partial}{\partial \omega^{0a}}$$

— дифференциал Шевалле-Эйленберга на $\mathrm{Fun}(\mathfrak{g}[1])$ — коцепном комплексе алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (мы обозначили $f^a_{bc} =< T^a, [T_b, T_c] >_\mathfrak{g}$ структурные константы коммутатора в $\mathfrak{g}$), и плотность меры тривиальна:

$$\rho_{\Delta^0} = 1$$

т.е. мера $\mu_{\Delta^0} = \mathcal{D}\omega^0 = \prod_a \mathcal{D}\omega^{0a}$ — координатная мера Березина на $\mathfrak{g}[1]$. Укороченное действие для 0-симплекса (190) совпадает с полным симплициальным BF-действием:

$$\bar{S}_{\Delta^0} = S_{\Delta^0} =< p_0, \frac{1}{2}[\omega^0, \omega^0] >_\mathfrak{g} \tag{251}$$

Обратимся теперь к случаю $D = 1$, то есть к задаче вычисления S_{Δ^1} — симплициального BF-действия на отрезке $\Delta^1 = [0, 1]$. Коцепной комплекс стандартной триангуляции с коэффициентами в $\mathfrak{g}$ имеет вид $C^\bullet(\Delta^1, \mathfrak{g}) = \mathfrak{g}e_0 \oplus \mathfrak{g}e_1 \oplus \mathfrak{g}e_{01}$, где e_0, e_1, e_{01} —

базисные коцепи, соответствующие левому и правому концам отрезка и собственно отрезку (старшей клетке). Формы Уитни в барицентрических координатах (t_0, t_1) имеют вид $\chi_0 = t_0, \chi_1 = t_1, \chi_{01} = t_0 dt_1 - t_1 dt_0$, или, выражая всё в терминах одной координаты $t = t_1$:

$$\chi_0 = 1 - t, \chi_1 = t, \chi_{01} = dt$$

Поэтому, вложение коцепей в дифференциальные формы $\iota_{\Delta^1} : C^\bullet(\Delta^1, \mathfrak{g}) \to \Omega^\bullet(\Delta^1, \mathfrak{g})$ устроено как

$$\iota_{\Delta^1} : \alpha^0 e_0 + \alpha^1 e_1 + \alpha^{01} e_{01} \mapsto \alpha^0(1-t) + \alpha^1 t + \alpha^{01} dt$$

и ретракция $r_{\Delta^1} : \Omega^\bullet(\Delta^1, \mathfrak{g}) \to C^\bullet(\Delta^1, \mathfrak{g})$ есть

$$r_{\Delta^1} : \alpha = f(t) + g(t)dt \mapsto f(0)e_0 + f(1)e_1 + \left(\int_0^1 g(t)dt\right) e_{01}$$

где мы разложили форму α на отрезке на компоненты степени 0 и 1; f, g — пара функций на отрезке. Разложение $\Omega^\bullet(\Delta^1, \mathfrak{g})$ на инфракрасную и ультрафиолетовую часть имеет вид $\Omega^\bullet(\Delta^1, \mathfrak{g}) = \Omega^\bullet_W(\Delta^1, \mathfrak{g}) \oplus \Omega''^\bullet(\Delta^1, \mathfrak{g})$, где инфракрасная часть (комплекс Уитни) есть

$$\Omega^\bullet_W(\Delta^1, \mathfrak{g}) = \{\alpha^0(1-t) + \alpha^1 t + \alpha^{01} dt | \ \alpha^{0,1,01} \in \mathfrak{g}\}$$

— линейные 0-формы и постоянные 1-формы на отрезке, и ультрафилетовая часть:

$$\Omega''^\bullet(\Delta^1, \mathfrak{g}) = \{f(t) + g(t)dt | \ f(0) = f(1) = 0, \int_0^1 g(t)dt = 0\}$$

т.е. 0-формы, обращающиеся в ноль на концах отрезка и 1-формы с нулевым интегралом по отрезку. Проекторы на инфракрасные и ультрафиолетовые формы имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{P}' = \iota_{\Delta^n} \circ r_{\Delta^n} : \ f(t) + g(t)dt \quad &\mapsto \quad f(0) \cdot (1-t) + f(1) \cdot t + \left(\int_0^1 g(\tilde{t})d\tilde{t}\right) \cdot dt \\ \mathcal{P}'' = \mathrm{id} - \mathcal{P}' : \ f(t) + g(t)dt \quad &\mapsto \quad (f(t) - f(0) \cdot (1-t) - f(1) \cdot t) + \left(g(t) - \int_0^1 g(\tilde{t})d\tilde{t}\right) \cdot dt \end{aligned}$$

Далее, оператор цепной гомотопии, определённый с помощью (176), действует как

$$\begin{aligned} K_{\Delta^1} = \chi_0 h^0 + \chi_1 h^1 : f(t) + g(t)dt &\mapsto (1-t)\int_0^1 g(ut)t du + t\int_0^1 g(ut - u + 1)(t-1)du \\ &= (1-t)\int_0^t g(\tilde{t})d\tilde{t} - t\int_t^1 g(\tilde{t})d\tilde{t} = \int_0^t g(\tilde{t})d\tilde{t} - t\int_0^1 g(\tilde{t})d\tilde{t} \end{aligned}$$

Иначе говоря, на 0-формы оператор K_{Δ^1} действует нулём (что естественно, поскольку цепная гомотопия понижает степень формы на единицу) и на 1-формы как интегральный оператор

$$K_{\Delta^1} : g(t)dt \mapsto \int_0^t g(\tilde{t})d\tilde{t} - t\int_0^1 g(\tilde{t})d\tilde{t}$$

Ядро этого оператора есть

$$K_{\Delta^1}(t, \tilde{t}) = \theta(t - \tilde{t}) - t \tag{252}$$

где

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, \ x \geq 0 \\ 0, \ x < 0 \end{cases}$$

— функция Хэвисайда. Далее, d-точная часть $\Omega''^{\bullet}(\Delta^1)$, очевидно, совпадает с пространством ультрафиолетовых 1-форм (поскольку всякая 1-форма на отрезке с нулевым интегралом представляется как дифференциал функции, обращающейся в ноль на концах отрезка): $\Omega''^{\bullet}_{d-ex}(\Delta^1) = \Omega''^1(\Delta^1)$. Поэтому K-точная часть $\Omega''^{\bullet}(\Delta^1)$ совпадает с пространством ультрафиолетовых 0-форм (поскольку дифференциал $d : \Omega''^0(\Delta^1) \to \Omega''^1(\Delta^1)$ обратим и K_{Δ^1} обращает его): $\Omega''^{\bullet}_{K-ex}(\Delta^1) = \Omega''^0(\Delta^1)$. Тем самым, разложение Ходжа (102) для коцепей на отрезке имеет вид

$$\begin{aligned} \Omega^{\bullet}(\Delta^1, \mathfrak{g}) &= \Omega^{\bullet}_W(\Delta^1, g) \oplus \Omega''^1(\Delta^1, \mathfrak{g}) \oplus \Omega''^0(\Delta^1, \mathfrak{g}) \\ &= \{\alpha^0(1-t) + \alpha^1 t + \alpha^{01} dt\} \oplus \{g(t)dt | \int_0^1 g(t)dt = 0\} \oplus \{f(t) | \ f(0) = f(1) = 0\} \end{aligned}$$

Симплициальное действие S_{Δ^1} является функцией на пространстве

$$\mathcal{F}_{\Delta^1} = T^*[-1](C^{\bullet}(\Delta^1, \mathfrak{g})[1]) = T^*[-1]((\mathfrak{g}e_0 \oplus \mathfrak{g}e_1 \oplus \mathfrak{g}e_{01})[1]) \cong \mathfrak{g}[1] \oplus \mathfrak{g}[1] \oplus \mathfrak{g}[0] \oplus \mathfrak{g}^*[-2] \oplus \mathfrak{g}^*[-2] \oplus \mathfrak{g}^*[-1]$$

с $\mathfrak{g}$-значными координатами $\omega^0, \omega^1, \omega^{01}$ и $\mathfrak{g}^*$-значными координатами p_0, p_1, p_{01}. Духовые числа для координат: $\mathrm{gh}(\omega^0) = \mathrm{gh}(\omega^1) = 1, \mathrm{gh}(\omega^{01}) = 0, \mathrm{gh}(p_0) = \mathrm{gh}(p_1) = -2, \mathrm{gh}(p_{01}) = -1$.

Теорема 8 (Симплициальное BF-действие на отрезке)**.** *Укороченное симплициальное BF-действие для отрезка есть*

$$\bar{S}_{\Delta^1} = \bar{S}^0_{\Delta^1} + \hbar \bar{S}^1_{\Delta^1}$$

где древесная часть даётся формулой

$$\begin{aligned} \bar{S}^0_{\Delta^1}(\omega^0, \omega^1, \omega^{01}, p_{01}) &= \Big\langle p_{01}, (\omega^1 - \omega^0) + \frac{1}{2}[\omega^{01}, \omega^0 + \omega^1] + \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} \underbrace{[\omega^{01}, [\omega^{01}, \cdots, [\omega^{01}}_{2n}, \omega^1 - \omega^0] \cdots]\Big\rangle_{\mathfrak{g}} \qquad (253) \\ &= \Big\langle p_{01}, \frac{1}{2}[\omega^{01}, \omega^0 + \omega^1] + \left(\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}{2} \coth \frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}{2} \right) \circ (\omega^1 - \omega^0) \Big\rangle_{\mathfrak{g}} \qquad (254) \end{aligned}$$

где B_n — числа Бернулли: $B_0 = 1, \ B_1 = -1/2, \ B_2 = 1/6, \ B_3 = 0, \ B_4 = -1/30, \ \ldots$, и $\mathrm{ad}_{\omega^{01}} = [\omega^{01}, \bullet]$ *есть присоединённое действие; однопетлевая часть $\bar{S}_{\Delta^1}$ имеет вид*

$$\begin{aligned} \bar{S}^1_{\Delta^1}(\omega^{01}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n) \cdot (2n)!} \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}} \underbrace{[\omega^{01}, [\omega^{01}, \cdots, [\omega^{01}}_{2n}, \bullet] \cdots] \\ &= \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}} \log \left(\frac{\sinh \frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}{2}}{\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}{2}} \right) \qquad (255) \end{aligned}$$

Соответственно, полное симплициальное BF-действие для отрезка есть сумма вкладов левого и правого концов и собственно отрезка:

$$\begin{aligned} S_{\Delta^1}(\omega^0,\omega^1,\omega^{01},p_0,p_1,p_{01}) &= \bar{S}_{[0]}(\omega^0,p_0)+\bar{S}_{[1]}(\omega^1,p_1)+\bar{S}_{[01]}(\omega^0,\omega^1,\omega^{01},p_{01}) \\ &= \left\langle p_0,\frac{1}{2}[\omega^0,\omega^0]\right\rangle_{\mathfrak{g}}+\left\langle p_1,\frac{1}{2}[\omega^1,\omega^1]\right\rangle_{\mathfrak{g}}+ \\ &+\left\langle p_{01},\frac{1}{2}[\omega^{01},\omega^0+\omega^1]+\left(\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}{2}\coth\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}{2}\right)\circ(\omega^1-\omega^0)\right\rangle_{\mathfrak{g}}+\hbar\,\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\log\left(\frac{\sinh\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}{2}}{\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}{2}}\right) \end{aligned} \tag{256}$$

Напомним, что числа Бернулли B_n определяются с помощью производящей функции

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n=\frac{x}{e^x-1}$$

и также нам потребуются полиномы Бернулли $B_n(t)$, которые задаются с помощью

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(t)}{n!}x^n=\frac{xe^{xt}}{e^x-1}$$

Первые полиномы Бернулли имеют вид $B_0(t)=1,\ B_1(t)=t-\frac{1}{2},\ B_2(t)=t^2-t+\frac{1}{6},\ B_3(t)=t^3-\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{2}t,\ B_4(t)=t^4-2t^3+t^2-\frac{1}{30}$ и т.д. Для доказательства теоремы нам потребуются следующие две леммы.

Лемма 3. *Для всякого $n\geq 1$ имеет место*

$$(K_{\Delta^1}(\chi_{01}\wedge\bullet))^n\circ\chi_1=-\left(K_{\Delta^1}(\chi_{01}\wedge\bullet)\right)^n\circ\chi_0=\frac{B_{n+1}(t)-B_{n+1}}{(n+1)!} \tag{257}$$

и

$$\int_0^1\chi_{01}\wedge(K_{\Delta^1}(\chi_{01}\wedge\bullet))^n\circ\chi_1=-\int_0^1\chi_{01}\wedge(K_{\Delta^1}(\chi_{01}\wedge\bullet))^n\circ\chi_0=-\frac{B_{n+1}}{(n+1)!} \tag{258}$$

где $B_n(t)$ — полиномы Бернулли.

Лемма 4. *Для всякого $n\geq 2$ имеет место*

$$\mathrm{Str}_{\Omega^0(\Delta^1)}\left(K(\chi_{01}\wedge\bullet)\right)^n=-\frac{B_n}{n!} \tag{259}$$

Доказательство Леммы 3. Введём производящую функцию

$$f(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n(K_{\Delta^1}(\chi_{01}\wedge\bullet))^n\circ\chi_1 \tag{260}$$

Применяя дифференциал $d_t=dt\wedge\frac{\partial}{\partial t}$ к обеим частям и пользуясь свойством цепной гомотопии $d_tK_{\Delta^1}+K_{\Delta^1}d_t=\mathcal{P}''$, получаем

$$dt\wedge\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)=dt+xdt\wedge\left(f(x,t)-\int_0^1 f(x,\tilde{t})d\tilde{t}\right)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = x f(x,t) + C(x)$$

где $C(x)$ не зависит от t. Решая это дифференциальное уравнение с граничными условиями $f(x,0)=0$, $f(x,1)=1$ (вклад в значение f на концах отрезка даёт только слагаемое $n=0$ в (260)), получаем единственное возможное решение

$$f(x,t) = \frac{e^{xt}-1}{e^x-1} = \frac{1}{x}\left(\frac{xe^{xt}}{e^x-1} - \frac{x}{e^x-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n+1}(t)-B_{n+1}}{(n+1)!}\, x^n \tag{261}$$

Далее, поскольку $K_{\Delta^1}(\chi_{01}\wedge(\chi_0+\chi_1)) = K_{\Delta^1}(\chi_{01}) = 0$, имеем $(K_{\Delta^1}(\chi_{01}\wedge\bullet))^n \circ \chi_1 = -\left(K_{\Delta^1}(\chi_{01}\wedge\bullet)\right)^n \circ \chi_0$ при $n\geq 1$. Тем самым (257) доказано. Наконец, (258) немедленно получается из (261) интегрированием по t (или, что эквивалентно, (258) вытекает из (257) и свойства полиномов Бернулли $\int_0^1 B_n(t)dt = 0$ при $n\geq 1$).

□

Доказательство Леммы 4. Поскольку вопрос о вычислении значения следа оператора по бесконечномерному пространству $\Omega^0(\Delta^1)$ является деликатным, мы предлагаем три независимых вычисления в трёх разных естественных базисах на $\Omega^0(\Delta^1)$ — базисе мономов $\{t^n\}$, базисе дельта-функций $\{\delta(t-t_0)\}$ и базисе экспонент $\{e^{2\pi i n t}-1\}$, и убедимся, что во всех случаях приходим к результату (259).

Вычисление в базисе мономов. Введём обозначение $\kappa = K_{\Delta^1}(\chi_{01}\wedge\bullet) : \Omega^0(\Delta^1)\to\Omega^0(\Delta^1)$

$$\kappa:\ f(t)\mapsto \int_0^t f(\tilde t)d\tilde t - t\int_0^1 f(\tilde t)d\tilde t$$

Мы хотим вычислить $\mathrm{Str}_{\Omega^0(\Delta^1)}\kappa^n$, непосредственно через суммируя диагональные матричные элементы оператора κ^n в базисе мономов $\{t^m\}_{m=0}^{\infty}$. Для матричных элементов мы используем стандартные дираковские обозначения бра-кет:

$$\kappa^n \circ t^m = \sum_{m'} < t^{m'}|\kappa^n|t^m > \cdot t^{m'}$$

Заметим, что моном $t^0=1$ не даст вклада в супер-след, поскольку $\kappa\circ 1 = 0$. Введём производящую функцию

$$f_m(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \kappa^n \circ t^m$$

для $m\geq 1$. Дифференцируя f_m по t, так же, как в доказательстве Леммы 3, приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} f_m(x,t) = x f_m(x,t) + m t^{m-1} + C_m(x)$$

где $C_m(x)$ не зависит от t. Решая это уравнение с граничными условиями $f_m(x,0)=0$, $f_m(x,1)=1$, приходим к единственно возможному ответу

$$f_m(x,t) \;=\; \frac{e^{xt}-1}{e^x-1}\left(1 - e^x\int_0^1 d\tilde t\; m\tilde t^{m-1} e^{-x\tilde t}\right) + e^{xt}\int_0^t d\tilde t\; m\tilde t^{m-1}e^{-x\tilde t} \tag{262}$$

$$= \frac{e^{xt}-1}{e^x-1}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{m!}{(m-k)!}x^{-k} - \sum_{k=1}^{m-1}\frac{m!}{(m-k)!}t^{m-k}x^{-k} \tag{263}$$

Разложим $f_m(x,t)$ в ряд по степеням t: $f_m(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{m,k}(x)t^k$. Тогда коэффициент $f_{m,m}(x)$ является производящей функцией для диагональных матричных элементов степеней оператора κ, соответствующих моному t^m:

$$f_{m,m}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n < t^m|\kappa^n|t^m > \tag{264}$$

Из явной формулы (263) следует

$$f_{m,m}(x) = 1 - \frac{x}{e^x-1}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{x^k}{(k+1)!}$$

Слагаемое 1 здесь соответствует матричному элементу тождественного оператора, т.е. члену $n=0$ в (264). Также отметим, что из $f_{m,m}(x) = 1 + O(x^m)$ вытекает, что диагональные матричные элементы $< t^m|\kappa^n|t^m >$ могут быть отличны от нуля только при $m \leq n$. Таким образом, матрица оператора κ^n в мономиальном базисе имеет лишь конечное число ненулевых матричных элементов на диагонали. Наконец, суммируя по m в (264) и вычитая вклад тождественного оператора, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \mathrm{Str}_{\Omega^0(\Delta^1)}\kappa^n = \sum_{m=1}^{\infty}(f_{m,m}(x)-1) = -\frac{x}{e^x-1}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{x^k}{(k+1)!}$$
$$= -\frac{x}{e^x-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(k+1)!}x^k = 1 - x - \frac{x}{e^x-1} = -\frac{1}{2}x - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n$$

откуда следует (259): $\mathrm{Str}_{\Omega^0(\Delta^1)}\kappa^n = -\frac{B_n}{n!}$ для $n \geq 2$.

Вычисление в координатном представлении (базисе дельта-функций). Другая естественная идея, как вычислять $\mathrm{Str}_{\Omega^0(\Delta^1)}\kappa^n$ — использовать базис дельта-функций $\{\delta(t-t_0)\}_{0\leq t_0\leq 1}$, т.е. использовать представление для супер-следа в виде свёртки

$$\mathrm{Str}_{\Omega^0(\Delta^1)}\kappa^n =$$
$$= \int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 \cdots \int_0^1 dt_n < \delta(t-t_1)|\kappa|\delta(t-t_2) >< \delta(t-t_2)|\kappa|\delta(t-t_3) > \cdots < \delta(t-t_n)|\kappa|\delta(t-t_1) > \tag{265}$$

где

$$\kappa(t_1,t_2) =< \delta(t-t_1)|\kappa|\delta(t-t_2) >= \theta(t_1-t_2) - t_1 \tag{266}$$

есть ядро (252) оператора κ. Введём производящую функцию для супер-следов всех степеней κ:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n\,\mathrm{Str}_{\Omega^0(\Delta^1)}\kappa^n$$

и представим её, используя (265,266) в виде

$$g(x) = \Bigg(x\int_0^1 dt_1 \theta(t_1 - t_1) + \frac{1}{2}x^2 \int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 \theta(t_1-t_2)\theta(t_2-t_1) + \\ + \frac{1}{3}\,x^3 \int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 \int_0^1 dt_3 \theta(t_1-t_2)\theta(t_2-t_3)\theta(t_3-t_1) + \cdots \Bigg) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \Bigg(x\int_0^1 dt_1\, t_1 + x^2 \int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 \theta(t_1-t_2) t_2 + \\ + x^3 \int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 \int_0^1 dt_3 \theta(t_1-t_2)\theta(t_2-t_3) t_3 + \cdots \Bigg)^k$$

Заметим, что интегралы

$$\int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 \theta(t_1-t_2)\theta(t_2-t_1) = \int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 \int_0^1 dt_3 \theta(t_1-t_2)\theta(t_2-t_3)\theta(t_3-t_1) = \cdots = 0$$

поскольку носитель подынтегрального выражения имеет нулевую меру. Далее, интегралы

$$\int_0^1 dt_1 \cdots \int_0^1 dt_i \theta(t_1-t_2)\cdots\theta(t_{i-1}-t_i) t_i = \int_{1\geq t_1 \geq \cdots \geq t_i \geq 0} t_i = \frac{1}{(i+1)!}$$

Наконец, интеграл

$$\int_0^1 dt_1 \theta(t_1 - t_1)$$

плохо определён и требует регуляризации: нужно указать значение обобщённой функции $\theta(t)$ в точке $t = 0$. Выберем симметричную регуляризацию: $\theta(0) = \frac{1}{2}(\theta(-0)+\theta(+0)) = \frac{1}{2}$. Заметим, что этот выбор влияет только на коэффициент при x^1 в $g(x)$, т.е. на значение супер-следа $\mathrm{Str}_{\Omega^0(\Delta^1)}\kappa$. Теперь мы легко можем закончить вычисление $g(x)$:

$$g(x) = \frac{1}{2}\,x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i+1)!}\,x^i \right)^k = \frac{1}{2}\,x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \left(\frac{e^x - 1 - x}{x} \right)^k \\ = \frac{1}{2}\,x - \log\frac{e^x-1}{x} = -\log\frac{\sinh(x/2)}{x/2} = \int_0^x \frac{d\tilde{x}}{\tilde{x}} \left(1 - \frac{\tilde{x}}{2} - \frac{\tilde{x}}{e^{\tilde{x}}-1} \right) = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n\, n!}\,x^n$$

И мы снова пришли к результату (259).

Вычисление в “импульсном представлении” (в базисе экспонент). Воспользуемся тем фактом, что оператор κ принимает значения в ультрафиолетовых функциях, т.е. обращающихся в ноль в точках $t = 0, 1$. Поэтому

$$\mathrm{Str}_{\Omega^0(\Delta^1)}\kappa^n = \mathrm{Str}_{\Omega''^0(\Delta^1)}\kappa^n$$

Введём базис $\{e^{2\pi i m t} - 1\}_{m\in\mathbb{Z}, m\neq 0}$ на $\Omega''^0(\Delta^1)$. Оказывается, вычислять супер-следы операторов κ^n в таком базисе очень просто, поскольку он является собственным для оператора κ:

$$\kappa:\ (e^{2\pi i m t} - 1) \mapsto \frac{1}{2\pi i m}(e^{2\pi i m t} - 1)$$

Поэтому для $n \geq 1$

$$\mathrm{Str}_{\Omega''^0(\Delta^1)}\kappa^n = \sum_{m\in\mathbb{Z},\, m\neq 0} \left(\frac{1}{2\pi i m}\right)^n = \begin{cases} \frac{2}{(2\pi i)^n}\zeta(n) & \text{для чётного } n \\ 0 & \text{для нечётного } n \end{cases}$$

где $\zeta(n)$ — дзета-функция Римана. Пользуясь формулой Эйлера для значений дзета-функции в чётных точках, снова получаем (259).

Итак, полученные во всех трёх базисах ответы для $\mathrm{Str}_{\Omega^0(\Delta^1)}\kappa^n$ для $n \geq 2$ совпали. Отметим, что случай $n = 1$ вызывает трудности: в координатном представлении и в базисе экспонент мы получили $\mathrm{Str}_{\Omega^0(\Delta^1)}\kappa = 0$, однако при этом потребовалась регуляризация: в координатном представлении это выбор значения $\theta(0)$, в базисе экспонент — выбор порядка суммирования условно сходящегося ряда по собственным числам $\sum_{m\in\mathbb{Z},\, m\neq 0} \frac{1}{2\pi i m}$. В базисе мономов мы вовсе получили неправильное значение $\mathrm{Str}_{\Omega^0(\Delta^1)}\kappa = \frac{1}{2}$. Также отметим, что вычисление в базисе мономов, несмотря на свою элегантность (лишь конечное число диагональных матричных элементов κ^n отличны от нуля), является наименее прозрачным из трёх: у базиса мономов $\{t^m\}$ нет хорошо определённого двойственного базиса на отрезке относительно спаривания $(f, g) = \int_0^1 fg\, dt$, в то время как базис дельта-функций ортогонален (самосопряжён), и экспоненциальный базис также ортогонален.

□

Доказательство Теоремы 8. Будем вычислять укороченное действие на отрезке $\bar{S}_{\Delta^1}$ с помощью ряда (189). Заметим, что для случая отрезка значительная часть фейнмановских диаграмм не даёт вклада. Именно, если дерево или однопетлевая диаграмма содержит внутреннюю вершину, оба ребёнка которой и предок — также внутренние вершины, то её значение есть ноль, поскольку $K_{\Delta^1}[K_{\Delta^1}\alpha, K_{\Delta^1}\beta] = 0$ для любых форм $\alpha, \beta \in \Omega^\bullet(\Delta^1, \mathfrak{g})$ (так как операция $K_{\Delta^1}[K_{\Delta^1}\alpha, K_{\Delta^1}\beta]$ понижает степень на 3). Также, если в диаграмме содержится такая внутренняя вершина, что оба её ребёнка — внутренние вершины, а предок — корень, то значение этой диаграммы ноль, поскольку $r_{\Delta^1}[K_{\Delta^1}\alpha, K_{\Delta^1}\beta] = 0$ (так как $K_{\Delta^1}\alpha$ и $K_{\Delta^1}\beta$ — функции на отрезке, принимающие значение 0 на концах, а значит их коммутатор — также ультрафиолетовая функция, и ретракция r_{Δ^1} на ней есть ноль). Из этих наблюдений и элементарного подсчёта степеней форм следует, что вклад дают только фейнмановские деревья вида $(*\cdots(*(*(**)))\cdots)$ ("ветки") и однопетлевые фейнмановские графы вида $(*\cdots(*(*(*\bullet)))\cdots)$ ("колёса"), и ряд (189) упрощается до следующего выражения:

$$\bar{S}_{\Delta^1} = \left\langle p_{01}, (\omega^1 - \omega^0) + \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 [\chi_{01}\omega^{01}, (-K_{\Delta^1}[\chi_{01}\omega^{01}, \bullet])^n \circ (\chi_0\omega^0 + \chi_1\omega^1)] \right\rangle_{\mathfrak{g}} -$$
$$- \hbar \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathrm{Str}_{\mathfrak{g}\otimes\Omega^0(\Delta^1)} (-K_{\Delta^1}[\chi_{01}\omega^{01}, \bullet])^n$$

$$= \left\langle p_{01}, (\omega^1 - \omega^0) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 \chi_{01} \wedge (-K_{\Delta^1}(\chi_{01} \wedge \bullet))^n \circ \chi_0 \right) ((\mathrm{ad}_{\omega^{01}})^n \circ \omega^0) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 \chi_{01} \wedge (-K_{\Delta^1}(\chi_{01} \wedge \bullet))^n \circ \chi_1 \right) ((\mathrm{ad}_{\omega^{01}})^n \circ \omega^1) \right\rangle_{\mathfrak{g}} -$$

$$- \hbar \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\mathrm{Str}_{\Omega^0(\Delta^1)} (-K_{\Delta^1}(\chi_{01} \wedge \bullet))^n \right) \cdot (\mathrm{tr}_g \, (\mathrm{ad}_{\omega^{01}})^n)$$

где мы отделили де рамовскую часть значений фейнмановских диаграмм от тривиальных выражений для $\mathfrak{g}$-коэффициентов. Наконец, используя (258,259), а также то, что $\int_0^1 \chi_{01} \wedge \chi_0 = \int_0^1 \chi_{01} \wedge \chi_1 = \frac{1}{2}$, приходим к выражениям (254,255). Заметим, что плохо определённый супер-след $\mathrm{Str}_{\Omega^0(\Delta^1)} K_{\Delta^1}(\chi_{01} \wedge \bullet)$ нам здесь не потребовался, потому что он умножается в $\bar{S}_{\Delta^1}$ на след в алгебре Ли $\mathrm{tr}_g \mathrm{ad}(\omega^{01}) = \mathrm{tr}_g[\omega^{01}, \bullet]$, который равен нулю в силу унимодулярности $\mathfrak{g}$.

□

5.5.1. *Явная проверка мастер-уравнения для S_{Δ^1}.* То, что симплициальное действие S_{Δ^1} на отрезке (256) удовлетворяет мастер-уравнению, следует из самой его конструкции с помощью БВ-интеграла (Утверждение 2). Однако, можно проверить выполнение мастер-уравнения для S_{Δ^1} напрямую. Такая проверка является важным свидетельством самосогласованности конструкции и правильности вычисления S_{Δ^1} (в особенности, вычисления супер-следов (259)).

Будем сначала проверять классическое мастер-уравнение $\{S^0_{\Delta^1}, S^0_{\Delta^1}\} = 0$. Введём обозначение

$$\tilde{B}_n = \begin{cases} B_n & \text{\textit{для чётного}} \;\; n \\ 0 & \text{\textit{для нечётного}} \;\; n \end{cases}$$

Запишем древесную часть симплициального действия на отрезке (256) в виде

$$S^0_{\Delta^1} = \left\langle p_0, \frac{1}{2}[\omega^0, \omega^0] \right\rangle_{\mathfrak{g}} + \left\langle p_1, \frac{1}{2}[\omega^1, \omega^1] \right\rangle_{\mathfrak{g}} + \left\langle p_{01}, \frac{1}{2}[\omega^{01}, \omega^0 + \omega^1] + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{B}_n}{n!} (\mathrm{ad}_{\omega^{01}})^n \circ (\omega^1 - \omega^0) \right\rangle_{\mathfrak{g}}$$

Вычислим анти-скобку $\{S^0_{\Delta^1}, S^0_{\Delta^1}\}$:

$$\frac{1}{2}\{S^0_{\Delta^1}, S^0_{\Delta^1}\} = S^0_{\Delta^1} \left(\left\langle \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \omega^0}, \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p_0} \right\rangle_{\mathfrak{g}} + \left\langle \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \omega^1}, \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p_1} \right\rangle_{\mathfrak{g}} + \left\langle \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \omega^{01}}, \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p_{01}} \right\rangle_{\mathfrak{g}} \right) S^0_{\Delta^1}$$

$$= < p_0, \frac{1}{2}[\omega^0, [\omega^0, \omega^0]] >_{\mathfrak{g}} + < p_1, \frac{1}{2}[\omega^1, [\omega^1, \omega^1]] >_{\mathfrak{g}} +$$

$$+ < p_{01}, \frac{1}{4}[\omega^{01}, [\omega^0, \omega^0]] + \frac{1}{4}[\omega^{01}, [\omega^1, \omega^1]] - \frac{1}{4}[[\omega^{01}, \omega^0 + \omega^1], \omega^0 + \omega^1] >_{\mathfrak{g}} +$$

$$+ < p_{01}, \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{B}_n}{n!} (\mathrm{ad}_{\omega^{01}})^n \circ ([\omega^1, \omega^1] - [\omega^0, \omega^0]) - \frac{1}{2} [\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{B}_n}{n!} (\mathrm{ad}_{\omega^{01}})^n \circ (\omega^1 - \omega^0), \omega^0 + \omega^1] >_{\mathfrak{g}} +$$

$$+\left\langle \frac{1}{2}[\omega^{01},\omega^0+\omega^1]+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tilde{B}_n}{n!}(\mathrm{ad}_{\omega^{01}})^n\circ(\omega^1-\omega^0),\frac{\partial}{\partial\omega^{01}}\right\rangle_{\mathfrak{g}}\circ\left\langle p_{01},\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tilde{B}_n}{n!}(\mathrm{ad}_{\omega^{01}})^n\circ(\omega^1-\omega^0)\right\rangle_{\mathfrak{g}} \tag{267}$$

Первые два слагаемых здесь равны нулю по тождеству Якоби. Остальная часть является суммой выражений вида

$$(\mathrm{ad}_x)^a[(\mathrm{ad}_x)^b\circ y,(\mathrm{ad}_x)^c\circ z] \tag{268}$$

где $x,y,z\in\mathfrak{g}$, $a,b,c\geq 0$. Такие выражения для разных (a,b,c) не являются независимыми: между ними есть соотношения из-за тождества Якоби. В частности,

$$(\mathrm{ad}_x)^a[(\mathrm{ad}_x)^b\circ y,(\mathrm{ad}_x)^c\circ z]=\sum_{k=0}^{a}C_a^k\;[(\mathrm{ad}_x)^{b+k}\circ y,(\mathrm{ad}_x)^{a+c-k}\circ z] \tag{269}$$

где C_a^k — биномиальные коэффициенты. Пользуясь этим, будем приводить выражения типа (268) к "каноническому виду" — сумме слагаемых вида $[(\mathrm{ad}_x)^a\circ y,(\mathrm{ad}_x)^b\circ z]$ (они уже не связаны друг с другом тождеством Якоби). С помощью (269) можно также написать

$$\left\langle\sum_{i=0}^{\infty}f_i(\mathrm{ad}_x)^i\circ y,\frac{\partial}{\partial x}\right\rangle_{\mathfrak{g}}\circ\left(\sum_{j=1}^{\infty}g_j(\mathrm{ad}_x)^j\circ z\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{j-1}f_ig_j(\mathrm{ad}_x)^k[(\mathrm{ad}_x)^i\circ y,(\mathrm{ad}_x)^{j-k-1}\circ z]$$
$$=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{j-1}\sum_{l=0}^{k}C_k^lf_ig_j[(\mathrm{ad}_x)^{i+l}\circ y,(\mathrm{ad}_x)^{j-1-l}\circ z]$$
$$=\sum_{I=0}^{\infty}\sum_{J=0}^{\infty}\left(\sum_{r=0}^{I}C_{J+r+1}^{r+1}f_{I-r}g_{J+r+1}\right)[(\mathrm{ad}_x)^I\circ y,(\mathrm{ad}_x)^J\circ z]$$

Теперь мы можем продолжить вычисление (267):

$$\frac{1}{2}\{S^0_{\Delta^1},S^0_{\Delta^1}\}=\left\langle p_{01},\frac{1}{4}[[\omega^{01},\omega^1-\omega^0],\omega^1-\omega^0]+\right.$$
$$+\sum_{I,J=0}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{\tilde{B}_{I+J}}{(I+J)!}C^I_{I+J}([(\mathrm{ad}_{\omega^{01}})^I\circ\omega^1,(\mathrm{ad}_{\omega^{01}})^J\circ\omega^1]-[(\mathrm{ad}_{\omega^{01}})^I\circ\omega^0,(\mathrm{ad}_{\omega^{01}})^J\circ\omega^0])-$$
$$-\sum_{I=0}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{\tilde{B}_I}{I!}[(\mathrm{ad}_{\omega^{01}})^I\circ(\omega^1-\omega^0),\omega^0+\omega^1]-$$
$$-\sum_{I=1}^{\infty}\sum_{J=0}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{\tilde{B}_{I+J}}{(I+J)!}C^I_{I+J}[(\mathrm{ad}_{\omega^{01}})^I\circ(\omega^0+\omega^1),(\mathrm{ad}_{\omega^{01}})^J\circ(\omega^1-\omega^0)]-$$
$$\left.-\sum_{I,J=0}^{\infty}\left(\sum_{r=0}^{I}\frac{\tilde{B}_{I-r}}{(I-r)!}\,\frac{\tilde{B}_{J+r+1}}{(J+r+1)!}\,C^{r+1}_{J+r+1}\right)[(\mathrm{ad}_{\omega^{01}})^I\circ(\omega^1-\omega^0),(\mathrm{ad}_{\omega^{01}})^J\circ(\omega^1-\omega^0)]\right\rangle_{\mathfrak{g}} \tag{270}$$

Третье и четвёртое слагаемое отсюда вместе дают

$$-\sum_{I=0}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{\tilde{B}_I}{I!}[(\mathrm{ad}_{\omega^{01}})^I\circ(\omega^1-\omega^0),\omega^0+\omega^1]-$$

$$-\sum_{I=1}^{\infty}\sum_{J=0}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{\tilde{B}_{I+J}}{(I+J)!}C_{I+J}^{I}[(\mathrm{ad}_{\omega^{01}})^{I}\circ(\omega^0+\omega^1),(\mathrm{ad}_{\omega^{01}})^{J}\circ(\omega^1-\omega^0)]$$
$$=-\sum_{I,J=0}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{\tilde{B}_{I+J}}{(I+J)!}C_{I+J}^{I}[(\mathrm{ad}_{\omega^{01}})^{I}\circ(\omega^0+\omega^1),(\mathrm{ad}_{\omega^{01}})^{J}\circ(\omega^1-\omega^0)]$$
$$=\sum_{I,J=0}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{\tilde{B}_{I+J}}{(I+J)!}C_{I+J}^{I}([(\mathrm{ad}_{\omega^{01}})^{I}\circ\omega^0,(\mathrm{ad}_{\omega^{01}})^{J}\circ\omega^0]-[(\mathrm{ad}_{\omega^{01}})^{I}\circ\omega^1,(\mathrm{ad}_{\omega^{01}})^{J}\circ\omega^1])$$

то есть, сокращают второе слагаемое в (270). Поэтому

$$\frac{1}{2}\{S^0_{\Delta^1},S^0_{\Delta^1}\}=\Big\langle p_{01},\frac{1}{4}[[\omega^{01},\omega^1-\omega^0],\omega^1-\omega^0]-$$
$$-\sum_{I,J=0}^{\infty}\left(\sum_{r=0}^{I}\frac{\tilde{B}_{I-r}}{(I-r)!}\ \frac{\tilde{B}_{J+r+1}}{(J+r+1)!}\ C_{J+r+1}^{r+1}\right)[(\mathrm{ad}_{\omega^{01}})^{I}\circ(\omega^1-\omega^0),(\mathrm{ad}_{\omega^{01}})^{J}\circ(\omega^1-\omega^0)]\Big\rangle_{\mathfrak{g}}$$
$$=< p_{01},\sum_{I,J=0}^{\infty}\mathcal{A}_{IJ}[(\mathrm{ad}_{\omega^{01}})^{I}\circ(\omega^1-\omega^0),(\mathrm{ad}_{\omega^{01}})^{J}\circ(\omega^1-\omega^0)]>_{\mathfrak{g}}\quad(271)$$

где коэффициенты

$$\mathcal{A}_{IJ}:=\frac{1}{8}(\delta_{I,1}\delta_{J,0}+\delta_{I,0}\delta_{J,1})-$$
$$-\frac{1}{2}\left(\sum_{r=0}^{I}\frac{\tilde{B}_{I-r}}{(I-r)!}\ \frac{\tilde{B}_{J+r+1}}{(J+r+1)!}\ C_{J+r+1}^{r+1}+\sum_{s=0}^{J}\frac{\tilde{B}_{J-s}}{(J-s)!}\ \frac{\tilde{B}_{I+s+1}}{(I+s+1)!}\ C_{I+s+1}^{s+1}\right)=0\quad(272)$$

— двухпараметрическое семейство квадратичных соотношений для чисел Бернулли.

Теперь проверим собственно квантовую часть мастер-уравнения для S_{Δ^1}:

$$\Delta S^0_{\Delta^1}+\{S^0_{\Delta^1},S^1_{\Delta^1}\}$$
$$=\left(-\left\langle\frac{\partial}{\partial\omega^0},\frac{\partial}{\partial p_0}\right\rangle_{\mathfrak{g}}-\left\langle\frac{\partial}{\partial\omega^1},\frac{\partial}{\partial p_1}\right\rangle_{\mathfrak{g}}+\left\langle\frac{\partial}{\partial\omega^{01}},\frac{\partial}{\partial p_{01}}\right\rangle_{\mathfrak{g}}\right)S^0_{\Delta^1}+S^0_{\Delta^1}\left\langle-\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p_{01}},\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\omega^{01}}\right\rangle_{\mathfrak{g}}S^1_{\Delta^1}$$
$$=\left(\mathrm{tr}_g\mathrm{ad}_{\omega^0}+\mathrm{tr}_g\mathrm{ad}_{\omega^1}-\frac{1}{2}\mathrm{tr}_g\mathrm{ad}_{\omega^0+\omega^1}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\tilde{B}_n}{n!}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{tr}_g\ (\mathrm{ad}_{\omega^{01}})^k[(\mathrm{ad}_{\omega^{01}})^{n-k-1}\circ(\omega^1-\omega^0),\bullet]\right)+$$
$$+\left\langle\frac{1}{2}[\omega^{01},\omega^0+\omega^1]+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tilde{B}_n}{n!}(\mathrm{ad}_{\omega^{01}})^n\circ(\omega^1-\omega^0),\frac{\partial}{\partial\omega^{01}}\right\rangle_{\mathfrak{g}}\circ\left(\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\tilde{B}_m}{m\cdot m!}\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}_{\omega^{01}})^m\right)$$
$$=\mathrm{tr}_g\mathrm{ad}_{\omega^0}+\mathrm{tr}_g\mathrm{ad}_{\omega^1}-\frac{1}{2}\mathrm{tr}_g\mathrm{ad}_{\omega^0+\omega^1}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\tilde{B}_n}{n!}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{tr}_g\ [(\mathrm{ad}_{\omega^{01}})^{n-k-1}\circ(\omega^1-\omega^0),(\mathrm{ad}_{\omega^{01}})^k\bullet]+$$
$$+\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{\tilde{B}_m}{m!}\mathrm{tr}_g\ [[\omega^{01},\omega^1-\omega^0],(\mathrm{ad}_{\omega^{01}})^{m-1}\bullet]+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\tilde{B}_n}{n!}\frac{\tilde{B}_m}{m!}\mathrm{tr}_g\ [(\mathrm{ad}_{\omega^{01}})^n\circ(\omega^1-\omega^0),(\mathrm{ad}_{\omega^{01}})^{m-1}\bullet]$$
$$(273)$$

Заметим, что первые три слагаемые исчезают из-за унимодулярности $\mathfrak{g}$. Для упрощения остальной части выражения используем следующее соотношение:

$$\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\ [[x,y],(\mathrm{ad}_x)^a\bullet]=\mathrm{tr}_g\ \mathrm{ad}_x[y,(\mathrm{ad}_x)^a\bullet]-\mathrm{tr}_g\ [y,(\mathrm{ad}_x)^{a+1}\bullet]=0$$

для любых $x, y \in \mathfrak{g}$ и $a \geq 0$, где мы воспользовались тождеством Якоби и циклическим свойством следа. Отсюда вытекает

$$\mathrm{tr}_g\ [(\mathrm{ad}_x)^a \circ y, (\mathrm{ad}_x)^b \bullet] = 0$$

для $a \geq 1$, $b \geq 0$. Поэтому в четвёртом члене в (273) вклад дают только слагаемые с $k = n-1$, а в шестом — только слагаемые с $n = 0$, и пятый член равен нулю. Поэтому

$$\Delta S^0_{\Delta^1} + \{S^0_{\Delta^1}, S^1_{\Delta^1}\} = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\tilde{B}_n}{n!} \mathrm{tr}_g\ [\omega^1 - \omega^0, (\mathrm{ad}_{\omega^{01}})^{n-1} \bullet] + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\tilde{B}_m}{m!} \mathrm{tr}_g\ [\omega^1 - \omega^0, (\mathrm{ad}_{\omega^{01}})^{m-1} \bullet] = 0 \tag{274}$$

Итак, мы явно проверили мастер-уравнение для действия (256). Заметим, что вычисление (273,274) показывает, что однопетлевая часть симплициального действия на отрезке полностью восстанавлиется по древесной части, т.е. значения супер-следов (259) можно косвенно вычислить с помощью мастер-уравнения из древесной части действия (т.е. из интегралов (258)), и получаются те же значения, которые мы получили явно, используя различные базисы в пространстве дифференциальных форм на отрезке. Проверка мастер-уравнения для симплициального действия является чисто конечномерным вычислением, в отличие от явного вычисления супер-следов по $\Omega^0(\Delta^1)$, и поэтому является в некотором смысле более строгим доказательством результата (259). С другой стороны, классическое мастер-уравнение на $S^0_{\Delta^1}$, как показывает наше вычисление, эквивалентно нетривильному тождеству для чисел Бернулли (272).

Также отметим, что вычисление (267,270) явно демонстрирует, что укороченное действие для отрезка не удовлетворяло бы классическому мастер-уравнению: вклад граничных точек отрезка играет важную роль в сокращении.

5.5.2. *Индуцированная qL_∞-структура на $C^\bullet(\Delta^1, \mathfrak{g})$.* Как следует из формулы (256) для S_{Δ^1}, структура qL_∞-алгебры на пространстве коцепей стандартной триангуляции отрезка $C^\bullet(\Delta^1, \mathfrak{g}) = \mathfrak{g}e_0 \oplus \mathfrak{g}e_1 \oplus \mathfrak{g}e_{01}$ задаётся когомологическим векторным полем

$$\begin{aligned} Q_{\Delta^1} = &-\left\langle \frac{1}{2}[\omega^0, \omega^0], \frac{\partial}{\partial \omega^0} \right\rangle_{\mathfrak{g}} - \left\langle \frac{1}{2}[\omega^1, \omega^1], \frac{\partial}{\partial \omega^1} \right\rangle_{\mathfrak{g}} + \\ &+ \left\langle \frac{1}{2}[\omega^{01}, \omega^0 + \omega^1] + \left(\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}{2} \coth \frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}{2} \right) \circ (\omega^1 - \omega^0), \frac{\partial}{\partial \omega^{01}} \right\rangle_{\mathfrak{g}} \end{aligned} \tag{275}$$

на пространстве коцепей со сдвинутой градуировкой $C^\bullet(\Delta^1, \mathfrak{g})[1] \cong \mathfrak{g}[1] \oplus \mathfrak{g}[1] \oplus \mathfrak{g}$, и плотностью

$$\rho_{\Delta^1} = \exp\left(\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}} \log \frac{\sinh \frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}{2}}{\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}{2}} \right) = \det{}_{\mathfrak{g}} \left(\frac{\sinh \frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}{2}}{\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}{2}} \right)$$

согласованной с Q_{Δ^1} меры

$$\mu_{\Delta^1} = \rho_{\Delta^1} \mathcal{D}\omega^0 \mathcal{D}\omega^1 \mathcal{D}\omega^{01} = \prod_a \mathcal{D}\omega^{0a} \cdot \prod_b \mathcal{D}\omega^{0b} \cdot \det{}_{\mathfrak{g}} \left(\frac{\sinh \frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}{2}}{\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}{2}} \right) \prod_c \mathcal{D}\omega^{01c}$$

где a, b, c пробегают базис в $\mathfrak{g}$. Таким образом, мера μ_{Δ^1} есть произведение координатной меры Березина на $\mathfrak{g}[1] \oplus \mathfrak{g}[1]$ (т.е. на коцепях, сосредоточенных на концах отрезка) и инвариантной меры на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ (т.е. на коцепях, сосредоточенных на старшей клетке триангуляции):

$$\det_{\mathfrak{g}}\left(\frac{\sinh\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}{2}}{\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}{2}}\right)\prod_c \mathcal{D}\omega^{01c} = \exp^* \mu_G$$

— обратный образ меры Хаара на группе Ли G при экспоненциальном отображении $\exp : \mathfrak{g} \to G$, см. [18].

Соответствующие классические и квантовые операции $\{l_{(n)}\}$, $\{q_{(n)}\}$ в терминах суперполя $\omega = e_0\omega^0 + e_1\omega^1 + e_{01}\omega^{01}$ имеют вид

$$\begin{aligned}
l_{(2)}(\omega, \omega) &= e_0[\omega^0, \omega^0] + e_1[\omega^1, \omega^1] + e_{01}[\omega^{01}, \omega^0 + \omega^1] \\
l_{(n)}(\underbrace{\omega, \ldots, \omega}_{n}) &= nB_{n-1}\; e_{01}\left((\mathrm{ad}_{\omega^{01}})^n \circ (\omega^1 - \omega^0)\right), \quad \text{для } n \neq 2 \\
q_{(n)}(\underbrace{\omega, \cdots, \omega}_{n}) &= \frac{B_n}{n}\mathrm{tr}_g(\mathrm{ad}_{\omega^{01}})^n
\end{aligned}$$

в частности, операции $l_{(4)} = l_{(6)} = l_{(8)} = \cdots = 0$ и $q_{(3)} = q_{(5)} = q_{(7)} = \cdots = 0$, поскольку соответствующие коэффициенты (числа Бернулли) равны нулю, и кроме того $q_{(1)} = 0$ вследствие унимодулярности $\mathfrak{g}$. Эквивалентно, можно сказать, что полилинейные суперантисимметричные операции $l_{(n)} : \Lambda^n C^\bullet(\Delta^1, \mathfrak{g}) \to C^\bullet(\Delta^1, \mathfrak{g})$ и $q_{(n)} : \Lambda^n C^\bullet(\Delta^1, \mathfrak{g}) \to \mathbb{R}$ действуют на $\mathfrak{g}$-значных коцепях $\alpha = e_0\alpha^0 + e_1\alpha^1 + e_{01}\alpha^{01} \in C^\bullet(\Delta^1, \mathfrak{g})$ как

$$\begin{aligned}
l_{(2)}(\alpha_1, \alpha_2) &= e_0[\alpha_1^0, \alpha_2^0] + e_1[\alpha_1^1, \alpha_2^1] + e_{01}\left(\frac{1}{2}[\alpha_1^{01}, \alpha_2^0 + \alpha_2^1] + \frac{1}{2}[\alpha_1^0 + \alpha_1^1, \alpha_2^{01}]\right), \\
l_{(n)}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) &= \frac{B_{n-1}}{(n-1)!}\; e_{01}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k} \cdot \\
&\quad \cdot \sum_{\left(\pi:(1\cdots\widehat{k}\cdots n)\mapsto(1\cdots\widehat{k}\cdots n)\right)\in S_{n-1}} \mathrm{ad}_{\alpha^{01}_{\pi(1)}}\cdots\widehat{\mathrm{ad}_{\alpha^{01}_{\pi(k)}}}\cdots\mathrm{ad}_{\alpha^{01}_{\pi(n)}} \circ (\alpha_k^1 - \alpha_k^0) \\
&\quad \textit{для } n \neq 2, \\
q_{(n)}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) &= \frac{B_n}{n \cdot n!}\sum_{(\pi:(1\cdots n)\mapsto(1\cdots n))\in S_n} \mathrm{tr}_g\left(\mathrm{ad}_{\alpha^{01}_{\pi(1)}}\cdots\mathrm{ad}_{\alpha^{01}_{\pi(n)}}\right)
\end{aligned}$$

где нижний индекс у α — номер коцепи (верхний индекс, как обычно, — симплекс триангуляции), суммы по π — это суммы по перестановкам и S_n — симметрическая группа.

Можно ещё так сформулировать результат: в терминах базиса $e_{\sigma a} = T_a e_\sigma$ на $C^\bullet(\Delta^1, \mathfrak{g})$ (здесь T_a — базис в $\mathfrak{g}$), мы раскладываем коцепи как $\alpha = \sum_a(e_{0a}\alpha^{0a} + e_{1a}\alpha^{1a} + e_{01a}\alpha^{01a}) \in C^\bullet(\Delta^1, \mathfrak{g})$, где $\alpha^{0a}, \alpha^{1a}, \alpha^{01a} \in \mathbb{R}$, и можем написать операции в терминах структурных констант:

$$l_{(n)}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{\sigma,\sigma_1,\ldots,\sigma_n\in\{[0],[1],[01]\}}\;\sum_{a,a_1,\ldots,a_n} e_{\sigma a} l^{\sigma a}_{(n)\sigma_1 a_1,\ldots,\sigma_n a_n}\alpha_1^{\sigma_1 a_1}\cdots\alpha_n^{\sigma_n a_n}$$

$$q_{(n)}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \;=\; \sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n\in\{[0],[1],[01]\}}\sum_{a_1,\ldots,a_n} q_{(n)\sigma_1 a_1,\ldots,\sigma_n a_n}\alpha_1^{\sigma_1 a_1}\cdots\alpha_n^{\sigma_n a_n}$$

где структурные константы есть

$$l^{01a}_{(1)1b} = -l^{01a}_{(1)0b} = \delta^a_b,$$

$$l^{0a}_{(2)0b,0c} = l^{1a}_{(2)1b,1c} = f^a_{bc},\ l^{01a}_{(2)01b,0c} = l^{01a}_{(2)01b,1c} = l^{01a}_{(2)0b,01c} = l^{01a}_{(2)1b,01c} = \frac{1}{2}f^a_{bc},$$

$$l^{01a}_{(n)01a_1,\ldots,01a_{k-1},1a_k,01a_{k+1},\ldots,01a_n} = -l^{01a}_{(n)01a_1,\ldots,01a_{k-1},1a_k,01a_{k+1},\ldots,01a_n} = (-1)^{n-k}\frac{B_{n-1}}{(n-1)!}\cdot$$

$$\cdot \sum_{\left(\pi:(1\cdots\widehat{k}\cdots n)\mapsto(1\cdots\widehat{k}\cdots n)\right)\in S_{n-1}}\ \sum_{b_1,\ldots,\widehat{b_k},\ldots,b_{n-1}} f^a_{a_{\pi(1)}b_1} f^{b_1}_{a_{\pi(2)}b_2}\cdots f^{b_{k-2}}_{a_{\pi(k-1)}b_{k-1}} f^{b_{k-1}}_{a_{\pi(k+1)}b_{k+1}}\cdots f^{b_{n-1}}_{a_{\pi(n)}a_k}$$

для $n\geq 2$ и $1\leq k\leq n$,

$$q_{(n)01a_1,\ldots,01a_n} = \frac{B_n}{n\cdot n!}\sum_{(\pi:(1\cdots n)\mapsto(1\cdots n))\in S_n}\ \sum_{b_1,\ldots,b_n} f^{b_n}_{a_{\pi(1)}b_1} f^{b_1}_{a_{\pi(2)}b_2}\cdots f^{b_{n-1}}_{a_{\pi(n)}b_n}$$

Все остальные структурные константы равны нулю. Мы использовали обозначение $f^a_{bc} =< T^a, [T_b, T_c] >_{\mathfrak{g}}$ для структурных констант алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Исходя из общей конструкции (Утверждение 10), мы знаем, что L_∞-структура (275) на пространстве $C^\bullet(\Delta^1,\mathfrak{g})$ гомотопна алгебре де Рама на отрезке (с коэффициентами в $\mathfrak{g}$) $\Omega^\bullet(\Delta^1,\mathfrak{g})$. Более того, нетрудно явно вычислить L_∞-квази-изоморфизм (162) U_{Δ^1} : $C^\bullet(\Delta^1,\mathfrak{g})[1]\to\Omega^\bullet(\Delta^1,\mathfrak{g})[1]$.

Утверждение 14. *L_∞-квази-изоморфизм $U_{\Delta^1}: C^\bullet(\Delta^1,\mathfrak{g})[1]\to\Omega^\bullet(\Delta^1,\mathfrak{g})[1]$ между L_∞-алгеброй $(C^\bullet(\Delta^1,\mathfrak{g}), Q_{\Delta^1})$ и DGLA $\mathfrak{g}$-значных дифференциальных форм на отрезке $(\Omega^\bullet(\Delta^1,\mathfrak{g}), d, [\bullet,\bullet])$ имеет вид*

$$\begin{aligned} U_{\Delta^1}(e_0\omega^0+e_1\omega^1+e_{01}\omega^{01}) \;&=\; \omega^0 t+\omega^1(1-t)+\omega^{01}dt+ \qquad (276)\\ &\quad+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{B_{n+1}(t)-B_{n+1}}{(n+1)!}(\mathrm{ad}_{\omega^{01}})^n\circ(\omega^1-\omega^0)\\ &=\; \omega^0+\left(\frac{1-e^{-t\,\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}}{1-e^{-\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}}\right)\circ(\omega^1-\omega^0)+\omega^{01}dt \qquad (277)\end{aligned}$$

Доказательство. Аргумент, согласно которому в (162) для случая отрезка дают только деревья вида $(*(*\cdots(*(**))\cdots))$, полностью переносится из доказательства Теоремы 8. Поэтому ряд (162) приобретает вид

$$U_{\Delta^1}(e_0\omega^0+e_1\omega^1+e_{01}\omega^{01}) = \chi_0\omega^0+\chi_1\omega^1+\chi_{01}\omega^{01}+\sum_{n=1}^{\infty}(-K[\chi_{01}\omega^{01},\bullet])^n\circ(\chi_0\omega^0+\chi_1\omega^1)$$

Используя результат (257), немедленно получаем отсюда (277). Также отметим, что можно переписать (277) в более симметричном виде:

$$U_{\Delta^1}(e_0\omega^0+e_1\omega^1+e_{01}\omega^{01}) = \left(\frac{1-e^{t_0\,\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}}{1-e^{\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}}\right)\circ\omega^0+\left(\frac{1-e^{-t_1\,\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}}{1-e^{-\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}}\right)\circ\omega^1+\omega^{01}dt$$

где $t_1 = t, t_0 = 1 - t$ — барицентрические координаты на отрезке.

□

5.5.3. *Примеры конструкций из раздела 5.4: склеивание двух отрезков по граничной точке, склеивание отрезка в окружность, отрывание граничной точки.* Теперь, располагая результатом (256), мы можем довести до явного ответа некоторые простейшие примеры конструкций раздела 5.4.

Рассмотрим склейку двух отрезков по граничной точке. Пусть $\Xi_1 = \{[0], [1'], [01']\}$ и $\Xi_2 = \{[1''], [2], [1''2]\}$ — стандартные триангуляции двух отрезков $[01']$ и $[1''2]$, и пусть $F = \{[A]\}$ — симплициальный комплекс, состоящий из единственной точки. Вложения

$$F \hookrightarrow \Xi_1 : \ [A] \mapsto [1']$$

F в Ξ_1 как правого конца отрезка и

$$F \hookrightarrow \Xi_2 : \ [A] \mapsto [1'']$$

F в Ξ_2 как левого конца приводят к соответствующим вложениям $\iota_{1,2}$ и проекциям $\pi_{1,2}$ для коцепных комплексов $V_1 = C^\bullet(\Xi_1, \mathfrak{g}) = \mathfrak{g}e_0 \oplus \mathfrak{g}e_{1'} \oplus \mathfrak{g}e_{01'}$, $V_2 = C^\bullet(\Xi_2, \mathfrak{g}) = \mathfrak{g}e_{1''} \oplus \mathfrak{g}e_2 \oplus \mathfrak{g}e_{1''2}$, $W = C^\bullet(F, \mathfrak{g}) = \mathfrak{g}e_A$:

$$\begin{aligned}
\iota_1 : W \to V_1,\ x^A e_A &\mapsto x^A e_{1'} \\
\iota_2 : W \to V_2,\ x^A e_A &\mapsto x^A e_{1''} \\
\pi_1 : V_1 \to W,\ x^0 e_0 + x^{1'} e_{1'} + x^{01'} e_{01'} &\mapsto x^{1'} e_A \\
\pi_2 : V_2 \to W,\ x^{1''} e_{1''} + x^2 e_2 + x^{1''2} e_{1''2} &\mapsto x^{1''} e_A
\end{aligned}$$

Пространство склеенной qL_∞-алгебры мы строим как $V' = \ker \pi_- \subset V_1 \oplus V_2$, то есть, в данном случае

$$V' = \mathfrak{g}e_0 \oplus \mathfrak{g}e_{01'} \oplus \mathfrak{g}e_2 \oplus \mathfrak{g}e_{1''2} \oplus \mathfrak{g}e_{1^+}$$

где $e_{1^+} = e_{1'} + e_{1''}$, и V' интерпретируется как пространство коцепей $V' = C^\bullet(\Xi', \mathfrak{g})$ на склеенном симплициальном комплексе $\Xi' = \{[0], [1^+], [2], [01'], [1''2]\}$, где правый конец отрезка $[01']$ отождествлён с 0-симплексом $[1^+]$ и с левым концом $[1''2]$. Это отождествление никак не влияет на V' как векторное пространство, однако явственно видно из устройства дифференциала (операции $l_{(1)}$) склеенной qL_∞-структуры на V'. Для склеенной qL_∞-структуры на V', используя известный ответ для точки и отрезка, получаем:

$$\begin{aligned}
Q_{\Xi'} = Q_{\Xi_1} + Q_{\Xi_2} - Q_F \ = \ & -\left\langle \frac{1}{2}[\omega^0, \omega^0], \frac{\partial}{\partial \omega^0} \right\rangle_{\mathfrak{g}} - \left\langle \frac{1}{2}[\omega^{1^+}, \omega^{1^+}], \frac{\partial}{\partial \omega^{1^+}} \right\rangle_{\mathfrak{g}} - \left\langle \frac{1}{2}[\omega^2, \omega^2], \frac{\partial}{\partial \omega^2} \right\rangle_{\mathfrak{g}} + \\
& + \left\langle \frac{1}{2}[\omega^{01'}, \omega^0 + \omega^{1^+}] + \left(\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01'}}}{2} \coth \frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01'}}}{2} \right) \circ (\omega^{1^+} - \omega^0), \frac{\partial}{\partial \omega^{01'}} \right\rangle_{\mathfrak{g}} +
\end{aligned}$$

$$+\left\langle \frac{1}{2}[\omega^{1''2},\omega^{1^+}+\omega^2]+\left(\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{1''2}}}{2}\coth\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{1''2}}}{2}\right)\circ(\omega^2-\omega^{1^+}),\frac{\partial}{\partial\omega^{1''2}}\right\rangle_{\mathfrak{g}}$$

$$\rho_{\Xi'}=\frac{\rho_{\Xi_1}\rho_{\Xi_2}}{\rho_F} = \det{}_{\mathfrak{g}}\left(\frac{\sinh\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01'}}}{2}}{\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01'}}}{2}}\right)\cdot\det{}_{\mathfrak{g}}\left(\frac{\sinh\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{1''2}}}{2}}{\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{1''2}}}{2}}\right)$$

Супер-поля для $\mathcal{F}'=T^*[-1](V'[1])$ есть $\omega'=e_0\omega^0+e_{1^+}\omega^{1^+}+e_2\omega^2+e_{01'}\omega^{01'}+e_{1''2}\omega^{1''2}$, $p'=p_0e^0+p_{1^+}e^{1^+}+p_2e^2+p_{01'}e^{01'}+p_{1''2}e^{1''2}$, где $\omega^{1^+}=\frac{1}{2}(\omega^{1'}+\omega^{1''})$ и $p_{1^+}=p_{1'}+p_{1''}$. Склеенное действие на $\mathcal{F}'$ имеет вид

$$S_{\Xi'}=S_{\Xi_1}+S_{\Xi_2}-S_F=\left\langle p_0,\frac{1}{2}[\omega^0,\omega^0]\right\rangle_{\mathfrak{g}}+\left\langle p_{1^+},\frac{1}{2}[\omega^{1^+},\omega^{1^+}]\right\rangle_{\mathfrak{g}}+\left\langle p_2,\frac{1}{2}[\omega^2,\omega^2]\right\rangle_{\mathfrak{g}}+$$
$$+\left\langle p_{01'},\frac{1}{2}[\omega^{01'},\omega^0+\omega^{1^+}]+\left(\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01'}}}{2}\coth\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01'}}}{2}\right)\circ(\omega^{1^+}-\omega^0)\right\rangle_{\mathfrak{g}}+$$
$$+\left\langle p_{1''2},\frac{1}{2}[\omega^{1''2},\omega^{1^+}+\omega^2]+\left(\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{1''2}}}{2}\coth\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{1''2}}}{2}\right)\circ(\omega^2-\omega^{1^+})\right\rangle_{\mathfrak{g}}+$$
$$+\hbar\left(\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\log\left(\frac{\sinh\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01'}}}{2}}{\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01'}}}{2}}\right)+\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\log\left(\frac{\sinh\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{1''2}}}{2}}{\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{1''2}}}{2}}\right)\right)$$

Для склейки отрезка в окружность имеем $\Xi=\{[0],[1],[01]\}$ — стандартная триангуляция отрезка, $F=\{[A]\}$ — "триангуляция" точки. Вложения F в Ξ как левого или правого конца

$$F\hookrightarrow\Xi:\quad [A]\mapsto[0],$$
$$F\hookrightarrow\Xi:\quad [A]\mapsto[1]$$

приводит к паре вложений и ретракций для коцепных комплексов $V=C^\bullet(\Xi,\mathfrak{g})=\mathfrak{g}e_0\oplus\mathfrak{g}e_1\oplus\mathfrak{g}e_{01}$, $W=C^\bullet(F,\mathfrak{g})=\mathfrak{g}e_A$:

$$\iota_1:W\to V,\ x^Ae_A\mapsto x^Ae_0$$
$$\iota_2:W\to V,\ x^Ae_A\mapsto x^Ae_1$$
$$\pi_1:V\to W,\ x^0e_0+x^1e_1+x^{01}e_{01}\mapsto x^0e_A$$
$$\pi_2:V\to W,\ x^0e_0+x^1e_1+x^{01}e_{01}\mapsto x^1e_A$$

Пространство склеенной qL_∞-алгебры есть $V'=\ker\pi_-=\mathfrak{g}e_+\oplus\mathfrak{g}e_{01}\subset V$, где $e_+=e_0+e_1$. Мы отождествляем V' с коцепным комплексом $V'=C^\bullet(\Xi',\mathfrak{g})$, для триангулированной окружности $\Xi'=\{[+],[01]\}$ (здесь $[+]$ — название 0-симплекса, склеенного из концов исходного отрезка $[0]$ и $[1]$). Склеенная qL_∞-структура на V' имеет вид

$$Q_{\Xi'}=Q_\Xi-Q_F = -\left\langle\frac{1}{2}[\omega^+,\omega^+],\frac{\partial}{\partial\omega^+}\right\rangle_{\mathfrak{g}}+\left\langle[\omega^{01},\omega^+],\frac{\partial}{\partial\omega^{01}}\right\rangle_{\mathfrak{g}}$$
$$\rho_{\Xi'}=\frac{\rho_\Xi}{\rho_F} = \det{}_{\mathfrak{g}}\left(\frac{\sinh\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}{2}}{\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}{2}}\right)$$

Супер-поля для $\mathcal{F}' = T^*[-1](V'[1])$ есть $\omega' = e_+\omega^+ + e_{01}\omega^{01}$, $p' = p_+e^+ + p_{01}e^{01}$, где $\omega^+ = \frac{1}{2}(\omega^0 + \omega^1)$ и $p_+ = p_0 + p_1$. Склеенное действие на $\mathcal{F}'$:

$$S_{\Xi'} = S_\Xi - S_F = \left\langle p_+, \frac{1}{2}[\omega^+, \omega^+] \right\rangle_{\mathfrak{g}} + \left\langle p_{01}, [\omega^{01}, \omega^+] \right\rangle_{\mathfrak{g}} + \hbar \,\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}} \log \left(\frac{\sinh \frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}{2}}{\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}{2}} \right) \tag{278}$$

Как мы знаем из рассуждений раздела 5.4.2, это действие является эффективным BF_∞-действием, индуцированным из топологической BF-теории на окружности с помощью данных индуцирования (246–248).

Наконец, доведём до явного ответа пример с отрыванием граничной точки отрезка из раздела 5.4.1. Пусть $\Xi = \{[0], [1], [01]\}$ — триангулированный отрезок и $F = \{[A]\}$ — точка. Вложение $F \hookrightarrow \Xi :\ [A] \mapsto [1]$ приводит к ретракции для коцепных комплексов $V = C^\bullet(\Xi, \mathfrak{g}) = \mathfrak{g}e_0 \oplus \mathfrak{g}e_1 \oplus \mathfrak{g}e_{01}$, $W = C^\bullet(F, \mathfrak{g}) = \mathfrak{g}e_A$:

$$\pi_1 : V \to W,\ x^0e_0 + x^1e_1 + x^{01}e_{01} \mapsto x^1e_A$$

(вложение $W \to V$ не требуется в конструкции наложения граничного условия). Тогда $V' = \ker \pi_1 = \mathfrak{g}e_0 \oplus \mathfrak{g}e_{01} \subset V$. Мы можем понять V' как линейное пространство отображений $V' = C^\bullet(\Xi', \mathfrak{g}) := \mathfrak{g}^{\Xi'}$ из набора симплексов $\Xi' = \{[0], [01]\}$ (это не симплициальный комплекс, поскольку он не замкнут относительно оператора взятия границы) в алгебру Ли $\mathfrak{g}$. Тогда на V' возникает ограниченная qL_∞-структура

$$\begin{aligned} Q_{\Xi'} = Q_\Xi|_{\Xi'} &= -\left\langle \frac{1}{2}[\omega^0, \omega^0], \frac{\partial}{\partial \omega^0} \right\rangle_{\mathfrak{g}} + \left\langle \frac{1}{2}[\omega^{01}, \omega^0] - \left(\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}{2} \coth \frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}{2} \right) \circ \omega^0, \frac{\partial}{\partial \omega^{01}} \right\rangle_{\mathfrak{g}} \\ \rho_{\Xi'} = \rho_\Xi|_{\Xi'} &= \det{}_{\mathfrak{g}} \left(\frac{\sinh \frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}{2}}{\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}{2}} \right) \end{aligned}$$

и соответствующее действие имеет вид

$$\begin{aligned} S_{\Xi'} = S_\Xi - S_F = \left\langle p_0, \frac{1}{2}[\omega^0, \omega^0] \right\rangle_{\mathfrak{g}} + \left\langle p_{01}, \frac{1}{2}[\omega^{01}, \omega^0] - \left(\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}{2} \coth \frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}{2} \right) \circ \omega^0 \right\rangle_{\mathfrak{g}} + \\ + \hbar \,\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}} \log \left(\frac{\sinh \frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}{2}}{\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}{2}} \right) \end{aligned}$$

Заметим также, что если оторвать у отрезка обе граничные точки, т.е. взять $\Xi = \{[0], [1], [01]\}$, $F = \{[A], [B]\}$, где $[A]$ вкладывается как $[0]$ и $[B]$ — как $[1]$, получим $V' = \mathfrak{g}e_{01} = C^\bullet(\Xi', \mathfrak{g})$, где $\Xi' = \{[01]\}$ — только старшая клетка отрезка, и соответствующая qL_∞ - алгебра есть

$$\begin{aligned} Q_{\Xi'} &= 0 \\ \rho_{\Xi'} &= \det{}_{\mathfrak{g}} \left(\frac{\sinh \frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}{2}}{\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}{2}} \right) \end{aligned}$$

то есть, все классические операции равны нулю, однако квантовые операции нетривиальны. Соответствующее действие состоит только из однопетлевой части:

$$S_{\Xi'} = \hbar\, \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}} \log \left(\frac{\sinh \frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}{2}}{\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}{2}} \right)$$

5.6. **Пертурбативные результаты для симплексов размерности** $D \geq 2$**.** Итак, мы успешно решили вопрос о вычислении укороченного симплициального действия на симплексе $\bar{S}_{\Delta^D}$ для симплексов низших размерностей $D = 0, 1$, и были получены явные ответы (251) и (254,255). Теперь обратимся случаю симплекса Δ^D старшей размерности $D \geq 2$. К сожалению, мы не можем написать здесь явный ответ и можем лишь вычислять значения первых фейнмановсих диаграмм в разложении (189) для $\bar{S}_{\Delta^D}$.

Введём обозначение $\bar{S}_{\Delta^D,\Gamma}$ для вклада фейнмановской диаграммы $\Gamma \in \mathbf{T}_{\mathrm{nonPl}} \cup \mathbf{L}_{\mathrm{nonPl}}$ в разложение (189) для $\bar{S}_{\Delta^D}$, т.е.

$$\bar{S}_{\Delta^D} = \sum_{T \in \mathbf{T}_{\mathrm{nonPl}}} \bar{S}_{\Delta^D,T} + \hbar \sum_{L \in \mathbf{L}_{\mathrm{nonPl}}} \bar{S}_{\Delta^D,L} \tag{279}$$

Для удобства мы формально вводим дерево с одним листом $(*)$, и соответствующий ему вклад в $\bar{S}_{\Delta^D}$ есть первое слагаемое в (189):

$$\bar{S}_{\Delta^D,(*)} = \sum_{k=0}^{D} (-1)^k < p_{\Delta^D}, \omega^{0\cdots\widehat{k}\cdots D} >_{\mathfrak{g}}$$

(эту сумму следует понимать как сумму по граням коразмерности 1, т.е. по $\sigma = [0\cdots\widehat{k}\cdots D] \subset \Delta^D$). Разложим значения фейнмановских диаграмм $\bar{S}_{\Delta^D,\Gamma}$ на собственно де рамовскую часть и часть в $\mathfrak{g}$-коэффициентах

$$\begin{aligned}\bar{S}_{\Delta^D,T} &= \frac{1}{|\mathrm{Aut}(T)|} \sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_{|T|} \subset \Delta^D} \left\langle p_{\Delta^D}, \int_{\Delta^D} \mathrm{Iter}_{T;-K_{\Delta^D}[\bullet,\bullet];[\bullet,\bullet]}(\chi_{\sigma_1}\omega^{\sigma_1}, \ldots, \chi_{\sigma_{|T|}}\omega^{\sigma_{|T|}}) \right\rangle_{\mathfrak{g}} \\ &= \frac{1}{|\mathrm{Aut}(T)|} \sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_{|T|} \subset \Delta^D} \int_{\Delta^D} \mathrm{Iter}_{T;-K_{\Delta^D}(\bullet\wedge\bullet);(\bullet\wedge\bullet)}(\chi_{\sigma_1}, \ldots, \chi_{\sigma_{|T|}}) \cdot \\ &\qquad \cdot < p_{\Delta^D}, \mathrm{Iter}_{T;[\bullet,\bullet];[\bullet,\bullet]}(\omega^{\sigma_1}, \ldots, \omega^{\sigma_{|T|}}) >_{\mathfrak{g}} \epsilon_T(|\sigma_1|, \ldots, |\sigma_{|T|}|)\end{aligned}$$

где имеется ввиду, что для всякого непланарного дерева T мы выбираем какую-нибудь планарную структуру и вычисляем Iter_T с ней. Знак $\epsilon_T(|\sigma_1|, \ldots, |\sigma_{|T|}|) = \pm 1$ определяется из

$$\begin{aligned}&\mathrm{Iter}_{T;-K_{\Delta^D}[\bullet,\bullet];[\bullet,\bullet]}(\chi_{\sigma_1}\omega^{\sigma_1}, \ldots, \chi_{\sigma_{|T|}}\omega^{\sigma_{|T|}}) \\ &\quad = \mathrm{Iter}_{T;-K_{\Delta^D}(\bullet\wedge\bullet);(\bullet\wedge\bullet)}(\chi_{\sigma_1}, \ldots, \chi_{\sigma_{|T|}}) \mathrm{Iter}_{T;[\bullet,\bullet];[\bullet,\bullet]}(\omega^{\sigma_1}, \ldots, \omega^{\sigma_{|T|}}) \epsilon_T(|\sigma_1|, \ldots, |\sigma_{|T|}|)\end{aligned}$$

и возникает из-за перестановки переменных ω^σ чётности $(1 - |\sigma|) \mod 2$ с формами χ_σ чётности $|\sigma| \mod 2$ и нечётными операторами K_{Δ^D}. Очевидно, знак ϵ_T зависит только от дерева T и размерностей граней $\sigma_1, \ldots, \sigma_{|T|}$. В частности,

$$\begin{aligned}\epsilon_{(*)}(|\sigma_1|) &= +1 \\ \epsilon_{(**)}(|\sigma_1|, |\sigma_2|) &= (-1)^{(|\sigma_1|+1)|\sigma_2|} \\ \epsilon_{(*(**))}(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|) &= (-1)^{(|\sigma_2|+1)|\sigma_3|+(|\sigma_1|+1)(|\sigma_2|+|\sigma_3|+1)}\end{aligned}$$

Точно также мы раскладываем и вклады однопетлевых диаграмм:

$$\begin{aligned}\bar{S}_{\Delta^D,L} &= -\frac{1}{|\mathrm{Aut}(L)|} \sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_{|L|}\subset\Delta^D} \mathrm{Loop}_{L;-K_{\Delta^D}[\bullet,\bullet];\Omega_0^\bullet(\Delta^D,\mathfrak{g})}(\chi_{\sigma_1}\omega^{\sigma_1}, \ldots, \chi_{\sigma_{|L|}}\omega^{\sigma_{|L|}}) \\ &= -\frac{1}{|\mathrm{Aut}(L)|} \sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_{|L|}\subset\Delta^D} \mathrm{Loop}_{L;-K_{\Delta^D}(\bullet\wedge\bullet);\Omega_0^\bullet(\Delta^D)}(\chi_{\sigma_1}, \ldots, \chi_{\sigma_{|L|}}) \cdot \\ &\qquad \cdot \mathrm{Loop}_{L;[\bullet,\bullet];\mathfrak{g}}(\omega^{\sigma_1}, \ldots, \omega^{\sigma_{|L|}})\epsilon_L(|\sigma_1|, \ldots, |\sigma_{|L|}|)\end{aligned}$$

где опять же мы фиксируем для каждого непланарного графа L какую-нибудь планарную структуру (и отмечаем какое-нибудь ребро на цикле), и знак $\epsilon_L = \pm 1$ определяется из

$$\begin{aligned}&\mathrm{Loop}_{L;-K_{\Delta^D}[\bullet,\bullet];\Omega_0^\bullet(\Delta^D,\mathfrak{g})}(\chi_{\sigma_1}\omega^{\sigma_1}, \ldots, \chi_{\sigma_{|L|}}\omega^{\sigma_{|L|}}) \\ &= \mathrm{Loop}_{L;-K_{\Delta^D}(\bullet\wedge\bullet);\Omega_0^\bullet(\Delta^D)}(\chi_{\sigma_1}, \ldots, \chi_{\sigma_{|L|}}) \cdot \mathrm{Loop}_{L;[\bullet,\bullet];\mathfrak{g}}(\omega^{\sigma_1}, \ldots, \omega^{\sigma_{|L|}})\epsilon_L(|\sigma_1|, \ldots, |\sigma_{|L|}|)\end{aligned}$$

и, также как и ϵ_T, зависит только от графа L и размерностей граней. Например,

$$\begin{aligned}\epsilon_{(*\bullet)}(|\sigma_1|) &= +1 \\ \epsilon_{((**)\bullet)}(|\sigma_1|, |\sigma_2|) &= (-1)^{(|\sigma_1|+1)|\sigma_2|} \\ \epsilon_{(*(*\bullet))}(|\sigma_1|, |\sigma_2|) &= (-1)^{(|\sigma_1|+1)(|\sigma_2|+1)}\end{aligned}$$

Заметим, что если длина цикла в однопетлевой диаграмме $[L] = 1$, то $\bar{S}_{\Delta^D,L} = 0$, поскольку $\mathrm{Loop}_{L;[\bullet,\bullet];\mathfrak{g}}(\omega^{\sigma_1}, \ldots, \omega^{\sigma_{|L|}}) = \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}[\cdots, \bullet] = 0$ вследствие унимодулярности $\mathfrak{g}$. Поэтому, в (279) вклад дают только однопетлевые диаграммы L с длиной цикла $[L] \geq 2$, т.е. $L = (*(*\bullet)), (*(*(*\bullet))), (*((**)\bullet)), \ldots$

Введём специальные обозначения для де рамовских частей диаграмм:

$$C_{\Delta^D,T}(\sigma_1, \ldots, \sigma_{|T|}) = \int_{\Delta^D} \mathrm{Iter}_{T;-K_{\Delta^D}(\bullet\wedge\bullet);(\bullet\wedge\bullet)}(\chi_{\sigma_1}, \ldots, \chi_{\sigma_{|T|}})$$

для планарных деревьев T и

$$C_{\Delta^D,L}(\sigma_1, \ldots, \sigma_{|L|}) = \mathrm{Loop}_{L;-K_{\Delta^D}(\bullet\wedge\bullet);\Omega_0^\bullet(\Delta^D)}(\chi_{\sigma_1}, \ldots, \chi_{\sigma_{|L|}})$$

для планарных однопетлевых графов L. Таким образом, $C_{\Delta^D,\Gamma} : \{\sigma \subset \Delta^D\}^{|\Gamma|} \to \mathbb{R}$ есть отображение из набора $|\Gamma|$ граней симплекса Δ^D в числа. Для каждого фейнмановского графа $C_{\Delta^D,\Gamma}(\sigma_1, \ldots, \sigma_{|\Gamma|})$ зависит от комбинаторики взаимного расположения граней

$\sigma_1,\ldots,\sigma_{|\Gamma|}$. В терминах $C_{\Delta^D,\Gamma}$ вклады $\bar{S}_{\Delta^D,\Gamma}$ фейнмановских диаграмм в укороченное симплициальное действие $\bar{S}_{\Delta^D}$ на симплексе записываются как

$$\bar{S}_{\Delta^D,T} = \frac{1}{|\mathrm{Aut}(T)|} \sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_{|T|}\subset\Delta^D} \epsilon_T(|\sigma_1|,\ldots,|\sigma_{|T|}|)\cdot$$
$$\cdot\, C_{\Delta^D,T}(\sigma_1,\ldots,\sigma_{|T|}) < p_{\Delta^D}, \mathrm{Iter}_{T;[\bullet,\bullet],[\bullet,\bullet]}(\omega^{\sigma_1},\ldots,\omega^{\sigma_{|T|}}) >_{\mathfrak{g}}$$

для деревьев и

$$\bar{S}_{\Delta^D,L} = -\frac{1}{|\mathrm{Aut}(L)|} \sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_{|L|}\subset\Delta^D} \epsilon_L(|\sigma_1|,\ldots,|\sigma_{|L|}|) C_{\Delta^D,L}(\sigma_1,\ldots,\sigma_{|L|}) \mathrm{Loop}_{L;[\bullet,\bullet];\mathfrak{g}}(\omega^{\sigma_1},\ldots,\omega^{\sigma_{|L|}})$$

для однопетлевых графов. Поэтому нетривиальную часть задачи пертурбативного вычисления $\bar{S}_{\Delta^D}$ составляет вычисление чисел $C_{\Delta^D,\Gamma}$. Отметим, что де рамовская часть вклада фейнмановского дерева выражается через кратные интегралы (вследствие конструкции оператора Дюпона (176) на Δ^D), в то время как вклад однопетлевой диаграммы включает вычисление супер-следа интегрального оператора по бесконечномерному пространству дифференциальных форм $\Omega^\bullet_0(\Delta^D)$, и потому однопетлевое вычисление гораздо сложнее технически, и может, в принципе, содержать расходимости. Однако, есть косвенный способ восстановить некоторую часть однопетлевого ответа, не прибегая к прямому вычислению супер-следов, с помощью мастер-уравнения и ответа для деревьев. Ещё одно обстоятельство, упрощающее пертурбативные вычисления для симплекса — симметрия результатов относительно перестановок вершин Δ^D.

Если $\pi : (0\cdots D) \to (0\cdots D)$ — перестановка вершин Δ^D, $\pi \in S_{n+1}$, то будем обозначать её действие на грани Δ^D как

$$\mathrm{perm}_\pi : [i_0\cdots i_k] \mapsto [\pi(i_0)\cdots\pi(i_k)]$$

или для краткости просто $\pi[i_0\cdots i_k] := [\pi(i_0)\cdots\pi(i_k)]$. На дифференциальных формах на Δ^D перестановки действуют гомоморфизмами $\mathrm{perm}^*_\pi : \Omega^\bullet(\Delta^D) \to \Omega^\bullet(\Delta^D)$ и посылают $t_i \mapsto t_{\pi(i)}$, $dt_i \mapsto dt_{\pi(i)}$. Для нас важны следующие свойства действия перестановок на формах

$$\begin{aligned} \int_{\Delta^D} \mathrm{perm}^*_\pi\alpha &= (-1)^\pi \int_{\Delta^D} \alpha \\ K_{\Delta^D}(\mathrm{perm}^*_\pi\alpha) &= \mathrm{perm}^*_\pi\alpha \\ \mathrm{perm}^*_\pi\chi_\sigma &= \chi_{\pi\sigma} \end{aligned}$$

для любой перестановки $\pi : (0\cdots D) \to (0\cdots D)$, формы $\alpha \in \Omega^\bullet(\Delta^D)$ и грани $\sigma \subset \Delta^D$.

Прямым следствием этих свойств является "внешняя" симметрия де рамовских частей фейнмановских диаграмм (симметрия относительно перестановок вершин Δ^D):

$$C_{\Delta^D,T}(\pi\sigma_1,\ldots,\pi\sigma_{|T|}) \;=\; (-1)^\pi C_{\Delta^D,T}(\sigma_1,\ldots,\sigma_{|T|}) \tag{280}$$

$$C_{\Delta^D,L}(\pi\sigma_1,\ldots,\pi\sigma_{|L|}) \;=\; C_{\Delta^D,L}(\sigma_1,\ldots,\sigma_{|L|}) \tag{281}$$

для любых $\pi : (0\cdots n) \to (0\cdots n)$, $T \in \mathbf{T}_{\mathrm{Pl}}$, $L \in \mathbf{L}_{\mathrm{Pl}}$, $\sigma_i \subset \Delta^D$. Различие в поведении древесных и однопетлевых диаграмм (наличие или отсутствие знака $(-1)^\pi$) связано с тем, что для древесной диаграммы

$$C_{\Delta^D,T}(\pi\sigma_1,\ldots,\pi\sigma_{|T|}) = \int_{\Delta^D} \mathrm{perm}_\pi^* \mathrm{Iter}_{T;-K_{\Delta^D}(\bullet\wedge\bullet);(\bullet\wedge\bullet)}(\chi_{\sigma_1},\ldots,\chi_{\sigma_{|T|}}) = (-1)^\pi C_{\Delta^D,T}(\sigma_1,\ldots,\sigma_{|T|})$$

— знак возникает из спаривания переставленной формы с непереставленным фундаментальным классом симплекса, в то время как

$$\begin{aligned}C_{\Delta^D,L}(\pi\sigma_1,\ldots,\pi\sigma_{|L|}) = \mathrm{Str}_{\Omega_0^\bullet(\Delta^D)}\Big(\mathrm{perm}_\pi^* \circ \mathrm{Iter}_{L;-K_{\Delta^D}(\bullet\wedge\bullet);-K_{\Delta^D}(\bullet\wedge\bullet)}(\chi_{\sigma_1},\ldots,\chi_{\sigma_{|L|}}) \circ \mathrm{perm}_\pi^*\Big)\\ = C_{\Delta^D,L}(\sigma_1,\ldots,\sigma_{|L|})\end{aligned}$$

Никакого знака здесь не возникает, поскольку мы просто считаем супер-след сопряжённого на действие перестановки оператора.

Из свойства (171) для форм Уитни непосредственно вытекает свойство "внутренней" симметрии $C_{\Delta^D,\Gamma}$ (согласованность с перестановками вершин внутри граней):

$$C_{\Delta^D,\Gamma}(\pi_1\sigma_1,\ldots,\pi_{|\Gamma|}\sigma_{|\Gamma|}) \;=\; (-1)^{\pi_1}\cdots(-1)^{\pi_{|\Gamma|}} C_{\Delta^D,\Gamma}(\sigma_1,\ldots,\sigma_{|\Gamma|}) \tag{282}$$

где каждое $\pi_j : \sigma_j \to \sigma_j$ — перестановка вершин σ_j.

Также есть третий вид симметрии $C_{\Delta^D,\Gamma}$ — симметрия относительно изоморфизма графов $\kappa : \Gamma \to \Gamma'$:

$$C_{\Delta^D,\Gamma'}(\sigma_{\kappa(1)},\ldots,\sigma_{\kappa(|\Gamma|)}) = \epsilon_\kappa(|\sigma_1|,\ldots,|\sigma_{|\Gamma|}|) C_{\Delta^D,\Gamma}(\sigma_1,\ldots,\sigma_{|\Gamma|})$$

где мы понимаем, что κ посылает листья Γ в листья Γ'. Знак $\epsilon_\kappa(|\sigma_1|,\ldots,|\sigma_{|\Gamma|}|)$ зависит от κ и только от размерностей граней (не от комбинаторики их взаимного расположения). Например, если взять $\kappa : (*_1(*_2*_3)) \to ((*_3*_2)*_1)$ (индексы показывают, какие листья переходят в какие), получим

$$\begin{aligned}C_{\Delta^D,((**)*)}(\sigma_3,\sigma_2,\sigma_1) &= \int_{\Delta^D} -K_{\Delta^D}(\chi_{\sigma_3}\wedge\chi_{\sigma_2})\wedge\chi_{\sigma_1}\\ &= (-1)^{|\sigma_2||\sigma_3|+|\sigma_1|(|\sigma_2|+|\sigma_3|+1)} \int_{\Delta^D} \chi_{\sigma_1}\wedge(-K_{\Delta^D}(\chi_{\sigma_2}\wedge\chi_{\sigma_3}))\\ &= (-1)^{|\sigma_2||\sigma_3|+|\sigma_1|(|\sigma_2|+|\sigma_3|+1)} C_{\Delta^D,(*(**))}(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)\end{aligned}$$

Ограничения на значения $C_{\Delta^D,\Gamma}$ возникают из случая, когда $\kappa : \Gamma \to \Gamma$ — автоморфизм планарного графа. Например, для $\kappa : (*_1(*_2*_3)) \to (*_1(*_3*_2))$, имеем

$$C_{\Delta^D,(*(**))}(\sigma_1,\sigma_3,\sigma_2) = \int_{\Delta^D} \chi_{\sigma_1} \wedge (-K_{\Delta^D}(\chi_{\sigma_3} \wedge \chi_{\sigma_2}))$$
$$= (-1)^{|\sigma_2||\sigma_3|} \int_{\Delta^D} \chi_{\sigma_1} \wedge (-K_{\Delta^D}(\chi_{\sigma_2} \wedge \chi_{\sigma_3})) = (-1)^{|\sigma_2||\sigma_3|} C_{\Delta^D,(*(**))}(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) \quad (283)$$

Мы можем теперь сформулировать явный пертурбативный результат для $\bar{S}_{\Delta^D}$ для симплекса произвольной размерности.

Теорема 9. *Для симплекса любой размерности $D \geq 0$ начало пертурбативного разложения для укороченного действия имеет вид*

$$\bar{S}_{\Delta^D} = \bar{S}_{\Delta^D,(*)} + \bar{S}_{\Delta^D,(**)} + \bar{S}_{\Delta^D,(*(**))} + \hbar \bar{S}_{\Delta^D,(*(*\bullet))} + O(p\omega^4 + \hbar\omega^3)$$

где

$$\bar{S}_{\Delta^D,(*)} = \sum_{\sigma_1 \subset \Delta^D,\, |\sigma_1| = D-1} \eta_{\Delta^D,(*)}(\sigma_1) < p_{\Delta^D}, \omega^{\sigma_1} >_{\mathfrak{g}} \quad (284)$$

$$\bar{S}_{\Delta^D,(**)} = \frac{1}{2} \sum_{\sigma_1,\sigma_2 \subset \Delta^D,\, |\sigma_1|+|\sigma_2| = D} (-1)^{(|\sigma_1|+1)|\sigma_2|} \eta_{\Delta^D,(**)}(\sigma_1,\sigma_2) \cdot$$
$$\cdot \frac{|\sigma_1|!\,|\sigma_2|!}{(|\sigma_1|+|\sigma_2|+1)!} < p_{\Delta^D}, [\omega^{\sigma_1}, \omega^{\sigma_2}] >_{\mathfrak{g}} \quad (285)$$

$$\bar{S}_{\Delta^D,(*(**))} = \frac{1}{2} \sum_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3 \subset \Delta^D,\, |\sigma_1|+|\sigma_2|+|\sigma_3| = D+1} (-1)^{(|\sigma_1|+1)(|\sigma_2|+|\sigma_3|+1)+(|\sigma_2|+1)|\sigma_3|} \cdot$$
$$\cdot \eta_{\Delta^D,(*(**))}(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) \cdot \frac{|\sigma_1|!\,|\sigma_2|!\,|\sigma_3|!}{(|\sigma_2|+|\sigma_3|+1)\cdot(|\sigma_1|+|\sigma_2|+|\sigma_3|+1)!} \cdot$$
$$\cdot < p_{\Delta^D}, [\omega^{\sigma_1}, [\omega^{\sigma_2}, \omega^{\sigma_3}]] >_{\mathfrak{g}} \quad (286)$$

$$\bar{S}_{\Delta^D,(*(*\bullet))} = \frac{1}{2} \left(\mathcal{A}_D \sum_{0 \leq i < j \leq D} \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}_{\omega^{ij}})^2 + \mathcal{B}_D \sum_{0 \leq i < j < k \leq D} \mathrm{tr}_g(\mathrm{ad}_{\omega^{jk}-\omega^{ik}+\omega^{ij}})^2 \right) \quad (287)$$

Коэффициенты $\eta_{\Delta^D,T} \in \{\pm 1, 0\}$ зависят от комбинаторики пересечения граней и определяются следующим образом:

- *если $\sigma_1 = [0 \cdots \widehat{k} \cdots D]$, то*

$$\eta_{\Delta^D,(*)}(\sigma_1) = (-1)^k$$

- *если грани $\sigma_1 = [i_0 \cdots i_{|\sigma_1|}]$ и $\sigma_2 = [j_0 \cdots j_{|\sigma_2|}]$ пересекаются по единственной вершине $\sigma_1 \cap \sigma_2 = [i_r] = [j_s]$, то*

$$\eta_{\Delta^D,(**)}(\sigma_1,\sigma_2) = (-1)^s (-1)^{(i_0 \cdots i_{|\sigma_1|} j_0 \cdots \widehat{j_s} \cdots j_{|\sigma_2|})}$$

  в противном случае $\eta_{\Delta^D,(**)}(\sigma_1,\sigma_2) = 0$

- *если грани* $\sigma_1 = [i_0 \cdots i_{|\sigma_1|}]$, $\sigma_2 = [j_0 \cdots j_{|\sigma_2|}]$, $\sigma_3 = [k_0 \cdots k_{|\sigma_3|}]$, *имеют следующую структуру взаимного пересечения:* $\sigma_2 \cap \sigma_3 = [j_r] = [k_s]$, $\sigma_1 \cap \sigma_2 = [i_u i_q] = [j_v j_r]$, $\sigma_1 \cap \sigma_3 = [i_q] = [k_s]$, *то*

$$\eta_{\Delta^D,(*(**))}(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) = (-1)^{r+s+v+\theta(v-r)+1}(-1)^{(i_0\cdots i_{|\sigma_1|}j_0\cdots\widehat{j_v}\cdots\widehat{j_r}\cdots j_{|\sigma_2|}k_0\cdots\widehat{k_s}\cdots k_{|\sigma_3|})} \tag{288}$$

если $\sigma_2 \cap \sigma_3 = [j_r] = [k_s]$,$\sigma_1 \cap \sigma_2 = [i_q] = [j_r]$, $\sigma_1 \cap \sigma_3 = [i_u i_q] = [k_v k_s]$, *то*

$$\eta_{\Delta^D,(*(**))}(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) = (-1)^{r+s+v+\theta(v-s)+1+|\sigma_2|}(-1)^{(i_0\cdots i_{|\sigma_1|}j_0\cdots\widehat{j_r}\cdots j_{|\sigma_2|}k_0\cdots\widehat{k_v}\cdots\widehat{k_s}\cdots k_{|\sigma_3|})} \tag{289}$$

в противном случае $\eta_{\Delta^D,(*(**))}(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) = 0$.

Коэффициенты $\mathcal{A}_D$, $\mathcal{B}_D$ *зависят только от размерности симплекса* D, *причём*

$$\mathcal{A}_D = \frac{(-1)^{D+1}}{(D+1)^2(D+2)} \tag{290}$$

Прежде, чем перейти к доказательству, сформулируем два промежуточных результата.

Лемма 5. *Пусть* $\sigma_1 = [i_0 \cdots i_{|\sigma_1|}]$ *и* $\sigma_2 = [j_0 \cdots j_{|\sigma_2|}]$ — *две грани* Δ^D. *Тогда если* σ_1 *и* σ_2 *пересекаются по симплексу размерности* $|\sigma_1 \cap \sigma_2| \geq 1$, *то*

$$\chi_{\sigma_1} \wedge \chi_{\sigma_2} = 0 \tag{291}$$

Если σ_1 *и* σ_2*пересекаются ровно по одной вершине* $[i_r] = [j_s]$, *то*

$$\chi_{\sigma_1} \wedge \chi_{\sigma_2} = (-1)^s \frac{|\sigma_1|!\,|\sigma_2|!}{(|\sigma_1|+|\sigma_2|)!} t_{j_s} \chi_{i_0\cdots i_{|\sigma_1|}j_0\cdots\widehat{j_s}\cdots j_{|\sigma_2|}} \tag{292}$$

Для интеграла по Δ^D *произведения двух форм Уитни имеет место*

$$\int_{\Delta^D} \chi_{\sigma_1} \wedge \chi_{\sigma_2} = \begin{cases} (-1)^s(-1)^{(i_0\cdots i_{|\sigma_1|}j_0\cdots\widehat{j_s}\cdots j_{|\sigma_2|})}\frac{|\sigma_1|!\,|\sigma_2|!}{(|\sigma_1|+|\sigma_2|+1)!}, \\ \qquad \text{если } |\sigma_1|+|\sigma_2| = D \text{ и } \sigma_1\cap\sigma_2 = [i_r] = [j_s] \\ 0, \qquad \text{в противном случае} \end{cases} \tag{293}$$

второй знак — знак перестановки $(0\cdots D) \mapsto (i_0 \cdots i_{|\sigma_1|} j_0 \cdots \widehat{j_s} \cdots j_{|\sigma_2|})$.

Доказательство Леммы 5. Докажем (291). Пользуясь симметрией $S_{D+1} \circlearrowright \Delta^D$, мы можем без ограничения общности выбрать $\sigma_1 = [0 \cdots a]$, $\sigma_2 = [a-c, a+b-c]$, где $a = |\sigma_1|, b = |\sigma_2|, c = |\sigma_1 \cap \sigma_2| \geq 1$. В случае $c \geq 2$:

$$\chi_{\sigma_1} \wedge \chi_{\sigma_2} = a!b! \sum_{0\leq p\leq a,\, a-c\leq q\leq a+b-c} (-1)^{p+q+a+c} t_p t_q dt_0 \cdots \widehat{dt_p} \cdots dt_a dt_{a-c} \cdots \widehat{dt_q} \cdots dt_{a+b-c} = 0$$

поскольку каждое слагаемое в этом выражении содержит $dt_j \wedge dt_j = 0$ для некоторого $a-c \leq j \leq a$. Для случая $c = 1$:

$$\chi_{\sigma_1} \wedge \chi_{\sigma_2} = a!b! \sum_{0\leq p\leq a,\, a-1\leq q\leq a+b-1} (-1)^{p+q+a+1} t_p t_q dt_0 \cdots \widehat{dt_p} \cdots dt_a dt_{a-1} \cdots \widehat{dt_q} \cdots dt_{a+b-1}$$

в этом выражении вклад дают только два слагаемых: $p = a - 1$, $q = a$ и $p = a$, $q = a - 1$ и они сокращают друг друга. Поэтому (291) доказано.

Теперь рассмотрим случай $c = 0$ (т.е. σ_1 и σ_2 пересекаются по 0-симплексу $[a]$). Имеем

$$
\begin{aligned}
\chi_{\sigma_1} \wedge \chi_{\sigma_2} = a!b! \sum_{0 \le p \le a,\, a \le q \le a+b} & (-1)^{p+q+a} t_p t_q dt_0 \cdots \widehat{dt_p} \cdots dt_a dt_a \cdots \widehat{dt_q} \cdots dt_{a+b} \\
= a!b! & \left(\sum_{0 \le p \le a} (-1)^p t_p t_a dt_0 \cdots \widehat{dt_p} \cdots dt_a dt_{a+1} \cdots dt_{a+b} + \right. \\
& \left. + \sum_{a+1 \le q \le a+b} (-1)^q t_a t_q dt_0 \cdots dt_{a-1} dt_a \cdots \widehat{dt_q} \cdots dt_{a+b} \right) \\
& = a!b! t_a \sum_{0 \le p \le a+b} (-1)^p t_p dt_0 \cdots \widehat{dt_p} \cdots dt_{a+b} = \frac{a!\, b!}{(a+b)!} t_a \chi_{0 \cdots (a+b)}
\end{aligned}
$$

пользуясь симметрией симплекса Δ^D, получаем отсюда (292).

Для того, чтобы интеграл (293) был отличен от нуля, необходимо, чтобы $\chi_{\sigma_1} \wedge \chi_{\sigma_2}$ было D-формой, т.е. $|\sigma_1| + |\sigma_2| = D$. Поэтому χ_{σ_1} и χ_{σ_2} обязаны пересекаться. Если пересечение — симплекс размерности > 0, то интеграл равен нулю вследствие (291). Если пересечение χ_{σ_1} и χ_{σ_2} есть 0-симплекс, мы попадаем в случай (292). Поэтому, пользуясь симметрией Δ^D, мы сводим (293) к интегралу

$$
\begin{aligned}
\int_{\Delta^D} t_0 \chi_{0 \cdots D} = D! \int_{\Delta^D} & \left((t_0)^2 dt_1 \cdots dt_D + \sum_{p=1}^{D} (-1)^p t_0 t_p dt_0 \cdots \widehat{dt_p} \cdots dt_D \right) \\
& = D! \left(\frac{2!}{(D+2)!} + D \frac{1!\, 1!}{(D+1+1)!} \right) = \frac{1}{D+1} \qquad (294)
\end{aligned}
$$

Мы используем здесь следующую полезную формулу (см. [15]) для интеграла монома по симплексу:

$$
\int_{\Delta^D} t_1^{a_1} \cdots t_D^{a_D} dt_1 \cdots dt_D = \frac{a_1! \cdots a_D!}{(a_1 + \cdots + a_D + D)!} \qquad (295)
$$

Итак, для интеграла (293), используя (292) и (294), получаем

$$
\begin{aligned}
& \int_{\Delta^D} \chi_{i_0 \cdots i_{|\sigma_1|}} \wedge \chi_{j_0 \cdots j_{|\sigma_2|}} = (-1)^s \frac{|\sigma_1|!\, |\sigma_2|!}{(|\sigma_1| + |\sigma_2|)!} \int_{\Delta^D} t_{j_s} \chi_{i_0 \cdots i_{|\sigma_1|} j_0 \cdots \widehat{j_s} \cdots j_{|\sigma_2|}} \\
= (-1)^s & \frac{|\sigma_1|!\, |\sigma_2|!}{(|\sigma_1| + |\sigma_2|)!} (-1)^{(i_0 \cdots i_{|\sigma_1|} j_0 \cdots \widehat{j_s} \cdots j_{|\sigma_2|})} \frac{1}{D+1} = (-1)^s (-1)^{(i_0 \cdots i_{|\sigma_1|} j_0 \cdots \widehat{j_s} \cdots j_{|\sigma_2|})} \frac{|\sigma_1|!\, |\sigma_2|!}{(|\sigma_1| + |\sigma_2| + 1)!}
\end{aligned}
$$

□

Лемма 6. *Пусть $\sigma_1 = [i_0 \cdots i_{|\sigma_1|}]$ и $\sigma_2 = [j_0 \cdots j_{|\sigma_2|}]$ — две грани Δ^D. Если σ_1 и σ_2 пересекаются по симплексу размерности ≥ 1 или не пересекаются вовсе, то*

$$
K_{\Delta^D}(\chi_{\sigma_1} \wedge \chi_{\sigma_2}) = 0 \qquad (296)
$$

Если же они пересекаются по единственной вершине $[i_r] = [j_s]$, то

$$K_{\Delta^D}(\chi_{\sigma_1} \wedge \chi_{\sigma_2}) = (-1)^{r+s} \frac{|\sigma_1|!\,|\sigma_2|!}{(|\sigma_1| + |\sigma_2| + 1) \cdot (|\sigma_1| + |\sigma_2| - 1)!} t_{j_s} \chi_{i_0 \cdots \widehat{i_r} \cdots i_{|\sigma_1|} j_0 \cdots \widehat{j_s} \cdots j_{|\sigma_2|}} \tag{297}$$

Доказательство Леммы 6. Случай $|\sigma_1 \cap \sigma_2| \geq 1$ следует непосредственно из (291). Рассмотрим случай $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \varnothing$. Пользуясь симметрией Δ^D, положим $\sigma_1 = [0 \cdots a]$, $\sigma_2 = [a+1, \cdots a+b+1]$. Как следует из вычисления (182) и того, что ϕ_i^* является гомоморфизмом,

$$\phi_i^*(\chi_{0 \cdots a} \wedge \chi_{(a+1) \cdots (a+b+1)}) = u^{a+b+2} \chi_{0 \cdots a} \wedge \chi_{(a+1) \cdots (a+b+1)}$$

при $i > a+b+1$, — форма нулевой степени по u и, значит, не даёт вклада в $K_{\Delta^D}(\chi_{\sigma_1} \wedge \chi_{\sigma_2})$. Поэтому можно написать

$$\begin{aligned} K_{\Delta^D}(\chi_{0 \cdots a} \wedge \chi_{(a+1) \cdots (a+b+1)}) = \sum_{-1 \leq k < a, -1 \leq l < b} (-1)^{k+l+1} \cdot \\ \cdot \sum_{0 \leq i_0 < \cdots < i_k \leq a,\ a+1 \leq j_0 < \cdots < j_l \leq a+b+1} \chi_{i_0 \cdots i_k j_0 \cdots j_l} h^{j_l} \cdots h^{j_0} h^{i_k} \cdots h^{i_0} (\chi_{0 \cdots a} \wedge \chi_{(a+1) \cdots (a+b+1)}) \end{aligned} \tag{298}$$

Мы допускаем значения $k = -1$ и $l = -1$, чтобы учесть ситуацию, когда все h действуют на одну из форм χ. Для того, чтобы вычислить действие гомотетий на произведение форм Уитни, мы снова пользуемся (182):

$$\begin{aligned} &\chi_{0 \cdots a} \wedge \chi_{(a+1) \cdots (a+b+1)} \xrightarrow{\phi_{i_0}^*} (-1)^{i_0} a u_0^{a+b}\, du_0\, \chi_{0 \cdots \widehat{i_0} \cdots a} \wedge \chi_{(a+1) \cdots (a+b+1)} \xrightarrow{\phi_{i_1}^*} \cdots \\ &\xrightarrow{\phi_{i_k}^*} (-1)^{i_0 + (i_1+1) \cdots + (i_k+k)} a(a-1) \cdots (a-k) u_0^{a+b} \cdots u_k^{a+b-k} du_k\, \chi_{0 \cdots \widehat{i_0} \cdots \widehat{i_k} \cdots a} \wedge \chi_{(a+1) \cdots (a+b+1)} \xrightarrow{\phi_{j_0}^*} \cdots \\ &\xrightarrow{\phi_{j_l}^*} (-1)^{i_0 + (i_1+1) \cdots + (i_k+k) + (j_0+k+1) + \cdots + (j_l+k+l+1)} a(a-1) \cdots (a-k) b(b-1) \cdots (b-l) \cdot \\ &\cdot u_0^{a+b} \cdots u_k^{a+b-k} du_k v_0^{a+b-k-1} dv_0 \cdots v_l^{a+b-k-l-1} dv_l\, \chi_{0 \cdots \widehat{i_0} \cdots \widehat{i_k} \cdots a} \wedge \chi_{(a+1) \cdots \widehat{j_0} \cdots \widehat{j_l} \cdots (a+b+1)} \end{aligned} \tag{299}$$

Мы здесь не выписываем слагаемые, являющиеся формами не старшей степени по $u_0, \ldots, u_k, v_0, \ldots, v_l$, поскольку дальше мы должны вычислить интеграл π_* по кубу $[0,1]^{k+l+2}$, параметризованному параметрами гомотетий $u_0, \ldots, u_k, v_0, \ldots, v_l$:

$$\begin{aligned} &h^{j_l} \cdots h^{j_0} h^{i_k} \cdots h^{i_0} (\chi_{0 \cdots a} \wedge \chi_{(a+1) \cdots (a+b+1)}) = \pi_* \phi_{j_l}^* \cdots \phi_{j_0}^* \phi_{i_k}^* \cdots \phi_{i_0}^* (\chi_{0 \cdots a} \wedge \chi_{(a+1) \cdots (a+b+1)}) \\ &= (-1)^{i_0 + \cdots i_k + j_0 + \cdots j_l + \frac{1}{2}(k+l+1)(k+l+2)} \frac{a}{a+b+1} \cdots \frac{a-k}{a+b-k+1} \cdot \frac{b}{a+b-k} \cdots \frac{b-l}{a+b-k-l} \cdot \\ &\qquad \cdot \chi_{0 \cdots \widehat{i_0} \cdots \widehat{i_k} \cdots a} \wedge \chi_{(a+1) \cdots \widehat{j_0} \cdots \widehat{j_l} \cdots (a+b+1)} \\ &\qquad = (-1)^{i_0 + \cdots i_k + j_0 + \cdots j_l + \frac{1}{2}(k+l+1)(k+l+2)} \frac{a!b!(a+b-l-k-1)!}{(a-k-1)!(b-l-1)!(a+b+1)!} \cdot \\ &\qquad \cdot \chi_{0 \cdots \widehat{i_0} \cdots \widehat{i_k} \cdots a} \wedge \chi_{(a+1) \cdots \widehat{j_0} \cdots \widehat{j_l} \cdots (a+b+1)} \end{aligned} \tag{300}$$

Теперь, чтобы закончить вычисление (298), используем следующее наблюдение:

$$\chi_{i_0\cdots i_k j_0\cdots j_l} = (k+l+1)!\left(\sum_{p=0}^{k}(-1)^p t_{i_p} dt_{i_0}\cdots\widehat{dt_{i_p}}\cdots dt_{i_k} dt_{j_0}\cdots dt_{j_l} + \right.$$
$$\left. + \sum_{q=0}^{l}(-1)^{q+k+1} t_{j_q} dt_{i_0}\cdots dt_{i_k} dt_{j_0}\cdots\widehat{dt_{j_q}}\cdots dt_{j_l}\right)$$
$$= \frac{(k+l+1)!}{k!}\chi_{i_0\cdots i_k}\wedge dt_{j_0}\cdots dt_{j_l} + (-1)^{k+1}\frac{(k+l+1)!}{l!} dt_{i_0}\cdots dt_{i_k}\wedge\chi_{j_0\cdots j_l} \quad (301)$$

Поэтому

$$K_{\Delta^D}(\chi_{0\cdots a}\wedge\chi_{(a+1)\cdots(a+b+1)})$$
$$= \sum_{-1\le k<a, -1\le l<b}(-1)^{k+l+1+a(l+1)}\frac{a!b!(a+b-l-k-1)!(k+l+1)!}{(a-k-1)!(b-l-1)!(a+b+1)!k!}\cdot$$
$$\cdot\left(\sum_{0\le i_0<\cdots<i_k\le a}(-1)^{i_0+(i_1+1)\cdots+(i_k+k)}\chi_{i_0\cdots i_k}\wedge\chi_{0\cdots\widehat{i_0}\cdots\widehat{i_k}\cdots a}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\sum_{a+1\le j_0<\cdots<j_l\le a+b+1}(-1)^{j_0+(j_1+1)+\cdots+(j_l+l)} dt_{j_0}\cdots dt_{j_l}\wedge\chi_{(a+1)\cdots\widehat{j_0}\cdots\widehat{j_l}\cdots(a+b+1)}\right) +$$
$$+ \sum_{-1\le k<a, -1\le l<b}(-1)^{k+l+1+al}\frac{a!b!(a+b-l-k-1)!(k+l+1)!}{(a-k-1)!(b-l-1)!(a+b+1)!l!}\cdot$$
$$\cdot\left(\sum_{0\le i_0<\cdots<i_k\le a}(-1)^{i_0+(i_1+1)\cdots+(i_k+k)} dt_{i_0}\cdots dt_{i_k}\wedge\chi_{0\cdots\widehat{i_0}\cdots\widehat{i_k}\cdots a}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\sum_{a+1\le j_0<\cdots<j_l\le a+b+1}(-1)^{j_0+(j_1+1)+\cdots+(j_l+l)}\chi_{j_0\cdots j_l}\wedge\chi_{(a+1)\cdots\widehat{j_0}\cdots\widehat{j_l}\cdots(a+b+1)}\right)$$

В первом слагаемом первая сумма в скобках есть ноль вследствие квадратичного соотношения на формы Уитни (184), и потому же равна нулю вторая сумма во втором слагаемом. Поэтому $K_{\Delta^D}(\chi_{0\cdots a}\wedge\chi_{(a+1)\cdots(a+b+1)}) = 0$ и (296) доказано.

Для доказательства (297), мы воспользуемся (292) и симметрией симплекса Δ^D, чтобы свести всё к случаю $\sigma_1 = [0]$, $\sigma_2 = [0\cdots a]$. Разделим $K_{\Delta^D}(t_0\chi_{0\cdots a})$ на две части:

$$K_{\Delta^D}(t_0\chi_{0\cdots a})$$
$$= \sum_{k=0}^{a-1}(-1)^k\left(\sum_{1\le i_0<\cdots i_k\le a}\chi_{i_0\cdots i_k}h^{i_k}\cdots h^{i_0}(t_0\chi_{0\cdots a}) + \sum_{1\le i_1<\cdots i_k\le a}\chi_{0 i_1\cdots i_k}h^{i_k}\cdots h^{i_1}h^0(t_0\chi_{0\cdots a})\right)$$

Вторая часть здесь соответствует случаю $i_0 = 0$, первая — $i_0 > 0$. Вычисление $h^{i_k}\cdots h^{i_0}(t_0\chi_{0\cdots a})$ аналогично (299,300):

$$t_0\chi_{0\cdots a}\xrightarrow{\phi^*_{i_0}}(-1)^{i_0} a u_0^a du_0\, t_0\chi_{0\cdots\widehat{i_0}\cdots a}\xrightarrow{\phi^*_{i_1}}\cdots$$

$$\xrightarrow{\phi^*_{i_k}} (-1)^{i_0+(i_1+1)+\cdots+(i_k+k)} a(a-1)\cdots(a-k)u_0^a du_0\cdots u_k^{a-k}du_k\, t_0\chi_{0\cdots\widehat{i_0}\cdots\widehat{i_k}\cdots a}$$

$$\xrightarrow{\pi_*} (-1)^{i_0+(i_1+1)+\cdots+(i_k+k)} \frac{a}{a+1}\cdots\frac{a-k}{a-k+1}\, t_0\chi_{0\cdots\widehat{i_0}\cdots\widehat{i_k}\cdots a}$$

$$= (-1)^{i_0+(i_1+1)+\cdots+(i_k+k)} \frac{a-k}{a+1}\, t_0\chi_{0\cdots\widehat{i_0}\cdots\widehat{i_k}\cdots a}$$

Таким же образом вычисляется $h^{i_k}\cdots h^{i_1}h^0(t_0\chi_{0\cdots a})$:

$$t_0\chi_{0\cdots a} \xrightarrow{\phi^*_0} au_0^{a-1}du_0\,(u_0t_0-u_0+1)\chi_{1\cdots a} \xrightarrow{\phi^*_{i_1}} (-1)^{i_1+1}a(a-1)\cdot$$

$$\cdot\, u_0^{a-1}du_0\, u_1^{a-2}du_1\,(u_0u_1t_0-u_0+1)\chi_{1\cdots\widehat{i_1}\cdots a} \xrightarrow{\phi^*_{i_2}} \cdots$$

$$\xrightarrow{\phi^*_{i_k}} (-1)^{(i_1+1)+\cdots+(i_k+1)} a(a-1)\cdots(a-k)\cdot$$

$$\cdot\, u_0^{a-1}du_0\, u_1^{a-2}du_1\cdots u_k^{a-k-1}du_k\,(u_0u_1\cdots u_kt_0-u_0+1)\chi_{1\cdots\widehat{i_1}\cdots\widehat{i_k}\cdots a}$$

$$\xrightarrow{\pi_*} (-1)^{(i_1+1)+\cdots+(i_k+1)}\left(\frac{a-k}{a+1}t_0-\frac{a}{a+1}+1\right)\chi_{1\cdots\widehat{i_1}\cdots\widehat{i_k}\cdots a}$$

$$= (-1)^{(i_1+1)+\cdots+(i_k+1)}\left(\frac{a-k}{a+1}t_0+\frac{1}{a+1}\right)\chi_{1\cdots\widehat{i_1}\cdots\widehat{i_k}\cdots a}$$

Поэтому

$$K_{\Delta^D}(t_0\chi_{0\cdots a}) = t_0\sum_{k=0}^{a-1}(-1)^k\frac{a-k}{a+1}\sum_{0\le i_0<\cdots<i_k\le a}(-1)^{i_0+(i_1+1)+\cdots+(i_k+k)}\chi_{i_0\cdots i_k}\wedge\chi_{0\cdots\widehat{i_0}\cdots\widehat{i_k}\cdots a}+$$

$$+\sum_{k=0}^{a-1}(-1)^k\frac{1}{a+1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le a}(-1)^{(i_1+1)+\cdots+(i_k+k)}\chi_{0i_1\cdots i_k}\wedge\chi_{1\cdots\widehat{i_1}\cdots\widehat{i_k}\cdots a}$$

$$= t_0\sum_{k=0}^{a-1}(-1)^k\frac{a-k}{a+1}\sum_{0\le i_0<\cdots<i_k\le a}(-1)^{i_0+(i_1+1)+\cdots+(i_k+k)}\chi_{i_0\cdots i_k}\wedge\chi_{0\cdots\widehat{i_0}\cdots\widehat{i_k}\cdots a}-$$

$$-\,dt_0\wedge\sum_{k=0}^{a-1}(-1)^k\frac{k}{a+1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le a}(-1)^{(i_1+1)+\cdots+(i_k+k)}\chi_{i_1\cdots i_k}\wedge\chi_{1\cdots\widehat{i_1}\cdots\widehat{i_k}\cdots a}+$$

$$+\,t_0\sum_{k=0}^{a-1}(-1)^k\frac{k!}{a+1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le a}(-1)^{(i_1+1)+\cdots+(i_k+k)}dt_{i_1}\cdots dt_{i_k}\wedge\chi_{1\cdots\widehat{i_1}\cdots\widehat{i_k}\cdots a} \tag{302}$$

Первое и второе слагаемые здесь равны нулю в силу (184). Мы также воспользовались (301) для специального случая:

$$\chi_{0i_1\cdots i_k} = k!t_0dt_{i_1}\cdots dt_{i_k} - kdt_0\wedge\chi_{i_1\cdots i_k}$$

Вычислим теперь последнее слагаемое в (302).

$$K_{\Delta^D}(t_0\chi_{0\cdots a}) = t_0\sum_{k=0}^{a-1}(-1)^k\frac{k!(a-k-1)!}{a+1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le a}\;\sum_{1\le p\le a,\, p\ne i_j}(-1)^{(i_1+1)+\cdots+(i_k+k)}\cdot$$

$$\cdot\,(-1)^{p+1+\sharp\{j:i_j<p\}}t_pdt_{i_1}\cdots dt_{i_k}dt_1\cdots\widehat{dt_{i_1}}\cdots\widehat{dt_p}\cdots\widehat{dt_{i_k}}\cdots dt_a$$

$$= t_0 \sum_{k=0}^{a-1} (-1)^k \frac{k!(a-k-1)!}{a+1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le a} \sum_{1 \le p \le a,\, p \ne i_j} (-1)^{p+1+\sharp\{j:i_j<p\}+\sharp\{j:i_j>p\}} t_p dt_1 \cdots \widehat{dt_p} \cdots dt_a$$

$$= t_0 \sum_{k=0}^{a-1} \frac{k!(a-k-1)!}{a+1} \sum_{p=1}^{a} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le a,\, p \ne i_j} (-1)^{p+1} t_p dt_1 \cdots \widehat{dt_p} \cdots dt_a$$

$$= t_0 \sum_{k=0}^{a-1} \frac{k!(a-k-1)!}{a+1} C_{a-1}^k \frac{1}{(a-1)!} \chi_{1\cdots a} = \frac{a}{a+1} t_0 \chi_{1\cdots a}$$

Пользуясь симметрией Δ^D и (292), мы выводим отсюда (297) в общем случае:

$$K_{\Delta^D}(\chi_{i_0\cdots i_{|\sigma_1|}} \wedge \chi_{j_0\cdots j_{|\sigma_2|}}) = (-1)^s \frac{|\sigma_1|!|\sigma_2|!}{(|\sigma_1|+|\sigma_2|)!} K_{\Delta^D}(t_{j_s} \chi_{i_0\cdots i_{|\sigma_1|} j_0 \cdots \widehat{j_s} \cdots j_{|\sigma_2|}})$$

$$= (-1)^{r+s} \frac{|\sigma_1|!|\sigma_2|!}{(|\sigma_1|+|\sigma_2|)!} \frac{|\sigma_1|+|\sigma_2|}{|\sigma_1|+|\sigma_2|+1} t_{j_s} \chi_{i_0\cdots \widehat{i_r} \cdots i_{|\sigma_1|} j_0 \cdots \widehat{j_s} \cdots j_{|\sigma_2|}}$$

$$= (-1)^{r+s} \frac{|\sigma_1|!|\sigma_2|!}{(|\sigma_1|+|\sigma_2|+1)\cdot(|\sigma_1|+|\sigma_2|-1)!} t_{j_s} \chi_{i_0\cdots \widehat{i_r} \cdots i_{|\sigma_1|} j_0 \cdots \widehat{j_s} \cdots j_{|\sigma_2|}}$$

□

Доказательство Теоремы 9. Результат (284) для $\bar{S}_{\Delta^D,(*)}$ очевиден, так как для де рамовской части имеем

$$\eta_{\Delta^D,(*)}(\sigma_1) = C_{\Delta^D,(*)}(\sigma_1) = \int_{\Delta^D} d\chi_{\sigma_1} = \pm 1$$

если σ_1 есть грань коразмерности 1 в Δ^D (в противном случае $C_{\Delta^D,(*)}(\sigma_1) = 0$), и знак зависит от согласованности ориентации σ_1 и Δ^D. Далее, результат (285) для $\bar{S}_{\Delta^D,(**)}$ прямо вытекает из (293), так как де рамовская часть этого вклада есть

$$C_{\Delta^D,(**)}(\sigma_1,\sigma_2) = \int_{\Delta^D} \chi_{\sigma_1} \wedge \chi_{\sigma_2}$$

Ответ (286) для $\bar{S}_{\Delta^D,(*(**))}(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ следует из (296,297): чтобы соответствующая де рамовская часть

$$C_{\Delta^D,(*(**))} = -\int_{\Delta^D} \chi_{\sigma_1} \wedge K_{\Delta^D}(\chi_{\sigma_2} \wedge \chi_{\sigma_3})$$

была отлична от нуля, необходимо, чтобы σ_2 и σ_3 пересекались ровно по одной вершине (следует из (296)). Пусть $\sigma_1 = [i_0 \cdots i_a]$, $\sigma_2 = [j_0 \cdots j_b]$, $\sigma_3 = [k_0 \cdots k_c]$ и σ_2 пересекается с σ_3 по вершине $[j_r] = [k_s]$. Тогда

$$C_{\Delta^D,(*(**))} = -\int_{\Delta^D} \chi_{i_0\cdots i_a} \wedge K_{\Delta^D}(\chi_{j_0\cdots j_b} \wedge \chi_{k_0\cdots k_c})$$

$$= (-1)^{r+s+1} \frac{b!\; c!}{(b+c+1)\cdot(b+c-1)!} \int_{\Delta^D} t_{k_s} \chi_{i_0\cdots i_a} \wedge \chi_{j_0\cdots \widehat{j_r} \cdots j_b k_0 \cdots \widehat{k_s} \cdots k_c}$$

Для того, чтобы произведение форм Уитни под интегралом было отлично от нуля, необходимо, чтобы σ_1 пересекалось с $\sigma_2 \cup \sigma_3 \backslash (\sigma_2 \cap \sigma_3) = [j_0 \cdots \widehat{j_r} \cdots j_b k_0 \cdots \widehat{k_s} \cdots k_c]$ ровно по одной вершине (мы понимаем теоретико-множественные операции $\cup$, $\backslash$, как действующие на множества вершин симплексов). Пусть эта вершина $[i_u] = [j_v]$ находится в симплексе σ_2 (случай, когда она попадает в σ_3 сводится к этому с помощью симметрии (283)). Вследствие связи размерностей $a+b+c = D+1$, симплекс σ_1 также должен содержать вершину $[i_q] = [j_r] = [k_s]$, которая оказывается тем самым общей точкой пересечения всех трёх граней. Пользуясь (292), мы можем теперь написать

$$\begin{aligned} C_{\Delta^D,(*(**))} = (-1)^{r+s+1} \frac{b!\ c!}{(b+c+1)\cdot(b+c-1)!} \cdot \\ \cdot (-1)^{v+\theta(v-r)} \frac{a!\ (b+c-1)!}{(a+b+c-1)!} \int_{\Delta^D} t_{k_s} t_{j_v} \chi_{i_0\cdots i_a j_0\cdots\widehat{j_v}\cdots\widehat{j_r}\cdots j_b k_0\cdots\widehat{k_s}\cdots k_c} \\ = (-1)^{r+s+v+\theta(v-r)+1} \frac{a!\ b!\ c!}{(b+c+1)\cdot(a+b+c-1)!} (-1)^{(i_0\cdots i_a j_0\cdots\widehat{j_v}\cdots\widehat{j_r}\cdots j_b k_0\cdots\widehat{k_s}\cdots k_c)} \int_{\Delta^D} t_0 t_1 \chi_{0\cdots D} \\ = (-1)^{r+s+v+\theta(v-r)+1} (-1)^{(i_0\cdots i_a j_0\cdots\widehat{j_v}\cdots\widehat{j_r}\cdots j_b k_0\cdots\widehat{k_s}\cdots k_c)} \frac{a!\ b!\ c!}{(b+c+1)\cdot(a+b+c+1)!} \end{aligned}$$

где мы использовали симметрию Δ^D и (295). Тем самым, результат (286) для $\bar{S}_{\Delta^D,(*(**))}$ доказан.

Далее, (287) доказывается с помощью следующего рассуждения. Запишем $\bar{S}_{\Delta^D,(*(*\bullet))}$ в виде

$$\bar{S}_{\Delta^D,(*(*\bullet))} = -\frac{1}{2} \sum_{\sigma_1,\sigma_2\subset\Delta^D} \epsilon_{(*(*\bullet))}(|\sigma_1|,|\sigma_2|) C_{\Delta^D,(*(*\bullet))}(\sigma_1,\sigma_2)\ \mathrm{tr}_g(\mathrm{ad}_{\omega^{\sigma_1}} \mathrm{ad}_{\omega^{\sigma_2}}) \tag{303}$$

где знак $\epsilon_{(*(*\bullet))}(|\sigma_1|,|\sigma_2|) = (-1)^{(|\sigma_1|+1)(|\sigma_2|+1)}$ и де рамовская часть:

$$C_{\Delta^D,(*(*\bullet))}(\sigma_1,\sigma_2) = \mathrm{Str}_{\Omega_0^\bullet(\Delta^D)} K_{\Delta^D}(\chi_{\sigma_1} \wedge K_{\Delta^D}(\chi_{\sigma_2}\wedge\bullet))$$

Для того, чтобы супер-след был отличен от нуля, необходимо, во-первых, чтобы оператор $K_{\Delta^D}(\chi_{\sigma_1}\wedge K_{\Delta^D}(\chi_{\sigma_2}\wedge\bullet))$ был степени 0, то есть должно выполняться $|\sigma_1|+|\sigma_2| = 2$. Здесь возможны варианты: $|\sigma_1| = |\sigma_2| = 1$ или $|\sigma_1| = 0$, $|\sigma_2| = 2$ или $|\sigma_1| = 2$, $|\sigma_2| = 0$. Два последних варианта эквивалентны, поскольку из-за циклического свойства следа

$$C_{\Delta^D,(*(*\bullet))}(\sigma_2,\sigma_1) = (-1)^{(|\sigma_1|+1)(|\sigma_2|+1)} C_{\Delta^D,(*(*\bullet))}(\sigma_1,\sigma_2)$$

Пусть, $|\sigma_1| = 2$, $|\sigma_2| = 0$. При перестановке двух вершин в σ_1 σ_2, супер-след $C_{\Delta^D,(*(*\bullet))}(\sigma_1,\sigma_2)$ с одной стороны должен поменять знак, вследствие (282), с другой стороны — не должен, вследствие (281). Поэтому $C_{\Delta^D,(*(*\bullet))}(\sigma_1,\sigma_2) = 0$ в этом случае, и остаётся рассмотреть случай $|\sigma_1| = |\sigma_2| = 1$. Если симплексы σ_1 и σ_2 не пересекаются, то супер-след равен нулю по тому же аргументу (перестановка двух вершин σ_1 с одной стороны меняет знак супер-следа, а с другой не меняет). Остаются только случаи, когда σ_1 и σ_2 совпадают, или пересекаются по одной вершине. Поэтому

$$C_{\Delta^D,(*(*\bullet))}(\sigma_1,\sigma_2)=\begin{cases}\tilde{\mathcal{A}}_D, & \text{если } \sigma_1=\sigma_2=[ij]\\ \tilde{\mathcal{B}}_D, & \text{если } \sigma_1=[ij],\ \sigma_2=[jk] \text{ или } \sigma_1=[jk],\ \sigma_2=[ij]\\ -\tilde{\mathcal{B}}_D, & \text{если } \sigma_1=[ik],\ \sigma_2=[jk] \text{ или } \sigma_1=[ij],\ \sigma_2=[ik]\\ 0, & \text{в противном случае}\end{cases} \tag{304}$$

Все пары одинаковых 1-симплексов переводятся друг в друга перестановками вершин Δ^D, и все пары 1-симплексов, пересекающихся по одной вершине, переводятся друг в друга композицией перестановки вершин Δ^D и перестановки вершин внутри 1-симплексов. Поэтому $C_{\Delta^D,(*(*\bullet))}$ зависит всего от двух независимых величин $\tilde{\mathcal{A}}_D$ и $\tilde{\mathcal{B}}_D$. Подставляя (304) в (303), приходим к (287), где надо положить

$$\mathcal{A}_D=-\tilde{\mathcal{A}}_D+(D-1)\tilde{\mathcal{B}}_D,\ \mathcal{B}_D=-\tilde{\mathcal{B}}_D \tag{305}$$

Наконец, формула (290) для $\mathcal{A}_D$ следует из квантового мастер-уравнения и древесного результата (286). Для того, чтобы воспользоваться мастер-уравнением, мы должны перейти от укороченного действия $\bar{S}_{\Delta^D}$ на симплексе к полному симплициальному действию

$$S_{\Delta^D}=\sum_{\sigma\subset\Delta^D}\bar{S}_{\Delta^D}=\sum_{T\in\mathbf{T}_{\mathrm{nonPl}}}\sum_{\sigma\subset\Delta^D}\bar{S}_{\sigma,T}+\hbar\sum_{L\in\mathbf{L}_{\mathrm{nonPl}}}\sum_{\sigma\subset\Delta^D}\bar{S}_{\sigma,L}$$

Проверим собственно квантовую часть мастер-уравнения в низших порядках по ω:

$$0=\Delta S^0_{\Delta^D}+\{S^0_{\Delta^D},S^1_{\Delta^D}\}=\sum_{\sigma\subset\Delta^D}(-1)^{|\sigma|+1}\left\langle\frac{\partial}{\partial\omega^\sigma},\frac{\partial}{\partial p_\sigma}\right\rangle_{\mathfrak{g}}S^0_{\Delta^D}-\sum_{\sigma\subset\Delta^D}S^0_{\Delta^D}\left\langle\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p_\sigma},\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\omega^\sigma}\right\rangle_{\mathfrak{g}}S^1_{\Delta^D}$$

$$=\sum_{T\in\mathbf{T}_{\mathrm{nonPl}}}\sum_{\sigma,\sigma'\subset\Delta^D}(-1)^{|\sigma|+1}\left\langle\frac{\partial}{\partial\omega^\sigma},\frac{\partial}{\partial p_\sigma}\right\rangle_{\mathfrak{g}}\bar{S}^0_{\sigma',T}-\sum_{T\in\mathbf{T}_{\mathrm{nonPl}},\,L\in\mathbf{L}_{\mathrm{nonPl}}}\sum_{\sigma,\sigma',\sigma''\subset\Delta^D}\bar{S}^0_{\sigma',T}\left\langle\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p_\sigma},\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\omega^\sigma}\right\rangle_{\mathfrak{g}}\bar{S}^1_{\sigma'',L}$$

$$=\sum_{T\in\mathbf{T}_{\mathrm{nonPl}}}\sum_{\sigma\subset\Delta^D}(-1)^{|\sigma|+1}\left\langle\frac{\partial}{\partial\omega^\sigma},\frac{\partial}{\partial p_\sigma}\right\rangle_{\mathfrak{g}}\bar{S}^0_{\sigma,T}-\sum_{T\in\mathbf{T}_{\mathrm{nonPl}},\,L\in\mathbf{L}_{\mathrm{nonPl}}}\sum_{\sigma\subset\sigma'\subset\Delta^D}\bar{S}^0_{\sigma,T}\left\langle\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p_\sigma},\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\omega^\sigma}\right\rangle_{\mathfrak{g}}\bar{S}^1_{\sigma',L}$$

$$=\sum_{\sigma\subset\Delta^D}(-1)^{|\sigma|+1}\left\langle\frac{\partial}{\partial\omega^\sigma},\frac{\partial}{\partial p_\sigma}\right\rangle_{\mathfrak{g}}\bar{S}_{\sigma,(*)}+\sum_{\sigma\subset\Delta^D}(-1)^{|\sigma|+1}\left\langle\frac{\partial}{\partial\omega^\sigma},\frac{\partial}{\partial p_\sigma}\right\rangle_{\mathfrak{g}}\bar{S}_{\sigma,(**)}+$$

$$+\sum_{\sigma\subset\Delta^D}(-1)^{|\sigma|+1}\left\langle\frac{\partial}{\partial\omega^\sigma},\frac{\partial}{\partial p_\sigma}\right\rangle_{\mathfrak{g}}\bar{S}_{\sigma,(*(**))}-\sum_{\sigma\subset\sigma'\subset\Delta^D}\bar{S}^0_{\sigma,(*)}\left\langle\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p_\sigma},\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\omega^\sigma}\right\rangle_{\mathfrak{g}}\bar{S}^1_{\sigma',(*(*\bullet))}+O(\omega^3)$$

Подставим сюда выражения (284–287).

$$0=\Delta S^0_{\Delta^D}+\{S^0_{\Delta^D},S^1_{\Delta^D}\}$$

$$=\sum_{\sigma\subset\Delta^D}(-1)^{|\sigma|+1}\eta_{\sigma,(*)}(\sigma)\mathrm{tr}_g 1+\sum_{\sigma_1\subset\sigma\subset\Delta^D,\,|\sigma|+|\sigma_1|=|\sigma|}(-1)^{|\sigma|+|\sigma_1|}\eta_{\sigma,(**)}(\sigma,\sigma_1)\frac{|\sigma_1|!\ |\sigma|!}{(|\sigma_1|+|\sigma|+1)!}\mathrm{tr}_g\mathrm{ad}_{\omega^{\sigma_1}}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\sigma_2,\sigma_3\subset\sigma\subset\Delta^D,\,|\sigma|+|\sigma_2|+|\sigma_3|=|\sigma|+1}(-1)^{(|\sigma|+1)(|\sigma_2|+|\sigma_3|)+(|\sigma_2|+1)|\sigma_3|+1}\eta_{\sigma,(*(**))}(\sigma,\sigma_2,\sigma_3)\cdot$$

$$\cdot \frac{|\sigma|!\,|\sigma_2|!\,|\sigma_3|!}{(|\sigma_2|+|\sigma_3|+1)\cdot(|\sigma|+|\sigma_2|+|\sigma_3|+1)!}\mathrm{tr}_g \mathrm{ad}_{[\omega^{\sigma_2},\omega^{\sigma_3}]}+$$

$$+\sum_{\sigma_1,\sigma_2\subset\sigma\subset\Delta^D,\,|\sigma_1|+|\sigma_2|+|\sigma|=|\sigma|+1}(-1)^{|\sigma_1||\sigma_2|+|\sigma|}\eta_{\sigma,(*(**))}(\sigma_1,\sigma_2,\sigma)\cdot$$

$$\cdot\frac{|\sigma_1|!\,|\sigma_2|!\,|\sigma|!}{(|\sigma_2|+|\sigma|+1)\cdot(|\sigma_1|+|\sigma_2|+|\sigma|+1)!}\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}_{\omega^{\sigma_1}}\mathrm{ad}_{\omega^{\sigma_2}})+$$

$$+\sum_{[ij]\subset\sigma\subset\Delta^D}\mathcal{A}_{|\sigma|}\mathrm{tr}_g(\mathrm{ad}_{\omega^j-\omega^i}\mathrm{ad}_{\omega^{ij}})+\sum_{[ijk]\subset\sigma\subset\Delta^D}\mathcal{B}_{|\sigma|}\mathrm{tr}_g(\mathrm{ad}_{(\omega^k-\omega^j)-(\omega^k-\omega^i)+(\omega^j-\omega^i)}\mathrm{ad}_{\omega^{jk}-\omega^{ik}+\omega^{ij}})+O(\omega^3) \tag{306}$$

Заметим, что первое слагаемое есть ноль, поскольку $\eta_{\sigma,(*)}(\sigma)=0$, второе и третье — в силу унимодулярности $\mathfrak{g}$, и последнее слагаемое обращается в ноль, поскольку $(\omega^k-\omega^j)-(\omega^k-\omega^i)+(\omega^j-\omega^i)=0$. Нетривиальны лишь четвёртое и пятое слагаемые, причём в четвёртое вклады дают только комбинации симплексов вида $\sigma_1=[ij],\sigma_2=[i]\subset\sigma\subset\Delta^D$ или $\sigma_1=[ij],\sigma_2=[j]\subset\Delta^D$, в противном случае $\eta_{\sigma,(*(**))}(\sigma_1,\sigma_2,\sigma)=0$. Причём, как следует из (289), знак для комбинации первого типа есть $\eta_{\sigma,(*(**))}([ij],[i],\sigma)=-1$, а для комбинации второго типа $\eta_{\sigma,(*(**))}([ij],[j],\sigma)=+1$, и комбинаторный коэффициент есть

$$\frac{|\sigma_1|!\,|\sigma_2|!\,|\sigma|!}{(|\sigma_2|+|\sigma|+1)\cdot(|\sigma_1|+|\sigma_2|+|\sigma|+1)!}=\frac{1}{(|\sigma|+1)^2(|\sigma|+2)}$$

Поэтому, продолжая вычисление (306), получаем

$$0=\Delta S^0_{\Delta^D}+\{S^0_{\Delta^D},S^1_{\Delta^D}\}$$
$$=\sum_{[ij]\subset\sigma\subset\Delta^D}\left(\frac{(-1)^{|\sigma|}}{(|\sigma|+1)^2(|\sigma|+2)}+\mathcal{A}_{|\sigma|}\right)\mathrm{tr}_g(\mathrm{ad}_{\omega^j-\omega^i}\mathrm{ad}_{\omega^{ij}})+O(\omega^3)$$

Поскольку правая часть должна быть нулевой функцией на $\mathcal{F}_{\Delta^D}$, мы получаем отсюда формулу (290) для $\mathcal{A}_D$.

□

Отметим, что статус древесных результатов (284,285,286) и однопетлевого результата (287,290) разный: древесные ответы получены прямым вычислением кратных интегралов для де рамовских частей соответствующих фейнмановких диаграмм, в то время как однопетлевой результат получен из комбинации симметрийного аргумента, приводящего к анзатцу (287) для $\bar{S}_{\Delta^D,(*(*\bullet))}$ и косвенного вычисления $\mathcal{A}_D$ из мастер-уравнения и уже известного древесного результата. Т.е., при выводе однопетлевого результата, мы не занимались явным вычислением супер-следа по пространству $\Omega^\bullet_0(\Delta^D)$. Также следует отметить, что если в размерности $D=1$ однопетлевая часть укороченного действия на отрезке точно восстанавливается и древесной части (см. раздел 5.5.1), то в старшей размерности восстанавливается только часть однопетлевого ответа: мы смогли найти $\mathcal{A}_D$, но не $\mathcal{B}_D$. При этом явное значение $\mathcal{B}_D$ в некотором смысле менее важно, чем значение

$\mathcal{A}_D$ поскольку при (специальном) каноническом преобразовании

$$S_{\Delta^D} \mapsto S_{\Delta^D} + \{S_{\Delta^D}, R\} + \hbar\Delta R$$

с генератором

$$R = \mathrm{const} \cdot \hbar \sum_{0\leq i<j<k\leq D} \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}_{\omega^{jk}-\omega^{ik}+\omega^{ij}} \mathrm{ad}_{\omega^{ijk}})$$

коэффициент при структуре

$$\hbar \sum_{0\leq i<j<k\leq D} \mathrm{tr}_g(\mathrm{ad}_{\omega^{jk}-\omega^{ik}+\omega^{ij}})^2$$

в S_{Δ^D} сдвигается на константу. Поэтому, если мы интересуемся симплициальным действием по модулю эквивалентности (канонических преобразований), то значения коэффициентов $\mathcal{B}_D$ не важны.

Для полного симлициального действия на Δ^D результат Теоремы 9 означает следующее:

$$\begin{aligned}
S_{\Delta^D} = &\sum_{\sigma_1\subset\sigma\subset\Delta^D,\, |\sigma_1|=|\sigma|-1} \eta_{\sigma,(*)}(\sigma_1) < p_\sigma, \omega^{\sigma_1} >_{\mathfrak{g}} + \\
+\frac{1}{2} &\sum_{\sigma_1,\sigma_2\subset\sigma\subset\Delta^D,\, |\sigma_1|+|\sigma_2|=|\sigma|} (-1)^{(|\sigma_1|+1)|\sigma_2|} \eta_{\sigma,(**)}(\sigma_1,\sigma_2) \frac{|\sigma_1|!\,|\sigma_2|!}{(|\sigma_1|+|\sigma_2|+1)!} < p_\sigma, [\omega^{\sigma_1}, \omega^{\sigma_2}] >_{\mathfrak{g}} + \\
+\frac{1}{2} &\sum_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\subset\sigma\subset\Delta^D,\, |\sigma_1|+|\sigma_2|+|\sigma_3|=|\sigma|+1} (-1)^{(|\sigma_1|+1)(|\sigma_2|+|\sigma_3|+1)+(|\sigma_2|+1)|\sigma_3|} \eta_{\sigma,(*(**))}(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)\cdot \\
&\cdot \frac{|\sigma_1|!\,|\sigma_2|!\,|\sigma_3|!}{(|\sigma_2|+|\sigma_3|+1)\cdot(|\sigma_1|+|\sigma_2|+|\sigma_3|+1)!} < p_\sigma, [\omega^{\sigma_1}, [\omega^{\sigma_2}, \omega^{\sigma_3}]] >_{\mathfrak{g}} + \\
&+\hbar\frac{1}{2}\left(\hat{\mathcal{A}}_D \sum_{0\leq i<j\leq D} \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}_{\omega^{ij}})^2 + \hat{\mathcal{B}}_D \sum_{0\leq i<j<k\leq D} \mathrm{tr}_g(\mathrm{ad}_{\omega^{jk}-\omega^{ik}+\omega^{ij}})^2\right) + O(p\omega^4 + \hbar\omega^3)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\hat{A}_D &= \sum_{[01]\subset\sigma\subset\Delta^D} \mathcal{A}_{|\sigma|} = \sum_{n=1}^{D} C_{D-1}^{n-1}\mathcal{A}_n \\
\hat{B}_D &= \sum_{[012]\subset\sigma\subset\Delta^D} \mathcal{B}_{|\sigma|} = \sum_{n=2}^{D} C_{D-2}^{n-2}\mathcal{B}_n
\end{aligned}$$

и для $\hat{\mathcal{A}}_D$ из (290) известно явное выражение

$$\hat{A}_D = \sum_{n=1}^{D} C_{D-1}^{n-1} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2(n+2)}$$

Другая эквивалентная формулировка Теоремы 9 — в терминах первых операций qL_∞-структуры на $C^\bullet(\Delta^D, \mathfrak{g}) = \bigoplus_{\sigma\subset\Delta^D} \mathfrak{g}e_\sigma$, индуцированной из алгебры де Рама на симплексе $\Omega^\bullet(\Delta^D, \mathfrak{g})$. В терминах супер-поля $\omega = \sum_{\sigma\subset\Delta^D} e_\sigma\omega^\sigma$ операции $l_{(1)}$, $l_{(2)}$, $l_{(3)}$, $q_{(2)}$ имеют вид

$$l_{(1)}(\omega) = \sum_{\sigma_1\subset\sigma\subset\Delta^D,\, |\sigma_1|=|\sigma|-1} \eta_{\sigma,(*)}(\sigma_1) e_\sigma \omega^{\sigma_1}$$

$$
\begin{aligned}
l_{(2)}(\omega,\omega) &= \sum_{\sigma_1,\sigma_2\subset\sigma\subset\Delta^D,\,|\sigma_1|+|\sigma_2|=|\sigma|} (-1)^{(|\sigma_1|+1)|\sigma_2|}\eta_{\sigma,(**)}(\sigma_1,\sigma_2)\frac{|\sigma_1|!\,|\sigma_2|!}{(|\sigma_1|+|\sigma_2|+1)!}\, e_\sigma[\omega^{\sigma_1},\omega^{\sigma_2}] \\
l_{(3)}(\omega,\omega,\omega) &= 3\sum_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\subset\sigma\subset\Delta^D,\,|\sigma_1|+|\sigma_2|+|\sigma_3|=|\sigma|+1} (-1)^{(|\sigma_1|+1)(|\sigma_2|+|\sigma_3|+1)+(|\sigma_2|+1)|\sigma_3|}\eta_{\sigma,(*(**))}(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)\,\cdot \\
&\cdot\frac{|\sigma_1|!\,|\sigma_2|!\,|\sigma_3|!}{(|\sigma_2|+|\sigma_3|+1)\cdot(|\sigma_1|+|\sigma_2|+|\sigma_3|+1)!}\, e_\sigma[\omega^{\sigma_1},[\omega^{\sigma_2},\omega^{\sigma_3}]] \\
q_{(2)}(\omega,\omega) &= \hat{\mathcal{A}}_D\sum_{0\le i<j\le D}\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}_{\omega^{ij}})^2+\hat{\mathcal{B}}_D\sum_{0\le i<j<k\le D}\mathrm{tr}_g(\mathrm{ad}_{\omega^{jk}-\omega^{ik}+\omega^{ij}})^2
\end{aligned}
$$

Иначе, можно сказать, что полилинейные супер-антисимметричные операции $l_{(1,2,3)}$: $C^\bullet(\Delta^D,\mathfrak{g})^{\otimes 1,2,3}\to C^\bullet(\Delta^D,\mathfrak{g})$ и $q_{(2)}:C^\bullet(\Delta^D,\mathfrak{g})^{\otimes 2}\to\mathbb{R}$ действуют на $\mathfrak{g}$-значные коцепи $\alpha=\sum_{\sigma\subset\Delta^D}e_\sigma\alpha^\sigma$ на симплексе Δ^D как

$$
\begin{aligned}
l_{(1)}(\alpha_1) &= \sum_{\sigma_1\subset\sigma\subset\Delta^D,\,|\sigma_1|=|\sigma|-1}\eta_{\sigma,(*)}(\sigma_1)e_\sigma\alpha_1^{\sigma_1} \\
l_{(2)}(\alpha_1,\alpha_2) &= \sum_{\sigma_1,\sigma_2\subset\sigma\subset\Delta^D,\,|\sigma_1|+|\sigma_2|=|\sigma|}\eta_{\sigma,(**)}(\sigma_1,\sigma_2)\frac{|\sigma_1|!\,|\sigma_2|!}{(|\sigma_1|+|\sigma_2|+1)!}\, e_\sigma[\alpha_1^{\sigma_1},\alpha_2^{\sigma_2}] \\
l_{(3)}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) &= \sum_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\subset\sigma\subset\Delta^D,\,|\sigma_1|+|\sigma_2|+|\sigma_3|=|\sigma|+1}\frac{|\sigma_1|!\,|\sigma_2|!\,|\sigma_3|!}{(|\sigma_1|+|\sigma_2|+|\sigma_3|+1)!}\,\cdot \\
&\cdot e_\sigma\Bigg((-1)^{|\sigma_1|+1}\eta_{\sigma,(*(**))}(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)\ \frac{1}{|\sigma_2|+|\sigma_3|+1}\ [\alpha_1^{\sigma_1},[\alpha_2^{\sigma_2},\alpha_3^{\sigma_3}]]+ \\
&+(-1)^{|\sigma_1|(|\sigma_2|+|\sigma_3|)+|\sigma_2|+1}\eta_{\sigma,(*(**))}(\sigma_2,\sigma_3,\sigma_1)\ \frac{1}{|\sigma_3|+|\sigma_1|+1}\ [\alpha_2^{\sigma_2},[\alpha_3^{\sigma_3},\alpha_1^{\sigma_1}]]+ \\
&+(-1)^{|\sigma_3|(|\sigma_1|+|\sigma_2|)+|\sigma_3|+1}\eta_{\sigma,(*(**))}(\sigma_3,\sigma_1,\sigma_2)\ \frac{1}{|\sigma_1|+|\sigma_2|+1}\ [\alpha_3^{\sigma_3},[\alpha_1^{\sigma_1},\alpha_2^{\sigma_2}]]\Bigg) \\
q_{(2)}(\alpha_1,\alpha_2) &= \hat{\mathcal{A}}_D\sum_{0\le i<j\le D}\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}_{\alpha_1^{ij}}\mathrm{ad}_{\alpha_2^{ij}})+\hat{\mathcal{B}}_D\sum_{0\le i<j<k\le D}\mathrm{tr}_g(\mathrm{ad}_{\alpha_1^{jk}-\alpha_1^{ik}+\alpha_1^{ij}})(\mathrm{ad}_{\alpha_2^{jk}-\alpha_2^{ik}+\alpha_2^{ij}})
\end{aligned}
$$

Эквивалентно, в терминах базиса $(T_a e_\sigma)$ на $\mathfrak{g}\otimes C^\bullet(\Delta^D)$ структурные константы операций имеют вид

$$
\begin{aligned}
l^{\sigma a}_{(1)\sigma_1 a_1} &= \eta_{\sigma,(*)}(\sigma_1)\delta^a_{a_1} \\
l^{\sigma a}_{(2)\sigma_1 a_1,\,\sigma_2 a_2} &= \eta_{\sigma,(**)}(\sigma_1,\sigma_2)\frac{|\sigma_1|!\,|\sigma_2|!}{(|\sigma_1|+|\sigma_2|+1)!}\ f^a_{a_1a_2} \\
l^{\sigma a}_{(3)\sigma_1 a_1,\,\sigma_2 a_2,\,\sigma_3 a_3} &= \frac{|\sigma_1|!\,|\sigma_2|!\,|\sigma_3|!}{(|\sigma_1|+|\sigma_2|+|\sigma_3|+1)!}\,\cdot \\
&\cdot\sum_b\Bigg((-1)^{|\sigma_1|+1}\eta_{\sigma,(*(**))}(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)\ \frac{1}{|\sigma_2|+|\sigma_3|+1}\ f^a_{a_1b}f^b_{a_2,a_3}+ \\
&+(-1)^{|\sigma_1|(|\sigma_2|+|\sigma_3|)+|\sigma_2|+1}\eta_{\sigma,(*(**))}(\sigma_2,\sigma_3,\sigma_1)\ \frac{1}{|\sigma_3|+|\sigma_1|+1}\ f^a_{a_2b}f^b_{a_3a_1}+ \\
&+(-1)^{|\sigma_3|(|\sigma_1|+|\sigma_2|)+|\sigma_3|+1}\eta_{\sigma,(*(**))}(\sigma_3,\sigma_1,\sigma_2)\ \frac{1}{|\sigma_1|+|\sigma_2|+1}\ f^a_{a_3b}f^b_{a_1a_2}\Bigg)
\end{aligned}
$$

$$q_{(2)\sigma_1 a_1,\sigma_2 a_2} = \begin{cases} (\hat{A}_D+(D-1)\hat{B}_D)\sum_{b,c} f^b_{a_1c}f^c_{a_2b}, & \text{если } \sigma_1=\sigma_2=[ij] \\ \hat{B}_D\sum_{b,c} f^b_{a_1c}f^c_{a_2b}, & \text{если } \sigma_1=[ij],\sigma_2=[jk] \text{ или } \sigma_1=[jk],\sigma_2=[ij] \\ -\hat{B}_D\sum_{b,c} f^b_{a_1c}f^c_{a_2b}, & \text{если } \sigma_1=[ik],\sigma_2=[jk] \text{ или } \sigma_1=[ij],\sigma_2=[ik] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

где f^a_{bc} — структурные константы $\mathfrak{g}$.

5.6.1. *Явное вычисление супер-следа $C_{\Delta^2,(*(*\bullet))}$ на 2-симплексе в координатном представлении.* К задаче явного вычисления супер-следа

$$C_{\Delta^D,(*(*\bullet))} = \mathrm{Str}_{\Omega_0^\bullet(\Delta^D)} K_{\Delta^D}(\chi_{\sigma_1}\wedge K_{\Delta^D}(\chi_{\sigma_2}\wedge\bullet)) \tag{307}$$

на D-симплексе можно подойти следующим образом. Введём базис

$$|t_1^0,\ldots,t_D^0;i_1,\ldots,i_n>= dt_{i_1}\cdots dt_{i_n}\delta(t_1-t_1^0)\cdots\delta(t_D-t_D^0)$$

на пространстве $\Omega_0^\bullet(\Delta^D)$, пронумерованный точками внутри симплекса $t_1,\ldots,t_D>0$, $t_1+\cdots+t_D<1$ и наборами целых чисел $1\le i_1<\cdots<i_n\le D$, где $0\le n\le D$ (в частности, пустым набором для $n=0$). Двойственный базис можно записать как

$$<t_1^0,\ldots,t_D^0;i_1,\ldots,i_n| = (-1)^{n(D-n)}*(dt_{i_1}\cdots dt_{i_n})\,\delta(t_1-t_1^0)\cdots\delta(t_D-t_D^0)$$

где

$$*(dt_{i_1}\cdots dt_{i_n}) = (-1)^{(i_1\cdots i_n 1\cdots\hat{i_1}\cdots\hat{i_n}\cdots D)}dt_1\cdots\widehat{dt_{i_1}}\cdots\widehat{dt_{i_n}}\cdots dt_D$$

— стандартная звёздочка Ходжа. Тогда выполнено соотношение ортогональности

$$\begin{aligned} &<t_1^0,\ldots,t_D^0;i_1,\ldots,i_n|\tilde{t}_1^0,\ldots,\tilde{t}_D^0;\tilde{i}_1,\ldots,\tilde{i}_n> \\ &=\int_{\Delta^D}(-1)^{n(D-n)}*(dt_{i_1}\cdots dt_{i_n})\,\delta(t_1-t_1^0)\cdots\delta(t_D-t_D^0)dt_{\tilde{i}_1}\cdots dt_{\tilde{i}_n}\delta(t_1-\tilde{t}_1^0)\cdots\delta(t_D-\tilde{t}_D^0) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad= \delta_{i_1\tilde{i}_1}\cdots\delta_{i_n\tilde{i}_n}\delta(t_1^0-\tilde{t}_1^0)\cdots\delta(t_D^0-\tilde{t}_D^0) \end{aligned}$$

и соотношение полноты

$$\sum_{n=0}^D(-1)^{nD}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_n\le D}\int_{\Delta^D}dt_1^0\cdots dt_D^0\;|t_1^0,\ldots,t_D^0;i_1,\ldots,i_n><t_1^0,\ldots,t_D^0;i_1,\ldots,i_n| = \mathrm{id}_{\Omega_0^\bullet(\Delta^D)}$$

Запишем супер-след (307) как

$$\begin{aligned} &C_{\Delta^D,(*(*\bullet))}(\sigma_1,\sigma_2) \\ &\quad=\sum_{n=0}^{D-1}(-1)^n\sum_{1\le i_1<\cdots<i_n\le D}\sum_{a,b=0}^{D-1}(-1)^{a+b}\sum_{0\le j_0<\cdots<j_a\le D,\;0\le k_0<\cdots<k_b\le D}\int_{\Delta^D}dt_1^0\cdots dt_D^0\cdot \\ &\quad\cdot<t_1^0,\ldots,t_D^0;i_1,\ldots,i_n|\chi_{j_0\cdots j_a}h^{j_a}\cdots h^{j_0}\chi_{\sigma_1}\chi_{k_0\cdots k_b}h^{k_b}\cdots h^{k_0}\chi_{\sigma_2}|t_1^0,\ldots,t_D^0;i_1,\ldots,i_n> \\ &\qquad\qquad=\sum_{n=0}^{D-1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_n\le D}\sum_{\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2\subset\Delta^D}(-1)^{(|\bar{\sigma}_1|+|\bar{\sigma}_2|+1)n+|\bar{\sigma}_1||\bar{\sigma}_2|+1}. \end{aligned}$$

$$\cdot \pi_* \int_{\Delta^D} dt_1^0 \cdots dt_D^0 < t_1^0, \ldots, t_D^0; i_1, \ldots, i_n | \chi_{\bar\sigma_1} \phi^*_{\bar\sigma_1} \chi_{\sigma_1} \chi_{\bar\sigma_2} \phi^*_{\bar\sigma_2} \chi_{\sigma_2} | t_1^0, \ldots, t_D^0; i_1, \ldots, i_n > \quad (308)$$

где мы ввели обозначения $\phi^*_{\bar\sigma_1} = \phi^*_{j_a} \cdots \phi^*_{j_0}$, $\bar\sigma_1 = [j_0 \cdots j_a]$, $\phi^*_{\bar\sigma_2} = \phi^*_{k_b} \cdots \phi^*_{k_0}$, $\bar\sigma_2 = [k_0 \cdots k_b]$, и π_* есть интеграл по вспомогательным переменным (параметрам гомотетий) $u_0, \ldots, u_a, v_0, \ldots, v_b$. Таким образом, предлагается сначала вычислять след по пространству дифференциальных форм на симплексе с фиксированными параметрами гомотетий, а потом результат проинтеграровать по параметрам гомотетий. В этом состоит способ избежать непосредственной работы с сильно сингулярным ядром оператора Дюпона в координатном представлении.

Введём обозначение $\nu(\sigma_1, \sigma_2; \bar\sigma_1, \bar\sigma_2)$ для слагаемых в (308):

$$\nu(\sigma_1, \sigma_2; \bar\sigma_1, \bar\sigma_2) = \sum_{n=0}^{D-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_n \le D} (-1)^{(|\bar\sigma_1| + |\bar\sigma_2| + 1)n + |\bar\sigma_1||\bar\sigma_2| + 1} \cdot$$

$$\cdot \pi_* \int_{\Delta^D} dt_1^0 \cdots dt_D^0 < t_1^0, \ldots, t_D^0; i_1, \ldots, i_n | \chi_{\bar\sigma_1} \phi^*_{\bar\sigma_1} \chi_{\sigma_1} \chi_{\bar\sigma_2} \phi^*_{\bar\sigma_2} \chi_{\sigma_2} | t_1^0, \ldots, t_D^0; i_1, \ldots, i_n >$$

и таким образом

$$C_{\Delta^D, (*(*\bullet))}(\sigma_1, \sigma_2) = \sum_{\bar\sigma_1, \bar\sigma_2 \subset \Delta^D} \nu(\sigma_1, \sigma_2; \bar\sigma_1, \bar\sigma_2) \quad (309)$$

Есть набор аргументов, позволяющих а приори утверждать, что некоторые из слагаемых в (309) совпадают между собой, и некоторые равны нулю:

(1) "внешняя" симметрия Δ^D:

$$\nu(\pi\sigma_1, \pi\sigma_2; \pi\bar\sigma_1, \pi\bar\sigma_2) = \nu(\sigma_1, \sigma_2; \bar\sigma_1, \bar\sigma_2)$$

где π — перестановка вершин Δ^D

(2) "внутренняя" симметрия $\sigma_1, \sigma_2, \bar\sigma_1, \bar\sigma_2$:

$$\nu(\pi_1\sigma_1, \pi_2\sigma_2; \bar\pi_1\bar\sigma_1, \bar\pi_2\bar\sigma_2) = (-1)^{\pi_1}(-1)^{\pi_2}\nu(\sigma_1, \sigma_2; \bar\sigma_1, \bar\sigma_2)$$

где $\pi_1, \pi_2, \bar\pi_1, \bar\pi_2$ — перестановки вершин соответствующих симплексов

(3) циклическая симметрия следа:

$$\nu(\sigma_2, \sigma_1; \bar\sigma_2, \bar\sigma_1) = \nu(\sigma_1, \sigma_2; \bar\sigma_1, \bar\sigma_2)$$

(4) если $\sigma_1 \subset \bar\sigma_2$ или $\sigma_2 \subset \bar\sigma_1$ то

$$\nu(\sigma_1, \sigma_2; \bar\sigma_1, \bar\sigma_2) = 0$$

поскольку произведение одной из пар форм Уитни есть ноль

(5) если $\bar\sigma_1 \cup \bar\sigma_2 \neq \Delta^D$ (напомним, обозначение $\cup$ используется для теоретико-множественной операции на множествах вершин), то

$$\nu(\sigma_1, \sigma_2; \bar\sigma_1, \bar\sigma_2) = 0 \quad (310)$$

поскольку в этом случае точку $(t_1^0, \cdots, t_D^0)$ не перевести в саму себя последовательностью гомотетий $\phi^*_{\tilde{\sigma}_1}\phi^*_{\tilde{\sigma}_2}$ (если параметры гомотетий не равны все одновременно единице).

Заметим, что последнее свойство является в некотором смысле регуляризацией: в саму себя точка $(t_1^0, \cdots, t_D^0)$ последовательностью гомотетий не переводится, однако переводится в сколь угодно близкие в некотором секторе направлений.

Ограничимся теперь размерностью $D = 2$. Для того, чтобы получить значения констант $\tilde{\mathcal{A}}_D$ и $\tilde{\mathcal{B}}_D$ из (304), достаточно вычислить $C_{\Delta^2,(*(*\bullet))}(\sigma_1, \sigma_2)$ для двух случаев: $\sigma_1 = \sigma_2 = [12]$ и $\sigma_1 = [01], \sigma_2 = [12]$. Как следует из свойств (1–5), для первого случая есть только два независимых ненулевых вклада:

$$C_{\Delta^2,(*(*\bullet))}([12],[12]) = 4\nu([12],[12];[01],[2]) + 2\nu([12],[12];[02],[01]) \tag{311}$$

и для второго случая — четыре вклада:

$$C_{\Delta^2,(*(*\bullet))}([01],[12]) = 2\nu([01],[12];[01],[2]) + 2\nu([01],[12];[02],[1]) + \\ + 2\nu([01],[12];[01],[02]) + \nu([01],[12];[01],[12]) \tag{312}$$

Продемонстрируем детально вычисление $\nu([12],[12];[01],[2])$:

$$\nu([12],[12];[01],[2]) = -\sum_{i=1}^{2} \pi_* \int_{\Delta^2} dt_1^0 dt_2^0 < t_1^0, t_2^0; i|\chi_{01}\phi_1^*\phi_0^*\chi_{12}\chi_2\phi_2^*\chi_{12}|t_1^0, t_2^0; i > \tag{313}$$

(мы используем очевидное наблюдение, что вклад дают только диагональные матричные элементы для базисных 1-форм). Далее,

$$\begin{aligned}
|t_1^0, t_2^0; 1 >= dt_1\delta(t_1 - t_1^0)\delta(t_2 - t_2^0) &\xrightarrow{\chi_{12}\wedge} -t_1 dt_1 dt_2 \delta(t_1 - t_1^0)\delta(t_2 - t_2^0) \\
&\xrightarrow{\phi_2^*} -v_1^2 t_1 dv_1(t_1 dt_2 - (t_2 - 1)dt_1)\delta(v_1 t_1 - t_1^0)\delta(v_1 t_2 - v_1 + 1 - t_2^0) \\
&\xrightarrow{\chi_2\wedge} -v_1^2 t_1 t_2 dv_1(t_1 dt_2 - (t_2 - 1)dt_1)\delta(v_1 t_1 - t_1^0)\delta(v_1 t_2 - v_1 + 1 - t_2^0) \\
&\xrightarrow{\chi_{12}\wedge} -v_1^2 t_1^2 t_2 dv_1 dt_1 dt_2 \delta(v_1 t_1 - t_1^0)\delta(v_1 t_2 - v_1 + 1 - t_2^0) \\
&\xrightarrow{\phi_0^*} -v_1^2 u_2^4 t_1^2 t_2 dv_1 du_2(t_1 dt_2 - t_2 dt_1)\delta(v_1 u_2 t_1 - t_1^0)\delta(v_1 u_2 t_2 - v_1 + 1 - t_2^0) \\
&\xrightarrow{\phi_1^*} -v_1^2 u_2^4 u_1(u_1 t_1 - u_1 + 1)^2 t_2^2 dv_1 du_2 du_1 \delta(v_1 u_2(u_1 t_1 - u_1 + 1) - t_1^0)\delta(v_1 u_2 u_1 t_2 - v_1 + 1 - t_2^0) \\
&\xrightarrow{\chi_{01}\wedge} -v_1^2 u_2^4 u_1(u_1 t_1 - u_1 + 1)^2 t_2^2((1 - t_2)dt_1 + t_1 dt_2)dv_1 du_2 du_1 \cdot \\
&\qquad \cdot \delta(v_1 u_2(u_1 t_1 - u_1 + 1) - t_1^0)\delta(v_1 u_2 u_1 t_2 - v_1 + 1 - t_2^0)
\end{aligned}$$

Мы выписываем только слагаемые, являющиеся формами старшей степени по вспомогательным переменным u_1, u_2, v_1. Поэтому матричный элемент под интегралом по симплексу в (313) при $i = 1$ есть

$$< t_1^0,t_2^0;1|\chi_{01}\phi_1^*\phi_0^*\chi_{12}\chi_2\phi_2^*\chi_{12}|t_1^0,t_2^0;1>$$
$$= -v_1^2u_2^4u_1(u_1t_1^0-u_1+1)^2(t_2^0)^2(1-t_2^0)dv_1du_2du_1\ \delta(v_1u_2(u_1t_1^0-u_1+1)-t_1^0)\ \delta(v_1u_2u_1t_2^0-v_1+1-t_2^0) \tag{314}$$

Интеграл по Δ^2 берётся за счёт дельта-функций и остаётся нетривиальный интеграл по параметрам гомотетий u_1,u_2,v_1:

$$\pi_*\int_{\Delta^2}dt_1^0dt_2^0 < t_1^0,t_2^0;1|\chi_{01}\phi_1^*\phi_0^*\chi_{12}\chi_2\phi_2^*\chi_{12}|t_1^0,t_2^0;1>$$
$$= \int_0^1du_1\int_0^1du_2\int_0^1dv_1\frac{1}{(1-u_1u_2v_1)^2}\left(-\frac{u_1u_2^4v_1^3(1-u_1)^2(1-u_1u_2)(1-v_1)^2}{(1-u_1u_2v_1)^5}\right) = -\frac{1}{360}$$

множитель $\frac{1}{(1-u_1u_2v_1)^2}$ под интегралом есть якобиан, происходящий из дельта-функций в (314). Для слагаемого $i=2$ в (313) аналогично получаем

$$\chi_{01}\phi_1^*\phi_0^*\chi_{12}\chi_2\phi_2^*\chi_{12}|t_1^0,t_2^0;2>$$
$$= -v_1u_2^3u_1t_2^2(u_1t_1-u_1+1)(v_1u_2u_1t_2-v_1+1)((1-t_2)dt_1+t_1dt_2)dv_1du_2du_1\cdot$$
$$\cdot\,\delta(v_1u_2(u_1t_1-u_1+1)-t_1^0)\ \delta(v_1u_2u_1t_2-v_1+1-t_2^0)$$
$$\Rightarrow < t_1^0,t_2^0;2|\chi_{01}\phi_1^*\phi_0^*\chi_{12}\chi_2\phi_2^*\chi_{12}|t_1^0,t_2^0;2>= -v_1u_2^3u_1t_1^0(t_2^0)^2(u_1t_1^0-u_1+1)(v_1u_2u_1t_2^0-v_1+1)dv_1du_2du_1\cdot$$
$$\cdot\,\delta(v_1u_2(u_1t_1^0-u_1+1)-t_1^0)\ \delta(v_1u_2u_1t_2^0-v_1+1-t_2^0)$$
$$\Rightarrow \pi_*\int_{\Delta^2}dt_1^0dt_2^0 < t_1^0,t_2^0;2|\chi_{01}\phi_1^*\phi_0^*\chi_{12}\chi_2\phi_2^*\chi_{12}|t_1^0,t_2^0;2>$$
$$= \int_0^1du_1\int_0^1du_2\int_0^1dv_1\frac{1}{(1-u_1u_2v_1)^2}\left(-\frac{u_1u_2^4v_1^2(1-u_1)^2(1-v_1)^3}{(1-u_1u_2v_1)^5}\right) = -\frac{1}{360}$$

И таким образом

$$\nu([12],[12];[01],[2])$$
$$= -\sum_{i=1}^2\pi_*\int_{\Delta^2}dt_1^0dt_2^0 < t_1^0,t_2^0;i|\chi_{01}\phi_1^*\phi_0^*\chi_{12}\chi_2\phi_2^*\chi_{12}|t_1^0,t_2^0;i>= -\left(-\frac{1}{360}-\frac{1}{360}\right) = \frac{1}{180}$$

Остальные слагаемые в (311,312) вычисляются точно так же:

$$< t_1^0,t_2^0;1|\chi_{02}\phi_2^*\phi_0^*\chi_{12}\chi_{01}\phi_1^*\phi_0^*\chi_{12}|t_1^0,t_2^0;1>$$
$$= -v_2^2u_2^3u_1(t_1^0)^2t_2^0(v_1u_2u_1t_1^0-v_1+1)(u_1t_2^0-u_1+1)dv_2dv_1du_2du_1\cdot$$
$$\cdot\,\delta(v_2(v_1u_2u_1t_1^0-v_1+1)-t_1^0)\ \delta(v_2u_2u_2(u_1t_2^0-u_1+1)-t_2^0)$$
$$< t_1^0,t_2^0;2|\chi_{02}\phi_2^*\phi_0^*\chi_{12}\chi_{01}\phi_1^*\phi_0^*\chi_{12}|t_1^0,t_2^0;2>$$
$$= -v_2^2v_1u_2^4u_1(t_1^0)^2(1-t_1^0)(u_1t_2^0-u_1+1)^2dv_2dv_1du_2du_1\cdot$$
$$\cdot\,\delta(v_2(v_1u_2u_1t_1^0-v_1+1)-t_1^0)\ \delta(v_2u_2u_2(u_1t_2^0-u_1+1)-t_2^0)$$

$$\Rightarrow \nu([12],[12];[02],[01]) = -\sum_{i=1}^{2} \pi_* \int_{\Delta^2} dt_1^0 dt_2^0 < t_1^0, t_2^0; i|\chi_{02}\phi_2^*\phi_0^*\chi_{12}\chi_{01}\phi_1^*\phi_0^*\chi_{12}|t_1^0, t_2^0; i >$$

$$= -\left(\int_0^1 du_1 \int_0^1 du_2 \int_0^1 dv_1 \int_0^1 dv_2 \frac{1}{(1-u_1u_2v_1v_2)^2}\left(-\frac{u_1(1-u_1)^2u_2^4v_1(1-v_1)^3v_2^5}{(1-u_1u_2v_1v_2)^5}\right)+\right.$$

$$+\int_0^1 du_1 \int_0^1 du_2 \int_0^1 dv_1 \int_0^1 dv_2 \frac{1}{(1-u_1u_2v_1v_2)^2}$$

$$\left.\left(-\frac{u_1(1-u_1)^2u_2^4v_1(1-v_1)^2v_2^4(1-v_2+v_1v_2-u_1u_2v_1v_2)}{(1-u_1u_2v_1v_2)^5}\right)\right)$$

$$= -\left(-\frac{1}{2160}-\frac{1}{2160}\right) = \frac{1}{1080}$$

$$< t_1^0, t_2^0; 1|\chi_{02}\phi_2^*\phi_0^*\chi_{01}\chi_1\phi_1^*\chi_{12}|t_1^0, t_2^0; 1 >$$

$$= u_1u_2^2v_1(t_1^0)^2t_2^0(1-v_1+u_1u_2v_1t_1^0)(1-u_2+u_1u_2t_0^0)dv_1du_2du_1\cdot$$

$$\cdot\,\delta(1-v_1+u_1u_2v_1t_1^0-t_1^0)\;\delta(u_2v_1(1-u_1+u_1t_2^0)-t_2^0)$$

$$< t_1^0, t_2^0; 2|\chi_{02}\phi_2^*\phi_0^*\chi_{01}\chi_1\phi_1^*\chi_{12}|t_1^0, t_2^0; 2 >$$

$$= u_1u_2^3v_1^2(t_1^0)^2(1-t_1^0)(1-u_1+u_1t_2^0)(1-u_2+u_1u_2t_0^0)dv_1du_2du_1\cdot$$

$$\cdot\,\delta(1-v_1+u_1u_2v_1t_1^0-t_1^0)\;\delta(u_2v_1(1-u_1+u_1t_2^0)-t_2^0)$$

$$\Rightarrow \nu([01],[12];[02],[1]) = -\sum_{i=1}^{2} \pi_* \int_{\Delta^2} dt_1^0 dt_2^0 < t_1^0, t_2^0; i|\chi_{02}\phi_2^*\phi_0^*\chi_{01}\chi_1\phi_1^*\chi_{12}|t_1^0, t_2^0; i >$$

$$= -\left(\int_0^1 du_1 \int_0^1 du_2 \int_0^1 dv_1 \frac{1}{(1-u_1u_2v_1)^2}\cdot\frac{u_1(1-u_1)u_2^3(1-u_2)v_1^2(1-v_1)^3}{(1-u_1u_2v_1)^5}+\right.$$

$$\left.+\int_0^1 du_1 \int_0^1 du_2 \int_0^1 dv_1 \frac{1}{(1-u_1u_2v_1)^2}\cdot\frac{u_1(1-u_1)u_2^3(1-u_2)(1-u_1u_2)v_1^3(1-v_1)^2}{(1-u_1u_2v_1)^5}\right)$$

$$= -\left(\frac{1}{720}+\frac{1}{720}\right) = -\frac{1}{360}$$

$$< t_1^0, t_2^0; 1|\chi_{01}\phi_1^*\phi_0^*\chi_{01}\chi_{02}\phi_2^*\phi_0^*\chi_{12}|t_1^0, t_2^0; 1 >$$

$$= u_2^3v_1v_2^2(1-u_1+u_1t_1^0)^2t_2^0(1-t_2^0)(1-u_2+u_1u_2t_0^0)dv_2dv_1du_2du_1\cdot$$

$$\cdot\,\delta(u_2v_1v_2(1-u_1+u_1t_1^0)-t_1^0)\;\delta(v_2(1-v_1+u_1u_2v_1t_2^0)-t_2^0)$$

$$< t_1^0, t_2^0; 2|\chi_{01}\phi_1^*\phi_0^*\chi_{01}\chi_{02}\phi_2^*\phi_0^*\chi_{12}|t_1^0, t_2^0; 2 >$$

$$= u_2^2v_2^2t_1^0t_2^0(1-u_1+u_1t_1^0)(1-v_1+u_1u_2v_1t_2^0)(1-u_2+u_1u_2t_0^0)dv_2dv_1du_2du_1\cdot$$

$$\cdot\,\delta(u_2v_1v_2(1-u_1+u_1t_1^0)-t_1^0)\;\delta(v_2(1-v_1+u_1u_2v_1t_2^0)-t_2^0)$$

$$\Rightarrow \nu([01],[12];[01],[02]) = -\sum_{i=1}^{2} \pi_* \int_{\Delta^2} dt_1^0 dt_2^0 < t_1^0, t_2^0; i|\chi_{01}\phi_1^*\phi_0^*\chi_{01}\chi_{02}\phi_2^*\phi_0^*\chi_{12}|t_1^0, t_2^0; i >$$

$$= -\left(\int_0^1 du_1 \int_0^1 du_2 \int_0^1 dv_1 \int_0^1 dv_2 \frac{1}{(1-u_1u_2v_1v_2)^2}\cdot\right.$$

$$\cdot\frac{(1-u_1)^2u_2^3v_1(1-v_1)v_2^3(1-u_2+u_1u_2-u_1u_2v_2)(1-v_2+v_1v_2-u_1u_2v_1v_2)}{(1-u_1u_2v_1v_2)^5}+$$

$$+\int_0^1 du_1\int_0^1 du_2\int_0^1 dv_1\int_0^1 dv_2\frac{1}{(1-u_1u_2v_1v_2)^2}\cdot\frac{(1-u_1)^2u_2^3v_1(1-v_1)^2v_2^4(1-u_2+u_1u_2-u_1u_2v_2)}{(1-u_1u_2v_1v_2)^5}\Bigg)$$

$$=-\left(\frac{1}{864}+\frac{1}{1440}\right)=-\frac{1}{540}$$

$$< t_1^0,t_2^0;1|\chi_{01}\phi_1^*\phi_0^*\chi_{01}\chi_{12}\phi_2^*\phi_1^*\chi_{12}|t_1^0,t_2^0;1>=$$

$$=-u_2^2v_2(1-u_1+u_1t_1^0)(1-v_2+u_2v_1v_2-u_1u_2v_1v_2+u_1u_2v_1v_2t_1^0)t_2^0(1-t_2^0)(1-u_2+u_1u_2t_0^0)dv_2dv_1du_2du_1\cdot$$

$$\cdot\,\delta(1-v_2+u_2v_1v_2-u_1u_2v_1v_2+u_1u_2v_1v_2t_1^0-t_1^0)\;\delta(v_2(1-v_1+u_1u_2v_1t_2^0)-t_2^0)$$

$$< t_1^0,t_2^0;2|\chi_{01}\phi_1^*\phi_0^*\chi_{01}\chi_{12}\phi_2^*\phi_1^*\chi_{12}|t_1^0,t_2^0;2>=$$

$$=-u_2^2v_2^2t_1^0(1-u_1+u_1t_1^0)t_2^0(1-v_1+u_1u_2v_1t_2^0)(1-u_2+u_1u_2t_0^0)dv_2dv_1du_2du_1\cdot$$

$$\cdot\,\delta(1-v_2+u_2v_1v_2-u_1u_2v_1v_2+u_1u_2v_1v_2t_1^0-t_1^0)\;\delta(v_2(1-v_1+u_1u_2v_1t_2^0)-t_2^0)$$

$$\Rightarrow\nu([01],[12];[01],[12])=-\sum_{i=1}^{2}\pi_*\int_{\Delta^2}dt_1^0dt_2^0< t_1^0,t_2^0;i|\chi_{01}\phi_1^*\phi_0^*\chi_{01}\chi_{12}\phi_2^*\phi_1^*\chi_{12}|t_1^0,t_2^0;i>$$

$$=-\Bigg(\int_0^1 du_1\int_0^1 du_2\int_0^1 dv_1\int_0^1 dv_2\frac{1}{(1-u_1u_2v_1v_2)^2}\cdot$$

$$\cdot\left(-\frac{u_2^2(1-u_2)(1-v_1)v_2^2(1-u_1v_2)(1-v_2+v_1v_2-u_1u_2v_1v_2)(1-v_2+u_2v_1v_2-u_1u_2v_1v_2)}{(1-u_1u_2v_1v_2)^5}\right)+$$

$$+\int_0^1 du_1\int_0^1 du_2\int_0^1 dv_1\int_0^1 dv_2\frac{1}{(1-u_1u_2v_1v_2)^2}\cdot$$

$$\cdot\left(-\frac{u_2^2(1-u_2)(1-v_1)^2v_2^3(1-u_1v_2)(1-v_2+u_2v_1v_2-u_1u_2v_1v_2)}{(1-u_1u_2v_1v_2)^5}\right)\Bigg)$$

$$=-\left(-\frac{1}{288}-\frac{1}{480}\right)=\frac{1}{180}$$

Наконец, матричные элементы $< t_1^0,t_2^0;i|\chi_{01}\phi_1^*\phi_0^*\chi_{01}\chi_2\phi_2^*\chi_{12}|t_1^0,t_2^0;i>=0$ для $i=1,2$ и поэтому

$$\nu([01],[12];[01],[2])=0$$

и мы получаем следующие значения супер-следов (311,312):

$$C_{\Delta^2,(*(*\bullet))}([12],[12])=4\nu([12],[12];[01],[2])+2\nu([12],[12];[02],[01])=4\cdot\frac{1}{180}+2\cdot\frac{1}{1080}=\frac{13}{540}$$

и

$$C_{\Delta^2,(*(*\bullet))}([01],[12])=2\nu([01],[12];[01],[2])+2\nu([01],[12];[02],[1])+$$

$$+2\nu([01],[12];[01],[02])+\nu([01],[12];[01],[12])$$

$$=2\cdot 0+2\cdot\left(-\frac{1}{360}\right)+2\cdot\left(-\frac{1}{540}\right)+\frac{1}{180}=-\frac{1}{270}$$

Сравнивая с (304,305), находим отсюда

$$\mathcal{A}_2=-\frac{1}{36},\;\mathcal{B}_2=\frac{1}{270}\tag{315}$$

Заметим, что найденное нами из явного вычисления супер-следа значение $\mathcal{A}_2$ совпадает с предсказанным с помощью мастер-уравнения значением (290).

Совершенно аналогичное, но более объёмное вычисление супер-следа $C_{\Delta^3,(*(*\bullet))}$ для 3-симплекса в координатном представлении даёт

$$\mathcal{A}_3 = \frac{1}{80},\ \mathcal{B}_3 = -\frac{1}{648}$$

(значение $\mathcal{A}_3$ вновь совпадает с предсказанным формулой (290)).

Предложенная здесь схема вычисления $C_{\Delta^2,(*(*\bullet))}$ является самой простой и удобной из известных нам и быстрее всего приводит к ответу. Ключевыми моментами в ней являются перестановка супер-следа с интегрированием по кубу параметров гомотетий (308) и использование свойства (310), играющего роль регуляризации. Эту регуляризацию можно эквивалентно сформулировать так: параметры гомотетий пробегают интервал $[0, 1-\epsilon]$ и ϵ стремится к нулю. Замечательным свойством такой схемы является то, что в ней нигде на промежуточных этапах вычисления не приходится иметь дело с расходимостями.

Для $C_{\Delta^2,(*(*\bullet))}$ были также проделаны вычисления в двух других схемах. Один способ состоит в вычислении в координатном представлении, но без перестановки супер-следа с интегралом по параметрам гомотетий. В результате задача сводится к вычислению свёрток (очень сингулярных) ядер оператора цепной гомотопии Дюпона. В качестве регуляризации здесь использовалась раздвижка точек: вычисляется не диагональный матричный элемент, а между близкими точками (и предполагается процедура усреднения по направлению раздвижки). При этом на промежуточных этапах вычисления приходится иметь дело с логарифмическими расходимостями. Однако, в конечном ответе расходимости сокращаются, и мы вновь приходим к результату (315). Ещё один, ещё более трудоёмкий способ вычисления — в базисе мономов. В качестве регуляризации используется ограничение тотальной степени монома большим числом $N \to \infty$. На промежуточных этапах также возникают расходимости $\sim \log N$, однако они сокращаются в конце, и результат совпадает с (315).

Используя общий пертурбативный результат Теоремы 9 и значение $\mathcal{B}_2$, полученное из прямого вычисления супер-следа (315), мы можем выписать симплициальное BF-действие на 2-симплексе с точностью до $O(p\omega^4 + \hbar\omega^3)$:

$$S_{\Delta^2} = \bar{S}_0 + \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_{01} + \bar{S}_{12} + \bar{S}_{20} + \bar{S}_{012} =$$

$$=< p_0, \frac{1}{2}[\omega^0, \omega^0] >_g + < p_1, \frac{1}{2}[\omega^1, \omega^1] >_g + < p_2, \frac{1}{2}[\omega^2, \omega^2] >_g +$$

$$+ \left(< p_{01}, (\omega^1 - \omega^0) + \frac{1}{2}[\omega^{01}, \omega^0 + \omega^1] + \frac{1}{12}[\omega^{01}, [\omega^{01}, \omega^1 - \omega^0]] >_\mathfrak{g} + \hbar\frac{1}{24}\mathrm{tr}_g(\mathrm{ad}_{\omega^{01}})^2 \right) +$$

$$+\left(< p_{12},(\omega^2-\omega^1)+\frac{1}{2}[\omega^{12},\omega^1+\omega^2]+\frac{1}{12}[\omega^{12},[\omega^{12},\omega^2-\omega^1]] >_{\mathfrak{g}} +\hbar\frac{1}{24}\mathrm{tr}_g(\mathrm{ad}_{\omega^{12}})^2\right)+$$

$$+\left(< p_{20},(\omega^0-\omega^2)+\frac{1}{2}[\omega^{20},\omega^2+\omega^0]+\frac{1}{12}[\omega^{20},[\omega^{20},\omega^0-\omega^2]] >_{\mathfrak{g}} +\hbar\frac{1}{24}\mathrm{tr}_g(\mathrm{ad}_{\omega^{20}})^2\right)+$$

$$+\Big(< p_{012},(\omega^{01}+\omega^{12}+\omega^{20})+\frac{1}{3}[\omega^{012},\omega^0+\omega^1+\omega^2]+\frac{1}{6}([\omega^{01},\omega^{12}]+[\omega^{12},\omega^{20}]+[\omega^{20},\omega^{01}]+$$

$$+\frac{1}{72}([\omega^{01},[\omega^{01},\omega^{01}+\omega^{12}+\omega^{20}]]+[\omega^{12},[\omega^{12},\omega^{01}+\omega^{12}+\omega^{20}]]+[\omega^{20},[\omega^{20},\omega^{01}+\omega^{12}+\omega^{20}]])+$$

$$+\frac{1}{24}([\omega^{012},[\omega^{01},\omega^1-\omega^0]]+[\omega^{012},[\omega^{12},\omega^2-\omega^1]]+[\omega^{012},[\omega^{20},\omega^0-\omega^2]])+$$

$$+\frac{1}{36}([\omega^{01},[\omega^{012},\omega^1-\omega^0]]+[\omega^{12},[\omega^{012},\omega^2-\omega^1]]+[\omega^{20},[\omega^{012},\omega^0-\omega^2]]) >_{\mathfrak{g}}+$$

$$+\hbar\left(-\frac{1}{72}(\mathrm{tr}_g(\mathrm{ad}_{\omega^{01}})^2+\mathrm{tr}_g(\mathrm{ad}_{\omega^{12}})^2+\mathrm{tr}_g(\mathrm{ad}_{\omega^{20}})^2)+\frac{1}{540}\mathrm{tr}_g(\mathrm{ad}_{\omega^{01}+\omega^{12}+\omega^{20}})^2\right)\Big)+$$

$$+O(p\omega^4+\hbar\omega^3) \quad (316)$$

Мы разделили здесь вклады трёх вершин, трёх рёбер и старшей клетки в S_{Δ^2}.

6. Эффективная BF-теория на кубическом комплексе

Здесь мы рассматриваем некоторую модификацию ситуации раздела 5: индуцирование эффективного действия топологической BF-теории на коцепи клеточного разбиения Ξ многообразия M на кубы (не на симплексы). Данные индуцирования для кубического комплекса строятся из данных индуцирования для отдельных кубов (так же, как в разделе 5 мы склеивали данные индуцирования для триангуляции из данных индуцирования для отдельных симплексов). Для куба же данные индуцирования строятся из стандартных данных для отрезка с помощью конструкции тензорного произведения (раздел 6.1). Далее, в полной аналогии с симплициальной ситуацией мы определяем клеточное действие на Ξ, обладающее свойством клеточной локальности (раздел 6.2). Таким образом, мы снова приходим к задаче вычисления клеточного действия для одного стандартного куба (во всех размерностях). Специфика индуцирования на кубический комплекс состоит в том, что, благодаря устройству цепной гомотопии для куба, построенной с помощью конструкции тензорного произведения, для фейнмановских диаграмм для клеточного действия куба возникает явление факторизации (6.3), технически существенно упрощающее задачу вычисления фейнмановсих диаграмм. Причём здесь мы можем вычислять значения не только древесных, но и однопетлевых диаграмм для куба общей размерности (Теорема 11). Однако, замкнутой формулы для клеточного действия куба размерности ≥ 2 мы не можем предъявить, и располагаем лишь пертурбативными результатами. Далее, оказывется, что некоторые части клеточного действия для куба (ограничения на некоторые подпространства пространства коцепей на кубе) могут быть вычислены точно, из-за чего возникает ряд примеров многообразий со специальными клеточными разбиениями, для которых клеточное действие точно вычислимо (раздел 6.4).

6.1. **Тензорное произведение данных индуцирования.** Пусть (V_1, d_1) и (V_2, d_2) — два коцепных комплекса, $V_1' \hookrightarrow V_1$ и $V_2' \hookrightarrow V_2$ — два подкомплекса, и есть два набора данных индуцирования: (ι_1, r_1, K_1) — данные индуцирования с V_1 на V_1' и (ι_2, r_2, K_2) — с V_2 на V_2'. Тогда для тензорных произведений комплексов $(V_1 \otimes V_2, d_1 \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes d_2)$ и $(V_1' \otimes V_2', d_1 \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes d_2)$ можно определить набор данных индуцирования двумя способами:

$$(\iota_1, r_1, K_1) \otimes_L (\iota_2, r_2, K_2) \quad = \quad (\iota_1 \otimes \iota_2, r_1 \otimes r_2, K_1 \otimes \mathrm{id} + \mathcal{P}_1' \otimes K_2) \tag{317}$$

$$(\iota_1, r_1, K_1) \otimes_R (\iota_2, r_2, K_2) \quad = \quad (\iota_1 \otimes \iota_2, r_1 \otimes r_2, \mathrm{id} \otimes K_2 + K_1 \otimes \mathcal{P}_2') \tag{318}$$

где $\mathcal{P}_1' = \iota_1 r_1$, $\mathcal{P}_2' = \iota_2 r_2$ — проекторы на инфракрасную часть для V_1 и V_2 (нам также понадобятся проекторы на ультрафиолетовую часть $\mathcal{P}_1'' = \mathrm{id} - \mathcal{P}_1'$, $\mathcal{P}_2'' = \mathrm{id} - \mathcal{P}_2'$). Мы называем (317) и (318) левым и правым тензорным произведением данных индуцирования, соответственно. Левое тензорное произведение можно понять как последовательное стягивание сначала V_1, а потом V_2, то есть как композицию данных индуцирования

$$V_1 \otimes V_2 \xrightarrow{(\iota_1, r_1, K_1) \otimes \mathrm{id}} V_1' \otimes V_2 \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes (\iota_2, r_2, K_2)} V_1' \otimes V_2'$$

и композиция есть

$$(\mathrm{id} \otimes (\iota_2, r_2, K_2)) \circ ((\iota_1, r_1, K_1) \otimes \mathrm{id}) = (\iota_1 \otimes \iota_2, r_1 \otimes r_2, K_1 \otimes \mathrm{id} + \iota_1 \circ r_1 \otimes K_2) = (\iota_1, r_1, K_1) \otimes_L (\iota_2, r_2, K_2)$$

Согласно утверждению (7), так определённое тензорное произведение данных индуцирования автоматически удовлетворяет условиям (121–126). Точно так же, правое тензорное произведение интерпретируется, как стягивание сначала V_2, а потом V_1:

$$V_1 \otimes V_2 \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes (\iota_2, r_2, K_2)} V_1 \otimes V_2' \xrightarrow{(\iota_1, r_1, K_1) \otimes \mathrm{id}} V_1' \otimes V_2'$$

и соответствующая композиция:

$$((\iota_1, r_1, K_1) \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes (\iota_2, r_2, K_2)) = (\iota_1 \otimes \iota_2, r_1 \otimes r_2, \mathrm{id} \otimes K_2 + K_1 \otimes \iota_2 \circ r_2) = (\iota_1, r_1, K_1) \otimes_R (\iota_2, r_2, K_2)$$

также автоматически удовлетворяет (121–126).

Для случая $(V_1, d_1) = (V_2, d_2)$, $(V_1', d_1) = (V_2', d_2)$ имеет смысл также определить симметризованное тензорное произведение

$$(\iota, r, K) \otimes_{\mathrm{sym}} (\iota, r, K) = (\iota \otimes \iota, r \otimes r, K \otimes \frac{\mathrm{id} + \mathcal{P}'}{2} + \frac{\mathrm{id} + \mathcal{P}'}{2} \otimes K) = (\iota \otimes \iota, r \otimes r, K \otimes (\mathcal{P}' + \frac{1}{2}\mathcal{P}'') + (\mathcal{P}' + \frac{1}{2}\mathcal{P}'') \otimes K)$$

Поскольку оно является линейной комбинацией (полусуммой) левого и правого тензорного произведения, условия (121–125) выполняются для $(\iota, r, K) \otimes_{\text{sym}} (\iota, r, K)$ автоматически. Условие (126) выполняется вследствие того, что объекты $K, \mathcal{P}', \mathcal{P}''$, из которых построен симметризованный тензорный квадрат цепной гомотопии, попарно коммутируют:

$$\begin{aligned}
(K \otimes_{\text{sym}} K)^2 &= \left(K \otimes (\mathcal{P}' + \frac{1}{2}\mathcal{P}'') + (\mathcal{P}' + \frac{1}{2}\mathcal{P}'') \otimes K\right)\left(K \otimes (\mathcal{P}' + \frac{1}{2}\mathcal{P}'') + (\mathcal{P}' + \frac{1}{2}\mathcal{P}'') \otimes K\right) \\
&= K^2 \otimes (\mathcal{P}' + \frac{1}{2}\mathcal{P}'')^2 + (\mathcal{P}' + \frac{1}{2}\mathcal{P}'')^2 \otimes K^2 + \\
&\quad + K(\mathcal{P}' + \frac{1}{2}\mathcal{P}'') \otimes (\mathcal{P}' + \frac{1}{2}\mathcal{P}'')K - (\mathcal{P}' + \frac{1}{2}\mathcal{P}'')K \otimes K(\mathcal{P}' + \frac{1}{2}\mathcal{P}'') \\
&= 0
\end{aligned}$$

Совершенно аналогично, если есть набор комплексов $\{(V_i, d_i)\}_{i=1}^n$, подкомплексов $\{(V_i', d_i)\}_{i=1}^n$ и наборов данных индуцирования $\{(\iota_i, r_i, K_i)\}_{i=1}^n$, можно определить тензорное произведение данных индуцирования

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \xrightarrow{(\iota_1 \otimes \cdots \otimes \iota_n, r_1 \otimes \cdots \otimes r_n, (K_1 \otimes \cdots \otimes K_n)_\pi)} V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$$

где для произведения гомотопий $(K_1 \otimes \cdots \otimes K_n)_\pi$ есть $n!$ вариантов, в зависимости от порядка $\pi^{-1} \in S_n$ стягивания сомножителей в $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$. Именно, если $\pi : (1 \cdots n) \mapsto (1 \cdots n)$ — перестановка, то

$$\begin{aligned}
(K_1 \otimes \cdots \otimes K_n)_\pi = \sum_{i=1}^n \underbrace{(\mathcal{P}' + \theta(\pi(1) - \pi(i))\mathcal{P}'') \otimes \cdots \otimes (\mathcal{P}' + \theta(\pi(i-1) - \pi(i))\mathcal{P}'')}_{i-1} \otimes K \otimes \\
\otimes \underbrace{(\mathcal{P}' + \theta(\pi(i+1) - \pi(i))\mathcal{P}'') \otimes \cdots \otimes (\mathcal{P}' + \theta(\pi(n) - \pi(i))\mathcal{P}'')}_{n-i} \quad (319)
\end{aligned}$$

где θ означает, как обычно, функцию Хэвисайда. Для нас важен симметричный случай, когда все комплексы (V_i, d_i) одинаковые, подкомплесы (V_i', d_i) и данные $\{(\iota_i, r_i, K_i)\}_{i=1}^n$ также одинаковые. Тогда симметризованное тензорное произведение цепных гомотопий определяется как усреднение по всем $n!$ порядкам стягивания:

$$K^{\otimes_{\text{sym}} n} = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} (K \otimes \cdots \otimes K)_\pi \quad (320)$$

Например, для $n = 3$:

$$\begin{aligned}
K^{\otimes_{\text{sym}} 3} &= K \otimes \mathcal{P}' \otimes \mathcal{P}' + \mathcal{P}' \otimes K \otimes \mathcal{P}' + \mathcal{P}' \otimes \mathcal{P}' \otimes K + \\
&+ \frac{1}{2}(K \otimes \mathcal{P}' \otimes \mathcal{P}'' + K \otimes \mathcal{P}'' \otimes \mathcal{P}' + \mathcal{P}' \otimes K \otimes \mathcal{P}'' + \mathcal{P}'' \otimes K \otimes \mathcal{P}' + \mathcal{P}' \otimes \mathcal{P}'' \otimes K + \mathcal{P}'' \otimes \mathcal{P}' \otimes K) + \\
&+ \frac{1}{3}(K \otimes \mathcal{P}'' \otimes \mathcal{P}'' + \mathcal{P}'' \otimes K \otimes \mathcal{P}'' + \mathcal{P}'' \otimes \mathcal{P}'' \otimes K)
\end{aligned}$$

Из (319,320) и следующего элементарного свойства усреднения по перестановкам:

$$\frac{1}{n!}\sum_{\pi\in S_n}\theta(\pi(1)-\pi(2))\cdots\theta(\pi(1)-\pi(i))=\frac{1}{i}$$

вытекает, что коэффициент в $K^{\otimes_{\mathrm{sym}} n}$ при произведении K, $n-i-1$ штук $\mathcal{P}'$ и i штук $\mathcal{P}''$ есть $\frac{1}{i+1}$. Отсюда вытекает следующее удобное представление для $K^{\otimes_{\mathrm{sym}} n}$:

$$K^{\otimes_{\mathrm{sym}} n}=\frac{\partial}{\partial\psi}\int_0^1 d\lambda(\mathcal{P}'+\lambda\mathcal{P}''+\psi K)\otimes\cdots\otimes(\mathcal{P}'+\lambda\mathcal{P}''+\psi K)$$

где введена пара вспомогательных параметров: $\lambda\in[0,1]$ и нечётная переменная ψ (для того, чтобы выражение в скобках было однородным, ей следует приписать гомологическую степень $\deg\psi=1$). Таким образом, мы приходим к необходимости ввести новый объект — зависящее от вспомогательных переменных λ,ψ отображение

$$K^{\lambda,\psi}=\mathcal{P}'+\lambda\mathcal{P}''+\psi K:V\to V$$

в терминах которого симметризованная тензорная степень цепной гомотопии есть просто

$$K^{\otimes_{\mathrm{sym}} n}=\frac{\partial}{\partial\psi}\int_0^1 d\lambda(K^{\lambda,\psi})^{\otimes n}$$

где тензорная степень в подынтегральном выражении есть обычная тензорная степень линейного отображения.

Примечание. Можно понимать вспомогательные переменные (λ,ψ) как координаты на нечётном кокасательном расслоении отрезка $T^*[-1]([0,1])$. Тогда вместо производной по ψ естественнее писать интеграл Березина (что то же самое):

$$K^{\otimes_{\mathrm{sym}} n}=\int_{T^*[-1]([0,1])}d\lambda\mathcal{D}\psi\ (K^{\lambda,\psi})^{\otimes n}$$

6.2. **Данные индуцирования для кубического комплекса, клеточное BF-действие на кубическом комплексе, клеточная локальность.** Введём обозначение $I=[0,1]$ для единичного отрезка, и пусть $I^n=\underbrace{I\times\cdots\times I}_{n}$ означает n-мерный куб. Комплекс де Рама для n-мерного куба $\Omega^\bullet(I^n)$ можно представить как тензорную степень комплекса де Рама отрезка:

$$\Omega^\bullet(I^n)=\underbrace{\Omega^\bullet(I)\otimes\cdots\otimes\Omega^\bullet(I)}_{n}=(\Omega^\bullet(I))^{\otimes n}$$

Далее, стандартное клеточное разбиение куба I^n, состоящее из самого куба и его граней всех размерностей, является (декартовой) степенью стандартного клеточного комплекса отрезка

$$\Xi_{I^n}=\underbrace{\{0,1,I\}\times\cdots\times\{0,1,I\}}_{n}$$

Грани n-куба мы будем обозначать последовательностями $\zeta = \zeta^1 \cdots \zeta^n$, где $\zeta^i \in \{0, 1, I\}$. Размерность грани есть $|\zeta^1 \cdots \zeta^n| = |\zeta^1| + \cdots + |\zeta^n|$. Коцепной комплекс стандартного клеточного разбиения куба есть тензорная степень коцепного комплекса для отрезка:

$$C^\bullet(I^n) = (C^\bullet(I))^{\otimes n} = (\mathbb{R}e_0 \oplus \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_{01})^{\otimes n}$$

Соответственно, базисные коцепи на кубе мы обозначаем $e_{\zeta^1 \dots \zeta^n} = e_{\zeta^1} \otimes \cdots \otimes e_{\zeta^n}$.

Данные индуцирования с $\Omega^\bullet(I^n)$ на $C^\bullet(I^n)$ мы задаём как (симметризованную) тензорную степень стандартных данных индуцирования для отрезка как 1-симплекса (разделы 5.1,5.2):

$$\iota_{I^n} = \underbrace{\iota_I \otimes \cdots \otimes \iota_I}_{n} \tag{321}$$

$$r_{I^n} = \underbrace{r_I \otimes \cdots \otimes r_I}_{n} \tag{322}$$

$$K_{I^n} = K_I^{\otimes_{\mathrm{sym}} n} = \frac{\partial}{\partial \psi} \int_0^1 d\lambda (\mathcal{P}'_I + \lambda \mathcal{P}''_I + \psi K_I)^{\otimes n} \tag{323}$$

Таким образом, вложение ι_{I^n} посылает базисные коцепи в произведения форм Уитни ("кубические формы Уитни"):

$$\iota_{I^n} : e_{\zeta^1 \dots \zeta^n} \mapsto \chi_{\zeta^1 \dots \zeta^n} = \chi_{\zeta^1} \otimes \cdots \otimes \chi_{\zeta^n} \tag{324}$$

Например, на квадрате I^2 с координатами $0 \le t_1, t_2 \le 1$ кубические формы Уитни имеют вид

$$\chi_{00} = (1-t_1)(1-t_2),\ \chi_{01} = (1-t_1)t_2,\ \chi_{10} = t_1(1-t_2),\ \chi_{11} = t_1 t_2,$$
$$\chi_{I0} = (1-t_2)dt_1,\ \chi_{I1} = t_2 dt_1,\ \chi_{0I} = (1-t_1)dt_2,\ \chi_{1I} = t_1 dt_2,\ \chi_{II} = dt_1 dt_2$$

Ретракция r_{I^n} действует с помощью интегралов по граням куба

$$r_{I^n} : \alpha \mapsto \sum_{\zeta^1, \cdots, \zeta^n \in \{0,1,I\}} e_{\zeta^1 \dots \zeta^n} \int_{\zeta^1 \dots \zeta^n} \alpha$$

Цепная гомотопия K_{I^n} действует на произведение n форм на отрезке $\alpha_i \in \Omega^\bullet(I)$ как

$$\begin{aligned}
&K_{I^n} : \alpha_1(t_1) \wedge \cdots \wedge \alpha_n(t_n) \mapsto \\
&\frac{\partial}{\partial \psi} \int_0^1 d\lambda \left(\lambda \alpha_1(t_1) + (1-\lambda) \left(\alpha_1(0)(1-t_1) + \alpha_1(1) t_1 + \int_0^1 \alpha_1(\tilde{t}_1) \cdot dt_1 \right) + \right. \\
&\qquad + \psi \left(\int_0^{t_1} \alpha_1(\tilde{t}_1) - t_1 \int_0^1 \alpha_1(\tilde{t}_1) \right) \Bigg) \wedge \cdots \wedge \\
&\wedge \left(\lambda \alpha_n(t_n) + (1-\lambda) \left(\alpha_n(0)(1-t_n) + \alpha_n(1) t_n + \int_0^1 \alpha_n(\tilde{t}_n) \cdot dt_n \right) + \right. \\
&\qquad + \psi \left(\int_0^{t_n} \alpha_n(\tilde{t}_n) - t_n \int_0^1 \alpha_n(\tilde{t}_n) \right) \Bigg)
\end{aligned}$$

Данные индуцирования $(\iota_{I^n}, r_{I^n}, K_{I^n})$ согласованы с действием группы симметрии n-куба $S_n \ltimes \mathbb{Z}_2^n$ на дифференциальных формах $\Omega^\bullet(I^n)$ и коцепях $C^\bullet(I^n)$. Имеется ввиду, что i-я копия $\mathbb{Z}_2$ есть обращение i-го отрезка, действующее на формы как $\mathrm{inv}_i^* : \Omega^\bullet(I^n) \to \Omega^\bullet(I^n)$, где $\mathrm{inv}_i : t_i \mapsto 1 - t_i$ и $t_j \mapsto t_j$ для $j \neq i$, и на коцепи i-го отрезка как $e_0 \mapsto e_1, e_1 \mapsto e_0, e_I \mapsto -e_I$. Симметрия S_n переставляет сомножители в $\Omega^\bullet(I^n) = \Omega^\bullet(I)\otimes\cdots\otimes\Omega^\bullet(I)$ и $C^\bullet(I^n) = C^\bullet(I)\otimes\cdots\otimes C^\bullet(I)$. Согласованность с действием S_n автоматически следует из того, что мы построили $(\iota_{I^n}, r_{I^n}, K_{I^n})$ как симметризованную тензорную степень (ι_I, r_I, K_I).

Далее, данные индуцирования $(\iota_{I^n}, r_{I^n}, K_{I^n})$ согласованы с отображениями ограничения формы (или коцепи) на грань: $\Omega^\bullet(I^n) \to \Omega^\bullet(\zeta)$, $C^\bullet(I^n) \to C^\bullet(\zeta)$. То есть, выполнены три соотношения

$$\left.\left(\iota_{I^n}\left(\sum_{\zeta'} e_{\zeta'}\alpha^{\zeta'}\right)\right)\right|_\zeta = \iota_\zeta\left(\left.\left(\sum_{\zeta'} e_{\zeta'}\alpha^{\zeta'}\right)\right|_\zeta\right) \tag{325}$$

$$(r_{I^n}\alpha)|_\zeta = r_\zeta(\alpha|_\zeta) \tag{326}$$

$$(K_{I^n}\alpha)|_\zeta = K_\zeta(\alpha|_\zeta) \tag{327}$$

для любой грани $\zeta \subset I^n$, дифференциальной формы $\alpha \in \Omega^\bullet(I^n)$ и коцепи $\sum_{\zeta'} e_{\zeta'}\alpha^{\zeta'} \in C^\bullet(I^n)$. Свойства (325,326) очевидно вытекают из соответствующих свойств для отрезка. Проверим (327). Пользуясь $S_n \ltimes \mathbb{Z}_2^n$-симметрией, приведём грань ζ к стандартному виду $\underbrace{I\cdots I}_{m}\underbrace{0\cdots 0}_{n-m}$ для некоторого m (размерность исходной грани). Далее, для форм $\alpha \in \Omega^\bullet(I)$ на отрезке выполнено

$$(\mathcal{P}_I'\alpha)|_0 = \alpha(0),\ (\mathcal{P}_I''\alpha)|_0 = 0,\ (K_I\alpha)|_0 = 0$$

Поэтому $(K_{I^n}\bullet)|_{I\cdots I0\cdots 0}$ действует на факторизующихся формах $\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n \in \Omega^\bullet(I^n)$ как

$$\begin{aligned}&(K_{I^n}(\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_n))|_{I\cdots I0\cdots 0}\\ &= \frac{\partial}{\partial\psi}\int_0^1 d\lambda(\mathcal{P}_I'\alpha_1+\lambda\mathcal{P}_I''\alpha_1+\psi K_I\alpha_1)\otimes\cdots\otimes(\mathcal{P}_I'\alpha_m+\lambda\mathcal{P}_I''\alpha_m+\psi K_I\alpha_m)\otimes\alpha_{m+1}(0)\otimes\cdots\otimes\alpha_n(0)\end{aligned}$$

и поскольку последние $n-m$ сомножителей есть просто умножение на константу, это, очевидно, совпадает с $K_{I\cdots I0\cdots 0}((\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_n)|_{I\cdots I0\cdots 0}) = K_{I\cdots I0\cdots 0}(\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_m)\cdot\alpha_{m+1}(0)\cdots\alpha_n(0)$. Наконец, на все (не только факторизующиеся) формы (327) продолжается по линейности.

Теперь, пользуясь свойствами (325–327), мы можем построить данные индуцирования $(\iota_\Xi, r_\Xi, K_\Xi)$ для любого клеточного разбиения Ξ многообразия M, где все клетки — кубы разных размерностей. Именно, для клеточной коцепи $\sum_{\zeta\in\Xi} e_\zeta\alpha^\zeta \in C^\bullet(\Xi)$ мы определяем действие вложения $\iota_\Xi : C^\bullet(\Xi) \to \Omega^\bullet(\Xi)$ с помощью ограничений на клетки:

$$\left.\left(\iota_\Xi\left(\sum_{\zeta'\in\Xi} e_{\zeta'}\alpha^{\zeta'}\right)\right)\right|_\zeta = \sum_{\zeta'\in\zeta} \chi^{(\zeta)}_{\zeta'}\alpha^{\zeta'}$$

где $\chi^{(\zeta)}_{\zeta'}$ — кубическая форма Уитни на кубе ζ, ассоциированная с гранью $\zeta' \subset \zeta$. В частности, образы базисных коцепей e_ζ при вложении ι_Ξ естественно называть базисными кубическими формами Уитни для клеточного разбиения: $\iota_\Xi(e_\zeta) = \chi^{(\Xi)}_\zeta \in \Omega^{|\zeta|}(M)$. В отличие от случая симплициального комплекса, эти формы Уитни не кусочно-линейны, а кусочно-полиномиальны. Ретракция $r_\Xi : \Omega^\bullet(M) \to C^\bullet(\Xi)$ задаётся интегралами по клеткам

$$r_\Xi\alpha = \sum_{\zeta\in\Xi} e_\zeta \int_\zeta \alpha$$

Цепная гомотопия K_Ξ строится с помощью ограничений на клетки:

$$(K_\Xi\alpha)|_\zeta = K_\zeta(\alpha|_\zeta)$$

для всех клеток $\zeta \in \Xi$ и для любой формы $\alpha \in \Omega^\bullet(M)$. Аксиомы данных индуцирования (121–126) для $(\iota_\Xi, r_\Xi, K_\Xi)$ выполнены, поскольку они выполнены на каждой клетке Ξ.

Для комплекса $\mathfrak{g}$-значных дифференциальных форм $\Omega^\bullet(M, \mathfrak{g})$ и комплекса $\mathfrak{g}$-значных коцепей $C^\bullet(\Xi, \mathfrak{g})$ мы задаём данные индуцирования $(\iota_\Xi, r_\Xi, K_\Xi)$ как только что построенные данные индуцирования для вещественнозначных форм и коцепей, и считаем действие отображений $(\iota_\Xi, r_\Xi, K_\Xi)$ в $\mathfrak{g}$-коэффициентах тривиальным.

Действие эффективной BF_∞-теории, индуцированное из топологической BF-теории (т.е. абстрактной BF-теории, ассоциированной со структурой $DGLA$ на $\Omega^\bullet(M, \mathfrak{g})$) на пространстве $\mathcal{F}_\Xi = T^*[-1](C^\bullet(\Xi, \mathfrak{g})[1])$ и определяемое пертурбативным рядом (115,116), мы называем клеточным BF-действием на кубическом клеточном комплексе $S_\Xi \in \mathrm{Fun}(\mathcal{F}_\Xi)$.

Так же, как и для симплициальной BF-теории, мы можем пользоваться либо вещественными координатами $(\omega^{\zeta a}, p_{\zeta a})$ на пространстве полей $\mathcal{F}_\Xi = T^*[-1](C^\bullet(\Xi, \mathfrak{g})[1])$, либо $\mathfrak{g}$- и $\mathfrak{g}^*$-значными координатами $\omega^\zeta = \sum_a T_a\omega^{\zeta a}, p_\zeta = \sum_a T^a p_{\zeta a}$ (напомним, мы обозначаем (T_a) базис на $\mathfrak{g}$ и (T^a) — двойственный базис на $\mathfrak{g}^*$). Духовые числа координат есть $\mathrm{gh}(\omega^\zeta) = \mathrm{gh}(\omega^{\zeta a}) = 1 - |\zeta|$, $\mathrm{gh}(p_\zeta) = \mathrm{gh}(p_{\zeta a}) = -2 + |\zeta|$. Соответственно, супер-поля клеточной BF-теории имеют вид

$$\omega_\Xi = \sum_{\zeta,a} T_a e_\zeta \omega^{\zeta a} = \sum_\zeta e_\zeta\omega^\zeta, \quad p_\Xi = \sum_{\zeta,a} p_{\zeta a}T^a e^\zeta = \sum_\zeta p_\zeta e^\zeta$$

Для клеточного действия $S_\Xi(\omega_\Xi, p_\Xi)$ справедливо утверждение, полностью аналогичное Теореме 7.

Теорема 10 (Клеточная локальность клеточного BF-действия)**.** *Существует семейство универсальных функций (укороченных BF-действий для кубов)*

$$\bar{S}_{I^n}(\{\omega^\zeta\}_{\zeta\subset I^n}, p_{I_n}) \in \mathrm{Fun}(\mathfrak{g}\otimes C^\bullet(I^n)[1]\oplus\mathfrak{g}^*\otimes C_n(I^n)[-2])$$

для $n\geq 0$, такое что для любого кубического клеточного разбиения Ξ любого многообразия M имеет место разложение S_Ξ по клеткам:

$$S_\Xi(\omega_\Xi, p_\Xi) = \sum_{\zeta\in\Xi}\bar{S}_\zeta(\{\omega^{\zeta'}\}_{\zeta'\subset\zeta}, p_\zeta)$$

Пертурбативное разложение для $\bar{S}_{I^n}$ имеет вид

$$\begin{aligned}\bar{S}_{I^n} = \Bigg\langle p_{I^n}, \sum_{\zeta_1\subset I^n} d^{I^n}_{\zeta_1}\omega^{\zeta_1} + \sum_{T\in\mathbf{T}_{\mathrm{nonPl}}:\,|T|\geq 2}\ \sum_{\zeta_1,\ldots,\zeta_{|T|}\subset I^n}\frac{1}{|\mathrm{Aut}(T)|}\cdot \\ \cdot\int_{I^n}\mathrm{Iter}_{T;-K_{I^n}[\bullet,\bullet];[\bullet,\bullet]}(\chi_{\zeta_1}\omega^{\zeta_1},\ldots,\chi_{\zeta_{|T|}}\omega^{\zeta_{|T|}})\Bigg\rangle_{\mathfrak{g}} - \\ -\hbar\sum_{L\in\mathbf{L}_{\mathrm{nonPl}}}\ \sum_{\zeta_1,\ldots,\zeta_{|L|}\subset I^n}\frac{1}{|\mathrm{Aut}(L)|}\mathrm{Loop}_{L;-K_{I^n}[\bullet,\bullet];\Omega^\bullet_0(I^n,\mathfrak{g})}(\chi_{\zeta_1}\omega^{\zeta_1},\ldots,\chi_{\zeta_{|L|}}\omega^{\zeta_{|L|}})\end{aligned}$$

где $\Omega^\bullet_0(I^n)=\{\alpha\in\Omega^\bullet(I^n):\ \alpha|_{\partial I^n}=0\}$

Доказательство буквально повторяет доказательство Теоремы 7 для симплициального случая, поскольку оно использует лишь свойство согласованности данных индуцирования с ограничением на грань.

Таким образом, мы снова приходим к задаче вычисления семейства универсальных функций $\bar{S}_{I^D}$ для $D\geq 0$. Заметим, что, поскольку в размерностях $D=0,1$ куб совпадает с симплексом, мы знаем точные ответы для $\bar{S}_{I^D}$ при $D=0,1$ из (251) и (254,255).

6.3. **Факторизация фейнмановских диаграмм, пертурбативный результат для D-куба.** Поступим так же, как в разделе 5.6 и разделим укороченное действие для куба I^D на вклады отдельных фейнмановских диаграмм:

$$\bar{S}_{I^D} = \sum_{T\in\mathbf{T}_{\mathrm{nonPl}}}\bar{S}_{I^D,T} + \hbar\sum_{L\in\mathbf{L}_{\mathrm{nonPl}}}\bar{S}_{I^D,L}$$

и разделим вклад каждой диаграммы на де рамовскую часть и часть в $\mathfrak{g}$-коэффициентах:

$$\begin{aligned}\bar{S}_{I^D,T} &= \frac{1}{|\mathrm{Aut}(T)|}\sum_{\zeta_1,\ldots,\zeta_{|T|}\subset I^D}\left\langle p_{I^D}, \int_{I^D}\mathrm{Iter}_{T;-K_{I^D}[\bullet,\bullet];[\bullet,\bullet]}(\chi_{\zeta_1}\omega^{\zeta_1},\ldots,\chi_{\zeta_{|T|}}\omega^{\zeta_{|T|}})\right\rangle_{\mathfrak{g}} \\ &= \frac{1}{|\mathrm{Aut}(T)|}\sum_{\zeta_1,\ldots,\zeta_{|T|}\subset I^D}\int_{I^D}\mathrm{Iter}_{T;-K_{I^D}(\bullet\wedge\bullet);(\bullet\wedge\bullet)}(\chi_{\zeta_1},\ldots,\chi_{\zeta_{|T|}})\cdot \\ &\quad\cdot < p_{I^D}, \mathrm{Iter}_{T;[\bullet,\bullet];[\bullet,\bullet]}(\omega^{\zeta_1},\ldots,\omega^{\zeta_{|T|}}) >_{\mathfrak{g}} \epsilon_T(|\zeta_1|,\ldots,|\zeta_{|T|}|) \\ &= \frac{1}{|\mathrm{Aut}(T)|}\sum_{\zeta_1,\ldots,\zeta_{|T|}\subset I^D}\epsilon_T(|\zeta_1|,\ldots,|\zeta_{|T|}|)\cdot C_{I^D,T}(\zeta_1,\ldots,\zeta_{|T|})\cdot\end{aligned}$$

$$\cdot < p_{I^D}, \mathrm{Iter}_{T;[\bullet,\bullet];[\bullet,\bullet]}(\omega^{\zeta_1},\dots,\omega^{\zeta_{|T|}}) >_{\mathfrak{g}}$$

$$\bar{S}_{I^D,L} = -\frac{1}{|\mathrm{Aut}(L)|}\sum_{\zeta_1,\dots,\zeta_{|L|}\subset I^D}\mathrm{Loop}_{L;-K_{I^D}[\bullet,\bullet];\Omega_0^\bullet(I^D,\mathfrak{g})}(\chi_{\zeta_1}\omega^{\zeta_1},\dots,\chi_{\zeta_{|L|}}\omega^{\zeta_{|L|}})$$

$$= -\frac{1}{|\mathrm{Aut}(L)|}\sum_{\zeta_1,\dots,\zeta_{|L|}\subset I^D}\mathrm{Loop}_{L;-K_{I^D}(\bullet\wedge\bullet);\Omega_0^\bullet(I^D)}(\chi_{\zeta_1},\dots,\chi_{\zeta_{|L|}})\cdot$$

$$\cdot\,\mathrm{Loop}_{L;[\bullet,\bullet];\mathfrak{g}}(\omega^{\zeta_1},\dots,\omega^{\zeta_{|L|}})\epsilon_L(|\zeta_1|,\dots,|\zeta_{|L|}|)$$

$$= -\frac{1}{|\mathrm{Aut}(L)|}\sum_{\zeta_1,\dots,\zeta_{|L|}\subset I^D}\epsilon_L(|\zeta_1|,\dots,|\zeta_{|L|}|)\cdot C_{I^D,L}(\zeta_1,\dots,\zeta_{|L|})\cdot \mathrm{Loop}_{L;[\bullet,\bullet];\mathfrak{g}}(\omega^{\zeta_1},\dots,\omega^{\zeta_{|L|}})$$

где мы ввели обозначения для де рамовских частей фейнмановских диаграмм:

$$\begin{aligned} C_{I^D,T}(\zeta_1,\dots,\zeta_{|T|}) &= \int_{I^D}\mathrm{Iter}_{T;-K_{I^D}(\bullet\wedge\bullet);(\bullet\wedge\bullet)}(\chi_{\zeta_1},\dots,\chi_{\zeta_{|T|}}) \\ C_{I^D,L}(\zeta_1,\dots,\zeta_{|L|}) &= \mathrm{Loop}_{L;-K_{I^D}(\bullet\wedge\bullet);\Omega_0^\bullet(I^D)}(\chi_{\zeta_1},\dots,\chi_{\zeta_{|L|}}) \end{aligned}$$

Знаки $\epsilon_T, \epsilon_L = \pm 1$ происходят из-за перестановки переменных ω^ζ с кубическими формами Уитни χ_ζ и операторами K_{I^D}, и, следовательно, зависят только от размерностей граней, и зависят точно совпадают со знавками ϵ_T, ϵ_L, введёнными в разделе 5.6. Вклад дерева с одним листом $(*)$ мы понимаем как

$$C_{I^D,(*)}(\zeta) = d_\zeta^{I^D} = \int_{I^D} d\chi_\zeta = \begin{cases} (-1)^{i+1}, & \text{если } \zeta = \underbrace{I\cdots I}_{i-1}1\underbrace{I\cdots I}_{D-i} \\ (-1)^i, & \text{если } \zeta = \underbrace{I\cdots I}_{i-1}0\underbrace{I\cdots I}_{D-i} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} \tag{328}$$

Теперь вычислим вклад следующего по сложности дерева $C_{I^D,(**)}$:

$$C_{I^D,(**)}(\zeta_1,\zeta_2) = \int_{I^D}\chi_{\zeta_1}\wedge\chi_{\zeta_2} = \int_{I^D}(\chi_{\zeta_1^1}\otimes\cdots\otimes\chi_{\zeta_1^D})\wedge(\chi_{\zeta_2^1}\otimes\cdots\otimes\chi_{\zeta_2^D})$$

$$= (-1)^{|\zeta_1^D|\cdot(|\zeta_2^1|+\dots+|\zeta_2^{D-1}|)\,+\,|\zeta_1^{D-1}|\cdot(|\zeta_2^1|+\dots+|\zeta_2^{D-2}|)\,+\,\cdots\,+\,|\zeta_1^2|\cdot|\zeta_2^1|}\int_{I^D}(\chi_{\zeta_1^1}\wedge\chi_{\zeta_2^1})\otimes\cdots\otimes(\chi_{\zeta_1^D}\wedge\chi_{\zeta_2^D})$$

$$= (-1)^{\sum_{1\le j<i\le D}|\zeta_1^i|\cdot|\zeta_2^j|}\prod_{i=1}^D\int_I\chi_{\zeta_1^i}\wedge\chi_{\zeta_2^i}$$

Таким образом, значение $C_{I^D,(**)}$ для пары граней $\zeta_1 = \zeta_1^1\cdots\zeta_1^D,\ \zeta_2 = \zeta_2^1\cdots\zeta_2^D$ D-мерного куба представляется (с точностью до знака, возникающего из перетасовки тензорного произведения) в виде произведения значений $C_{I,(**)}$ на 1-мерном отрезке, вычисленных для проекций ζ_1^i, ζ_2^i исходных граней на i-й отрезок:

$$C_{I^D,(**)}(\zeta_1,\zeta_2) = (-1)^{\sum_{1\le j<i\le D}|\zeta_1^i|\cdot|\zeta_2^j|}\prod_{i=1}^D C_{I,(**)}(\zeta_1^i,\zeta_2^i)$$

В свою очередь, на отрезке задача вычисления $C_{I,(**)}(\zeta_1^i,\zeta_2^i) = \int_I \chi_{\zeta_1^i}\wedge\chi_{\zeta_2^i}$ решается элементарно перебором всех вариантов пар граней отрезка:

$$C_{I,(**)}(0,I)=C_{I,(**)}(I,0)=C_{I,(**)}(1,I)=C_{I,(**)}(I,1)=\frac{1}{2} \tag{329}$$

и все остальные значения $C_{I,(**)}$ равны нулю по соображениям размерности (сумма степеней форм должна быть $\deg\chi_{\zeta_1^i}+\deg\chi_{\zeta_2^i}=1$).

Перейдём теперь к вычислению $C_{I^D,(*(**))}$:

$$\begin{gathered}
C_{I^D,(*(**))}(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3) = -\int_{I^D}\chi_{\zeta_1}\wedge K_{I^D}(\chi_{\zeta_2}\wedge\chi_{\zeta_3}) \\
= -\int_{I^D}(\chi_{\zeta_1^1}\otimes\cdots\otimes\chi_{\zeta_1^D})\wedge\frac{\partial}{\partial\psi}\int_0^1 d\lambda(\mathcal{P}_I'+\lambda\mathcal{P}_I''+\psi K_I)^{\otimes D}((\chi_{\zeta_2^1}\otimes\cdots\otimes\chi_{\zeta_2^D})\wedge(\chi_{\zeta_3^1}\otimes\cdots\otimes\chi_{\zeta_3^D})) \\
= -(-1)^{|\zeta_1|+D}(-1)^{\sum_{1\le j<i\le D}|\zeta_1^i|\cdot|\zeta_2^j|+|\zeta_1^i|\cdot|\zeta_3^j|+|\zeta_2^i|\cdot|\zeta_3^j|}\cdot \\
\cdot\frac{\partial}{\partial\psi}\int_0^1 d\lambda\int_{I^D}(\chi_{\zeta_1^1}\wedge K_I^{\lambda,\psi}(\chi_{\zeta_2^1}\wedge\chi_{\zeta_3^1}))\otimes\cdots\otimes(\chi_{\zeta_1^D}\wedge K_I^{\lambda,\psi}(\chi_{\zeta_2^D}\wedge\chi_{\zeta_3^D})) \\
= -(-1)^{|\zeta_1|+D}(-1)^{\sum_{1\le j<i\le D}|\zeta_1^i|\cdot|\zeta_2^j|+|\zeta_1^i|\cdot|\zeta_3^j|+|\zeta_2^i|\cdot|\zeta_3^j|}\frac{\partial}{\partial\psi}\int_0^1 d\lambda\prod_{i=1}^{D}\int_I\chi_{\zeta_1^i}\wedge K_I^{\lambda,\psi}(\chi_{\zeta_2^i}\wedge\chi_{\zeta_3^i})
\end{gathered}$$

Знак $(-1)^{|\zeta_1|+D}$ возникает из-за протаскивания производной $\frac{\partial}{\partial\psi}$ налево, и второй знак — из перетасовки тензорного произведения. Введём обозначение

$$C_{I,(*(**))}^{\lambda,\psi}(\zeta_1^i,\zeta_2^i,\zeta_3^i)=\int_I\chi_{\zeta_1^i}\wedge K_I^{\lambda,\psi}(\chi_{\zeta_2^i}\wedge\chi_{\zeta_3^i})$$

т.е. $C_{I,(*(**))}^{\lambda,\psi}$ является линейной функцией вспомогательных переменных λ,ψ, зависящей от тройки граней отрезка. В терминах $C_{I,(*(**))}^{\lambda,\psi}$ де рамовская часть вклада фейнмановского дерева $(*(**))$ в укороченное действие на D-кубе есть

$$\begin{aligned}
&C_{I^D,(*(**))}(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3) \\
&\qquad= -(-1)^{|\zeta_1|+D}(-1)^{\sum_{1\le j<i\le D}|\zeta_1^i|\cdot|\zeta_2^j|+|\zeta_1^i|\cdot|\zeta_3^j|+|\zeta_2^i|\cdot|\zeta_3^j|}\frac{\partial}{\partial\psi}\int_0^1 d\lambda\prod_{i=1}^{D}C_{I,(*(**))}^{\lambda,\psi}(\zeta_1^i,\zeta_2^i,\zeta_3^i)
\end{aligned}$$

Таким образом, снова имеет место факторизация (с точностью до знака и операции $\frac{\partial}{\partial\psi}\int_0^1 d\lambda$) де рамовской части вклада фейнмановского дерева $C_{I^D,(*(**))}$ на некоторые универсальные, зависящие от ψ,λ, функции тройки граней отрезка $C_{I,(*(**))}^{\lambda,\psi}$. Последние можно элементарно вычислить перебором всех троек граней отрезка, используя явные выражения для форм Уитни на отрезке $\chi_0=1-t$, $\chi_1=t$, $\chi_I=dt$, и явную формулу для $K_I^{\lambda,\psi}$

$$\begin{aligned}
K_I^{\lambda,\psi}(f(t)+g(t)dt) &= (\lambda\cdot\mathrm{id}+(1-\lambda)\mathcal{P}_I'+\psi K_I)\circ(f(t)+g(t)dt) \\
&= (\lambda f(t)+(1-\lambda)f(0)\cdot(1-t)+(1-\lambda)f(1)\cdot t)+
\end{aligned}$$

$$+\left(\lambda g(t)dt+((1-\lambda)dt-\psi t)\int_0^1 g(\tilde t)d\tilde t+\psi\int_0^t g(\tilde t)d\tilde t\right)$$

для любой пары функций на отрезке $f(t), g(t)$. В результате получаем следующие значения для $C^{\lambda,\psi}_{I,(*(**))}$:

$$\begin{gathered}
C^{\lambda,\psi}_{I,(*(**))}(I,0,0)=C^{\lambda,\psi}_{I,(*(**))}(I,1,1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\lambda,\quad C^{\lambda,\psi}_{I,(*(**))}(I,0,1)=C^{\lambda,\psi}_{I,(*(**))}(I,1,0)=\frac{1}{6}\lambda,\\
C^{\lambda,\psi}_{I,(*(**))}(0,0,I)=C^{\lambda,\psi}_{I,(*(**))}(0,I,0)=C^{\lambda,\psi}_{I,(*(**))}(1,1,I)=C^{\lambda,\psi}_{I,(*(**))}(1,I,1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\lambda,\\
C^{\lambda,\psi}_{I,(*(**))}(0,1,I)=C^{\lambda,\psi}_{I,(*(**))}(0,I,1)=C^{\lambda,\psi}_{I,(*(**))}(1,0,I)=C^{\lambda,\psi}_{I,(*(**))}(1,I,0)=\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\lambda,\\
C^{\lambda,\psi}_{I,(*(**))}(I,0,I)=C^{\lambda,\psi}_{I,(*(**))}(I,I,0)=\frac{1}{12}\psi,\quad C^{\lambda,\psi}_{I,(*(**))}(I,1,I)=C^{\lambda,\psi}_{I,(*(**))}(I,I,1)=-\frac{1}{12}\psi
\end{gathered}\tag{330}$$

и для остальных троек граней значения $C^{\lambda,\psi}_{I,(*(**))}$ равны нулю.

Продолжая это рассуждение, для общей древесной фейнмановской диаграммы T получаем

$$\begin{aligned}
&C_{I^D,T}(\zeta_1,\dots,\zeta_{|T|})=(-1)^{|T|}\int_{I^D}\mathrm{Iter}_{T;K_{I^D}(\bullet\wedge\bullet),(\bullet\wedge\bullet)}(\chi_{\zeta_1},\dots,\chi_{\zeta_{|T|}})\\
&=(-1)^{|T|}\int_{I^D}\mathrm{Iter}_{T;\frac{\partial}{\partial\psi_k}\int_0^1 d\lambda_k(K_I^{\lambda^k,\psi^k})^{\otimes D}(\bullet\wedge\bullet);(\bullet\wedge\bullet)}(\chi_{\zeta_1^1}\otimes\cdots\otimes\chi_{\zeta_1^D},\dots,\chi_{\zeta^1_{|T|}}\otimes\cdots\otimes\chi_{\zeta^D_{|T|}})\\
&=\hat\epsilon_{I^D,T}(\zeta_1,\dots,\zeta_{|T|})\frac{\partial}{\partial\psi_{|T|-2}}\cdots\frac{\partial}{\partial\psi_1}\int_0^1 d\lambda_1\cdots\int_0^1 d\lambda_{|T|-2}\prod_{i=1}^D C_{I,T}^{\lambda_1,\psi_1;\cdots;\lambda_{|T|-2},\psi_{|T|-2}}(\zeta_1^i,\dots,\zeta^i_{|T|})
\end{aligned}$$

где имеется ввиду, что мы пронумеровали внутренние рёбра дерева (стандартной нумерцией рёбер мы считаем ту, которая возникает из представления дерева скобочной структурой, при чтении её слева направо), и ассоциировали с каждым внутренним ребром свою пару вспомогательных переменных λ_k,ψ_k. Знак $\hat\epsilon_{I^D,T}(\zeta_1,\dots,\zeta_{|T|})=\pm1$ происходит из протаскивания производных $\frac{\partial}{\partial\psi_k}$ налево, перетасовки тензорного произведения, и также содержит знак $(-1)^{|T|}$ (происходящий из того, что мы меняем пропагатор с $-K_{I^D}$ на K_{I^D}). Например,

$$\begin{aligned}
\hat\epsilon_{I^D,(**)}(\zeta_1,\zeta_2)&=(-1)^{\sum_{1\le j<i\le D}|\zeta_1^i|\cdot|\zeta_2^j|}\\
\hat\epsilon_{I^D,(*(**))}(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)&=-(-1)^{|\zeta_1|+D}(-1)^{\sum_{1\le j<i\le D}|\zeta_1^i|\cdot|\zeta_2^j|+|\zeta_1^i|\cdot|\zeta_3^j|+|\zeta_2^i|\cdot|\zeta_3^j|}
\end{aligned}$$

Множители $C_{I,T}^{\lambda_1,\psi_1;\cdots;\lambda_{|T|-2},\psi_{|T|-2}}(\zeta_1^i,\dots,\zeta^i_{|T|})$, на которые факторизуется $C_{I^D,T}(\zeta_1,\dots,\zeta_{|T|})$, зависят только от дерева T и набора $|T|$ граней отрезка, и являются функциями вспомогательных переменных $\lambda_1,\psi_1,\dots,\lambda_{|T|-2},\psi_{|T|-2}$, которые мы расставляем на внутренних рёбрах T:

$$C_{I,T}^{\lambda_1,\psi_1;\cdots;\lambda_{|T|-2},\psi_{|T|-2}}(\zeta_1^i,\dots,\zeta^i_{|T|})=\int_I\mathrm{Iter}_{T;K_I^{\lambda^k,\psi^k}(\bullet\wedge\bullet);(\bullet\wedge\bullet)}(\chi_{\zeta_1^i},\dots,\chi_{\zeta^i_{|T|}})$$

Для всякого заданного дерева T значения $C_{I,T}^{\{\lambda_k,\psi_k\}}$ можно вычислять перебором (возможно, большим, но конечным) всех вариантов наборов $|T|$ граней отрезка.

Теперь рассмотрим однопетлевые диаграммы. Фейнмановские графы L с длиной цикла 1 не дают вклада в $\bar{S}_{I^D}$, согласно аргументу, приведённому в разделе 5.6: соответствующие структуры в $\mathfrak{g}$-коэффициентах $\mathrm{Loop}_{L;[\bullet,\bullet];\mathfrak{g}}(\omega^{\zeta_1},\ldots,\omega^{\zeta_{|L|}}) = 0$ в силу унимодулярности $\mathfrak{g}$. Поэтому рассмотрим простейшую диаграмму с циклом длины 2: $L = (*(*\bullet))$. Факторизация здесь происходит по тому же механизму, как для древесных диаграмм, но нужно дополнительно использовать общее свойство факторизации супер-следа:

$$\mathrm{Str}_{V_1\otimes\cdots\otimes V_n}\mathcal{O}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{O}_n = (\mathrm{Str}_{V_1}\mathcal{O}_1)\cdots(\mathrm{Str}_{V_n}\mathcal{O}_n)$$

для набора градуированных векторных пространств $V_1,\ldots,V_n$ и набора эндоморфизмов степени 0 на них $\mathcal{O}_1\in\mathrm{End}(V_1),\ldots,\mathcal{O}_n\in\mathrm{End}(V_n)$. Также заметим, что пространство дифференциальных форм на кубе с нулевым граничным условием факторизуется:

$$\Omega_0^\bullet(I^D) = \underbrace{\Omega_0^\bullet(I)\otimes\cdots\otimes\Omega_0^\bullet(I)}_{D}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
C_{I^D,(*(*\bullet))}(\zeta_1,\zeta_2) &= \mathrm{Str}_{\Omega_0^\bullet(I^D)}K_{I^D}(\chi_{\zeta_1}\wedge K_{I^D}(\chi_{\zeta_2}\wedge\bullet))\\
&= \mathrm{Str}_{(\Omega_0^\bullet(I))^{\otimes D}}\frac{\partial}{\partial\psi_1}\int_0^1 d\lambda_1 (K_I^{\lambda_1,\psi_1})^{\otimes D}\cdot\\
&\cdot\left((\chi_{\zeta_1^1}\otimes\cdots\otimes\chi_{\zeta_1^D})\wedge\frac{\partial}{\partial\psi_2}\int_0^1 d\lambda_2 (K_I^{\lambda_2,\psi_2})^{\otimes D}((\chi_{\zeta_2^1}\otimes\cdots\otimes\chi_{\zeta_2^D})\wedge\bullet)\right)\\
&= (-1)^{|\zeta_1|+1}(-1)^{\sum_{1\le j<i\le D}|\zeta_1^i|\cdot|\zeta_2^j|}\frac{\partial}{\partial\psi_2}\frac{\partial}{\partial\psi_1}\int_0^1 d\lambda_1\int_0^1 d\lambda_2\prod_{i=1}^D \mathrm{Str}_{\Omega_0^\bullet(I)}K_I^{\lambda_1,\psi_1}(\chi_{\zeta_1^i}\wedge K_I^{\lambda_2,\zeta_2}(\chi_{\zeta_2^i}\wedge\bullet))\\
&= (-1)^{|\zeta_1|+1}(-1)^{\sum_{1\le j<i\le D}|\zeta_1^i|\cdot|\zeta_2^j|}\frac{\partial}{\partial\psi_2}\frac{\partial}{\partial\psi_1}\int_0^1 d\lambda_1\int_0^1 d\lambda_2\prod_{i=1}^D C_{I,(*(*\bullet))}^{\lambda_1,\psi_1;\lambda_2,\psi_2}(\zeta_1^i,\zeta_2^i)
\end{aligned}$$

где знак происходит из протаскивания $\frac{\partial}{\partial\psi_2}$ налево и перетасовки тензорного произведения. Множители $C_{I,(*(*\bullet))}^{\lambda_1,\psi_1;\lambda_2,\psi_2}(\zeta_1^i,\zeta_2^i)$ зависят только от пары граней отрезка и двух пар вспомогательных переменных:

$$C_{I,(*(*\bullet))}^{\lambda_1,\psi_1;\lambda_2,\psi_2}(\zeta_1^i,\zeta_2^i) = \mathrm{Str}_{\Omega_0^\bullet(I)}K_I^{\lambda_1,\psi_1}(\chi_{\zeta_1^i}\wedge K_I^{\lambda_2,\zeta_2}(\chi_{\zeta_2^i}\wedge\bullet))$$

Для того, чтобы вычислить значения $C_{I,(*(*\bullet))}^{\lambda_1,\psi_1;\lambda_2,\psi_2}$, нам потребуются следующие свойства супер-следов по пространству дифференциальных форм на отрезке.

Во-первых, супер-след оператора умножения на функцию $f(t)\in C^\infty(I)$ есть

$$\mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(I)}f(t)\wedge\bullet = \frac{f(0)+f(1)}{2} \tag{331}$$

Этот ответ однозначно фиксируется следующими условиями:

- линейности по $f(t)$,
- инвариантностью относительно диффеоморфизмов отрезка: для диффеоморфизма $\phi : [0,1] \to [0,1]$ должно выполняться

$$\mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(I)} \phi^* f \wedge \bullet = \mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(I)} f \wedge \bullet$$

- согласованностью с симметрией отрезка:

$$\mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(I)} f(1-t) \wedge \bullet = \mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(I)} f(t) \wedge \bullet$$

- условием нормировки: супер-след единицы должен равняться эйлеровой характеристике $\Omega^\bullet(I)$, т.е. эйлеровой характеристике отрезка

$$\mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(I)} 1 \wedge \bullet = 1$$

Аналогичный результат для супер-следа по пространству форм на отрезке с нулевым граничным условием имеет вид

$$\mathrm{Str}_{\Omega^\bullet_0(I)} f(t) \wedge \bullet = -\frac{f(0)+f(1)}{2} \tag{332}$$

поскольку все условия те же, кроме нормировки: эйлерова характеристика $\Omega^\bullet_0(I)$ (или отрезка без обоих концов) есть -1. Иначе, можно получить (332) из (331) как

$$\mathrm{Str}_{\Omega^\bullet_0(I)} f(t) \wedge \bullet = \Big(\mathrm{Str}_{\Omega^\bullet_0(I)\oplus\Omega^\bullet(\{0\})\oplus\Omega^\bullet(\{1\})} f(t) \wedge \bullet\Big) - \big(\mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(\{0\})} f(t) \wedge \bullet\big) - \big(\mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(\{1\})} f(t) \wedge \bullet\big)$$
$$= \frac{f(0)+f(1)}{2} - f(0) - f(1) = -\frac{f(0)+f(1)}{2}$$

Второе свойство, которое нам нужно, такое:

$$\mathrm{Str}_{\Omega^\bullet_0(I)} K_I(f(t)dt \wedge \bullet) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - t\right) f(t) dt \tag{333}$$

Вывести его можно во-первых, непосредственно:

$$g(t) \xrightarrow{K_I(f(t)dt\wedge\bullet)} \int_0^t f(\tilde t) g(\tilde t) d\tilde t - t \int_0^1 f(\tilde t) g(\tilde t) d\tilde t = \int_0^1 d\tilde t \cdot (\theta(t-\tilde t) - t) f(\tilde t) g(\tilde t)$$
$$\Rightarrow \mathrm{Str}_{\Omega^\bullet_0(I)} K_I(f(t)dt \wedge \bullet) = \int_0^1 (\theta(0) - t) f(t) dt$$

Выбирая симметричную регуляризацию функции Хэвисайда $\theta(0) = \frac{1}{2}$, получаем (333). Во-вторых, можно вывести (333) косвенно, с помощью следующего аргумента. Рассмотрим другой супер-след

$$\mathrm{Str}_{\Omega^\bullet_0(I)} \mathcal{P}''_I(h(t) \wedge \bullet)$$

С одной стороны, он вычисляется с помощью (332) как

$$\mathrm{Str}_{\Omega^\bullet_0(I)} \mathcal{P}''_I(h(t) \wedge \bullet) = \mathrm{Str}_{\Omega^\bullet_0(I)} h(t) \wedge \bullet - \mathrm{Str}_{\Omega^\bullet_0(I)} \mathcal{P}'_I(h(t) \wedge \bullet) = \mathrm{Str}_{\Omega^\bullet_0(I)} h(t) \wedge \bullet + \int_0^1 h(t) dt$$

$$= -\frac{h(0)+h(1)}{2} + \int_0^1 h(t)dt \quad (334)$$

(мы вычислили супер-след, содержащий проектор $\mathcal{P}'_I$ непосредственно, как супер-след по одномерному пространству инфракрасных форм на отрезке с нулевым граничным условием $\Omega_0'^{\bullet}(I) = \Omega'^1(I) = \mathbb{R}dt$). С другой стороны

$$\mathrm{Str}_{\Omega_0^\bullet(I)}\mathcal{P}''_I(h(t)\wedge\bullet) = \mathrm{Str}_{\Omega_0^\bullet(I)}(dK_I + K_I d)(h(t)\wedge\bullet)$$
$$= \mathrm{Str}_{\Omega_0^\bullet(I)}(dK_I(h(t)\wedge\bullet) + K_I((dh(t))\wedge\bullet) + K_I(h(t)\wedge d\bullet))$$
$$= \mathrm{Str}_{\Omega_0^\bullet(I)}(dK_I(h(t)\wedge\bullet) + K_I((dh(t))\wedge\bullet) - dK_I(h(t)\wedge\bullet)) = \mathrm{Str}_{\Omega_0^\bullet(I)}K_I((dh(t))\wedge\bullet) \quad (335)$$

где мы пользуемся определяющим свойством цепной гомотопии $dK_I + K_I d = \mathcal{P}''_I$, тождеством Лейбница и циклическим свойством супер-следа. Сравнивая (335) с (334), получаем

$$\mathrm{Str}_{\Omega_0^\bullet(I)}K_I((dh(t))\wedge\bullet) = -\frac{h(0)+h(1)}{2} + \int_0^1 h(t)dt$$

Подставляя $h(t) = \int_0^t f(\tilde{t})d\tilde{t}$, получаем отсюда (333) интегрированием по частям.

Ещё одно полезное свойство:

$$\mathrm{Str}_{\Omega_0^\bullet(I)}\mathcal{P}'_I\mathcal{O}_1\mathcal{P}'_I\mathcal{O}_2\cdots\mathcal{P}'_I\mathcal{O}_n = -\left(\int_0^1 \mathcal{O}_1\circ dt\right)\cdots\left(\int_0^1 \mathcal{O}_n\circ dt\right)$$

для набора операторов $\mathcal{O}_1,\ldots,\mathcal{O}_n : \Omega_0^\bullet(I)\to\Omega_0^\bullet(I)$,— вытекает из того, что вклад в этот супер-след даёт только диагональный матричный элемент для dt и из явного выражения для проектора

$$\mathcal{P}'(f(t)dt) = dt\int_0^1 f(\tilde{t})d\tilde{t}$$

Продемонстрируем теперь вычисление значений $C^{\lambda_1,\psi_1;\lambda_2,\psi_2}_{I,(*(*\bullet))}$ для нескольких примеров пар граней отрезка.

$$C^{\lambda_1,\psi_1;\lambda_2,\psi_2}_{I,(*(*\bullet))}(0,0) = \mathrm{Str}_{\Omega_0^\bullet(I)}(\lambda_1\cdot\mathrm{id} + (1-\lambda_1)\mathcal{P}'_I)\circ\big(\chi_0\wedge(\lambda_2\cdot\mathrm{id}+(1-\lambda_2)\mathcal{P}'_I)\circ(\chi_0\wedge\bullet)\big)$$
$$= \mathrm{Str}_{\Omega_0^\bullet(I)}(\lambda_1\lambda_2\chi_0\chi_0\wedge\bullet + \lambda_1(1-\lambda_2)\chi_0\wedge\mathcal{P}'_I(\chi_0\wedge\bullet)+$$
$$+(1-\lambda_1)\lambda_2\mathcal{P}'_I(\chi_0\chi_0\wedge\bullet) + (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\mathcal{P}'_I(\chi_0\wedge\mathcal{P}'_I(\chi_0\wedge\bullet)))$$
$$= \lambda_1\lambda_2\cdot\mathrm{Str}_{\Omega_0^\bullet(I)}\chi_0\chi_0\wedge\bullet + (\lambda_1(1-\lambda_2)+(1-\lambda_1)\lambda_2)\cdot\mathrm{Str}_{\Omega_0^\bullet(I)}\mathcal{P}'_I(\chi_0\chi_0\wedge\bullet)+$$
$$+(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\cdot\mathrm{Str}_{\Omega_0^\bullet(I)}\mathcal{P}'_I(\chi_0\wedge\mathcal{P}'_I(\chi_0\wedge\bullet))$$
$$= -\frac{1}{2}\lambda_1\lambda_2 - \frac{1}{3}(\lambda_1(1-\lambda_2)+(1-\lambda_1)\lambda_2) - \frac{1}{4}(1-\lambda_1)(1-\lambda_2) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{12}\lambda_1 - \frac{1}{12}\lambda_2 - \frac{1}{12}\lambda_1\lambda_2,$$
$$C^{\lambda_1,\psi_1;\lambda_2,\psi_2}_{I,(*(*\bullet))}(0,1) = \mathrm{Str}_{\Omega_0^\bullet(I)}(\lambda_1\cdot\mathrm{id} + (1-\lambda_1)\mathcal{P}'_I)\circ\big(\chi_0\wedge(\lambda_2\cdot\mathrm{id}+(1-\lambda_2)\mathcal{P}'_I)\circ(\chi_1\wedge\bullet)\big)$$
$$= \mathrm{Str}_{\Omega_0^\bullet(I)}(\lambda_1\lambda_2\chi_0\chi_1\wedge\bullet + \lambda_1(1-\lambda_2)\chi_0\wedge\mathcal{P}'_I(\chi_1\wedge\bullet)+$$

$$+ (1-\lambda_1)\lambda_2\mathcal{P}'_I(\chi_0\chi_1\wedge\bullet) + (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\mathcal{P}'_I(\chi_0\wedge\mathcal{P}'_I(\chi_1\wedge\bullet)))$$

$$= 0\cdot\lambda_1\lambda_2 - \frac{1}{6}\lambda_1(1-\lambda_2) - \frac{1}{6}(1-\lambda_1)\lambda_2 - \frac{1}{4}(1-\lambda_1)(1-\lambda_2) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\lambda_1 + \frac{1}{12}\lambda_2 + \frac{1}{12}\lambda_1\lambda_2,$$

$$C^{\lambda_1,\psi_1;\lambda_2,\psi_2}_{I,(*(*\bullet))}(I,0) = \mathrm{Str}_{\Omega^\bullet_0(I)}(\lambda_1\cdot\mathrm{id}+(1-\lambda_1)\mathcal{P}'_I+\psi_1K_I)\circ\big(\chi_I\wedge(\lambda_2\cdot\mathrm{id}+(1-\lambda_2)\mathcal{P}'_I+\psi_2K_I)\circ(\chi_0\wedge\bullet)\big)$$

$$= \mathrm{Str}_{\Omega^\bullet_0(I)}\big((\lambda_1\cdot\mathrm{id}+(1-\lambda_1)\mathcal{P}'_I)\circ(\chi_I\wedge\psi_2K_I\circ(\chi_0\wedge\bullet))+$$

$$+\psi_1K_I\circ\big(\chi_I\wedge(\lambda_2\cdot\mathrm{id}+(1-\lambda_2)\mathcal{P}'_I)\circ(\chi_0\wedge\bullet)\big)\big)$$

$$= \mathrm{Str}_{\Omega^\bullet_0(I)}\big(-\lambda_1\psi_2\cdot\chi_I\wedge K_I(\chi_0\wedge\bullet) - (1-\lambda_1)\psi_2\cdot\mathcal{P}'_I(\chi_I\wedge K_I(\chi_0\wedge\bullet))+$$

$$+\psi_1\lambda_2\cdot K_I(\chi_I\chi_0\wedge\bullet) + \psi_1(1-\lambda_2)\cdot K_I(\chi_I\wedge\mathcal{P}'_I(\chi_0\wedge\bullet))\big)$$

$$= \mathrm{Str}_{\Omega^\bullet_0(I)}\big((\lambda_1\psi_2+\psi_1\lambda_2)\cdot K_I(\chi_0\chi_I\wedge\bullet) - (1-\lambda_1)\psi_2\cdot\mathcal{P}'_I(\chi_I\wedge K_I(\chi_0\wedge\bullet))+$$

$$+\psi_1(1-\lambda_2)\cdot\mathcal{P}'_I(\chi_0\wedge K_I(\chi_I\wedge\bullet))\big)$$

$$= (\lambda_1\psi_2+\psi_1\lambda_2)\cdot\int_0^1(\frac{1}{2}-t)(1-t)dt + (1-\lambda_1)\psi_2\cdot\int_0^1 dt\; K_I((1-t)dt) + \psi_1(1-\lambda_2)\cdot 0$$

$$= \frac{1}{12}(\lambda_1\psi_2+\psi_1\lambda_2) + \frac{1}{12}(1-\lambda_1)\psi_2 = \frac{1}{12}\psi_2 + \frac{1}{12}\psi_1\lambda_2,$$

$$C^{\lambda_1,\psi_1;\lambda_2,\psi_2}_{I,(*(*\bullet))}(I,I) = \mathrm{Str}_{\Omega^\bullet_0(I)}\psi_1K_I(\chi_I\wedge\psi_2K_I(\chi_I\wedge\bullet)) = \psi_1\psi_2\mathrm{Str}_{\Omega^\bullet_0(I)}K_I(\chi_I\wedge K_I(\chi_I\wedge\bullet))$$

$$= \psi_1\psi_2\cdot\int_0^1 dt\int_0^1 d\tilde{t}\;(\theta(t-\tilde{t})-t)(\theta(\tilde{t}-t)-\tilde{t}) = -\frac{1}{12}\psi_1\psi_2$$

Используя симметрию отрезка и циклическое свойство супер-следа, получаем из этих четырёх все оставшиеся значения $C^{\lambda_1,\psi_1;\lambda_2,\psi_2}_{I,(*(*\bullet))}$. Результат:

$$\begin{aligned}
C^{\lambda_1,\psi_1;\lambda_2,\psi_2}_{I,(*(*\bullet))}(0,0) = C^{\lambda_1,\psi_1;\lambda_2,\psi_2}_{I,(*(*\bullet))}(1,1) &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{12}\lambda_1 - \frac{1}{12}\lambda_2 - \frac{1}{12}\lambda_1\lambda_2,\\
C^{\lambda_1,\psi_1;\lambda_2,\psi_2}_{I,(*(*\bullet))}(0,1) = C^{\lambda_1,\psi_1;\lambda_2,\psi_2}_{I,(*(*\bullet))}(1,0) &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\lambda_1 + \frac{1}{12}\lambda_2 + \frac{1}{12}\lambda_1\lambda_2,\\
C^{\lambda_1,\psi_1;\lambda_2,\psi_2}_{I,(*(*\bullet))}(I,0) = -C^{\lambda_1,\psi_1;\lambda_2,\psi_2}_{I,(*(*\bullet))}(I,1) &= \frac{1}{12}\psi_2 + \frac{1}{12}\psi_1\lambda_2,\\
C^{\lambda_1,\psi_1;\lambda_2,\psi_2}_{I,(*(*\bullet))}(0,I) = -C^{\lambda_1,\psi_1;\lambda_2,\psi_2}_{I,(*(*\bullet))}(1,I) &= \frac{1}{12}\psi_1 + \frac{1}{12}\lambda_1\psi_2,\\
C^{\lambda_1,\psi_1;\lambda_2,\psi_2}_{I,(*(*\bullet))}(I,I) &= -\frac{1}{12}\psi_1\psi_2
\end{aligned} \tag{336}$$

Далее, для общей однопетлевой фейнмановской диаграммы L происходит всё то же самое:

$$C_{I^D,L}(\zeta_1,\ldots,\zeta_{|L|})$$

$$= (-1)^{|L|}\mathrm{Loop}_{L;\frac{\partial}{\partial\psi_k}\int_0^1 d\lambda_k(K_I^{\lambda_k,\psi_k})^{\otimes D}(\bullet\wedge\bullet);(\Omega^\bullet_0(I))^{\otimes D}}(\chi_{\zeta_1^1}\otimes\cdots\otimes\chi_{\zeta_1^D},\ldots,\chi_{\zeta_{|L|}^1}\otimes\cdots\otimes\chi_{\zeta_{|L|}^D})$$

$$= \hat{\epsilon}_{I^D,L}(\zeta_1,\ldots,\zeta_{|L|})\frac{\partial}{\partial\psi_{|L|}}\cdots\frac{\partial}{\partial\psi_1}\int_0^1 d\lambda_1\cdots\int_0^1 d\lambda_{|L|}\prod_{i=1}^D C^{\lambda_1,\psi_1;\cdots;\lambda_{|L|},\psi_{|L|}}_{I,L}(\zeta_1^i,\ldots,\zeta_{|L|}^i)$$

где знак $\hat{\epsilon}_{I^D,L}(\zeta_1,\ldots,\zeta_{|L|}) = \pm 1$ происходит из протаскивания производных $\frac{\partial}{\partial\psi_k}$ налево и перетасовки тензорного произведения, и содержит знак $(-1)^{|L|}$. Например:

$$\hat{\epsilon}_{I^D,(*(*\bullet))}(\zeta_1,\zeta_2) = (-1)^{|\zeta_1|+1}(-1)^{\sum_{1\le j<i\le D}|\zeta_1^i|\cdot|\zeta_2^j|}$$

Множители $C_{I,L}^{\lambda_1,\psi_1;\cdots;\lambda_{|L|},\psi_{|L|}}(\zeta_1^i,\ldots,\zeta_{|L|}^i)$, на которые факторизуется $C_{I^D,L}(\zeta_1,\ldots,\zeta_{|L|})$, зависят только от однопетлевой диаграммы L и набора $|L|$ граней отрезка и являются функциями $|L|$ пар вспомогательных переменных $\lambda_1,\psi_1,\cdots,\lambda_{|L|},\psi_{|L|}$, которые мы расставляем на внутренних рёбрах L:

$$C_{I,L}^{\lambda_1,\psi_1;\cdots;\lambda_{|L|},\psi_{|L|}}(\zeta_1^i,\ldots,\zeta_{|L|}^i) = \mathrm{Loop}_{L;K_I^{\lambda_k,\psi_k}(\bullet\wedge\bullet);\Omega_0^\bullet(I)}(\chi_{\zeta_1^i},\ldots,\chi_{\zeta_{|L|}^i})$$

Для всякой заданной диаграммы L значения $C_{I,L}^{\{\lambda_k,\psi_k\}}$ вычисляются перебором всех вариантов наборов $|L|$ граней отрезка.

Резюмируем рассуждения этого раздела.

Теорема 11 (Факторизация фейнмановских диаграмм для укороченного клеточного BF-действия для куба)**.** *Укороченное клеточное BF-действие для D-куба представляется в виде суммы по фейнмановским диаграммам:*

$$\begin{aligned}
&\bar{S}_{I^D} = \\
&= \sum_{T\in\mathbf{T}_{\mathrm{nonPl}}}\frac{1}{|\mathrm{Aut}(T)|}\sum_{\zeta_1,\ldots,\zeta_{|T|}\subset I^D}\epsilon_T(|\zeta_1|,\ldots,|\zeta_{|T|}|)\cdot C_{I^D,T}(\zeta_1,\ldots,\zeta_{|T|})\cdot \\
&\cdot < p_{I^D}, \mathrm{Iter}_{T;[\bullet,\bullet];[\bullet,\bullet]}(\omega^{\zeta_1},\ldots,\omega^{\zeta_{|T|}}) >_{\mathfrak{g}} - \\
&-\hbar\sum_{L\in\mathbf{L}_{\mathrm{nonPl}}}\frac{1}{|\mathrm{Aut}(L)|}\sum_{\zeta_1,\ldots,\zeta_{|L|}\subset I^D}\epsilon_L(|\zeta_1|,\ldots,|\zeta_{|L|}|)\cdot C_{I^D,L}(\zeta_1,\ldots,\zeta_{|L|})\cdot\mathrm{Loop}_{L;[\bullet,\bullet];\mathfrak{g}}(\omega^{\zeta_1},\ldots,\omega^{\zeta_{|L|}})
\end{aligned}$$

При этом де рамовская часть вклада дерева $(*)$ есть $C_{I^D,(*)}(\zeta_1) = d_{\zeta_1}^{I^D}$ — структурные константы дифференциала на клеточных коцепях на I^D (328), а де рамовские части всех остальных диаграмм факторизуются:

$$\begin{aligned}
&C_{I^D,T}(\zeta_1,\ldots,\zeta_{|T|}) \\
&= \hat{\epsilon}_{I^D,T}(\zeta_1,\ldots,\zeta_{|T|})\frac{\partial}{\partial\psi_{|T|-2}}\cdots\frac{\partial}{\partial\psi_1}\int_0^1 d\lambda_1\cdots\int_0^1 d\lambda_{|T|-2}\prod_{i=1}^D C_{I,T}^{\lambda_1,\psi_1;\cdots;\lambda_{|T|-2},\psi_{|T|-2}}(\zeta_1^i,\ldots,\zeta_{|T|}^i),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{I^D,L}(\zeta_1,\ldots,\zeta_{|L|}) = \hat{\epsilon}_{I^D,L}(\zeta_1,\ldots,\zeta_{|L|})\frac{\partial}{\partial\psi_{|L|}}\cdots\frac{\partial}{\partial\psi_1}\int_0^1 d\lambda_1\cdots\int_0^1 d\lambda_{|L|}\cdot \\
\cdot\prod_{i=1}^D C_{I,L}^{\lambda_1,\psi_1;\cdots;\lambda_{|L|},\psi_{|L|}}(\zeta_1^i,\ldots,\zeta_{|L|}^i)
\end{aligned}$$

где множители $C_{I,T}^{\lambda_1,\psi_1;\cdots;\lambda_{|T|-2},\psi_{|T|-2}}$, $C_{I,L}^{\lambda_1,\psi_1;\cdots;\lambda_{|L|},\psi_{|L|}}$ *зависят от фейнмановской диаграммы* Γ*, набора граней на отрезке (которые расставляются на листьях* Γ*), и вспомогательных переменных* (λ_k, ψ_k) *(которые расставляются на внутренних рёбрах* Γ*), причём переменные* ψ_k *полагаются нечётными. Фейнмановские правила для них таковы: на внутренних вершинах вычисляется внешнее произведение форм* $\bullet \wedge \bullet$*, на ребре с номером* k *вычисляется пропагатор*

$$K_I^{\lambda_k,\psi_k} = \mathcal{P}'_I + \lambda_k \mathcal{P}''_I + \psi_k K_I$$

где $\mathcal{P}'_I : f + gdt \mapsto (1-t)f(0) + tf(1) + dt(\int_0^1 g(\tilde{t})d\tilde{t})$, $\mathcal{P}''_I = \mathrm{id} - \mathcal{P}'_I$ *и* $K_I : f + gdt \mapsto \int_0^t g(\tilde{t})d\tilde{t} - t\int_0^1 g(\tilde{t})d\tilde{t}$ *— стандартные проекторы и стандартная цепная гомотопия для отрезка; на листе с номером* j *ставится форма Уитни на отрезке* $\chi_{\zeta_j^i}$*, в корне дерева вычисляется спаривание с фундаметральным классом отрезка, для однопетлевой диаграммы вычисляется супер-след по пространству* $\Omega_0^\bullet(I)$ *дифференциальных форм на отрезке, обращающихся в 0 на концах. То есть,*

$$\begin{aligned} C_{I,T}^{\lambda_1,\psi_1;\cdots;\lambda_{|T|-2},\psi_{|T|-2}}(\zeta_1^i,\ldots,\zeta_{|T|}^i) &= \int_I \mathrm{Iter}_{T;K_I^{\lambda_k,\psi_k}(\bullet\wedge\bullet);(\bullet\wedge\bullet)}(\chi_{\zeta_1^i},\ldots,\chi_{\zeta_{|T|}^i}) \\ C_{I,L}^{\lambda_1,\psi_1;\cdots;\lambda_{|L|},\psi_{|L|}}(\zeta_1^i,\ldots,\zeta_{|L|}^i) &= \mathrm{Loop}_{L;K_I^{\lambda_k,\psi_k}(\bullet\wedge\bullet);\Omega_0^\bullet(I)}(\chi_{\zeta_1^i},\ldots,\chi_{\zeta_{|L|}^i}) \end{aligned}$$

Знаки $\epsilon_\Gamma = \pm 1$ *зависят только от размерностей граней* $\zeta_1,\ldots,\zeta_{|\Gamma|}$ *и происходят из протаскивания координат на пространстве полей* ω^{ζ_j} *направо. Знаки* $\hat{\epsilon}_{I^D,\Gamma} = \pm 1$ *зависят от вложения граней в куб* I^D *и происходят из перетасовки тензорного произведения, протаскивания производных по вспомогательным переменным* $\frac{\partial}{\partial \psi_k}$ *налево, и ключают дополнительно знак* -1 *на каждое внутреннее ребро* Γ*.*

В частности, начало пертурбативного разложения $\bar{S}_{I^D}$ *имеет вид*

$$\begin{aligned} \bar{S}_{I^D} = &\sum_{\zeta_1\subset I^D:\,|\zeta_1|=D-1} d_{\zeta_1}^{I^D} < p_{I^D}, \omega^{\zeta_1} >_{\mathfrak{g}} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\zeta_1,\zeta_2\subset I^D:\,|\zeta_1|+|\zeta_2|=D} (-1)^{(|\zeta_1|+1)\cdot|\zeta_2|} (-1)^{\sum_{1\le j<i\le D}|\zeta_1^i|\cdot|\zeta_2^j|} \cdot \\ &\cdot \left(\prod_{i=1}^D C_{I,(**)}(\zeta_1^i,\zeta_2^i) \right) < p_{I^D}, [\omega^{\zeta_1},\omega^{\zeta_2}] >_{\mathfrak{g}} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3\subset I^D:\,|\zeta_1|+|\zeta_2|+|\zeta_3|=D+1} (-1)^{(|\zeta_1|+1)\cdot(|\zeta_2|+|\zeta_3|+1)+(|\zeta_2|+1)\cdot|\zeta_3|} \cdot \\ &\cdot (-1)^{1+|\zeta_1|+D+\sum_{1\le j<i\le D}(|\zeta_1^i|\cdot|\zeta_2^j|+|\zeta_1^i|\cdot|\zeta_3^j|+|\zeta_2^i|\cdot|\zeta_3^j|)} \cdot \\ &\cdot \left(\frac{\partial}{\partial\psi} \int_0^1 d\lambda \prod_{i=1}^D C_{I,(*(**))}^{\lambda,\psi}(\zeta_1^i,\zeta_2^i,\zeta_3^i) \right) < p_{I^D}, [\omega^{\zeta_1},[\omega^{\zeta_2},\omega^{\zeta_3}]] >_{\mathfrak{g}} - \end{aligned}$$

$$-\hbar\,\frac{1}{2}\sum_{\zeta_1,\zeta_2\subset I^D;\,|\zeta_1|+|\zeta_2|=2}(-1)^{(|\zeta_1|+1)\cdot(|\zeta_2|+1)}(-1)^{1+|\zeta_1|+\sum_{1\le j<i\le D}|\zeta_1^i|\cdot|\zeta_2^j|}\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{\partial}{\partial\psi_2}\frac{\partial}{\partial\psi_1}\int_0^1 d\lambda_1\int_0^1 d\lambda_2\prod_{i=1}^D C_{I,(*(*\bullet))}^{\lambda_1,\psi_1;\lambda_2,\psi_2}(\zeta_1^i,\zeta_2^i)\right)\mathrm{tr}_g(\mathrm{ad}_{\omega^{\zeta_1}}\mathrm{ad}_{\omega^{\zeta_2}})+O(p\omega^4+\hbar\omega^3)$$

Значения множителей $C_{I,(**)}$, $C_{I,(*(**))}^{\lambda,\psi}$, $C_{I,(*(*\bullet))}^{\lambda_1,\psi_1;\lambda_2,\psi_2}$ вычислены в (329,330,336).

Пользуясь этим результатом, для наглядности выпишем явно (со взятыми производными и интегралами по вспомогательным параметрам λ,ψ) пертурбативный ответ для квадрата I^2:

$$\begin{aligned}
\bar{S}_{I^2} =&< p_{II},(\omega^{I0}+\omega^{1I}-\omega^{I1}-\omega^{0I})+\\
&+\frac{1}{4}([\omega^{I0},\omega^{0I}]+[\omega^{I0},\omega^{1I}]+[\omega^{I1},\omega^{0I}]+[\omega^{I1},\omega^{1I}])+\frac{1}{4}[\omega^{00}+\omega^{01}+\omega^{10}+\omega^{11},\omega^{II}]+\\
&+\frac{7}{288}([\omega^{I0},[\omega^{I0},\omega^{0I}-\omega^{1I}]]+[\omega^{I1},[\omega^{I1},\omega^{0I}-\omega^{1I}]]+[\omega^{0I},[\omega^{0I},\omega^{I0}-\omega^{I1}]]+[\omega^{1I},[\omega^{1I},\omega^{I0}-\omega^{I1}]])+\\
&+\frac{5}{288}([\omega^{I0},[\omega^{I1},\omega^{0I}-\omega^{1I}]]+[\omega^{I1},[\omega^{I0},\omega^{0I}-\omega^{1I}]]+[\omega^{0I},[\omega^{1I},\omega^{I0}-\omega^{I1}]]+[\omega^{1I},[\omega^{0I},\omega^{I0}-\omega^{I1}]])+\\
&+\frac{5}{144}([\omega^{II},[\omega^{I0},\omega^{00}-\omega^{10}]]+[\omega^{II},[\omega^{I1},\omega^{01}-\omega^{11}]]+[\omega^{II},[\omega^{0I},\omega^{01}-\omega^{00}]]+[\omega^{II},[\omega^{1I},\omega^{11}-\omega^{10}]])+\\
&+\frac{1}{144}([\omega^{II},[\omega^{I0},\omega^{01}-\omega^{11}]]+[\omega^{II},[\omega^{I1},\omega^{00}-\omega^{10}]]+[\omega^{II},[\omega^{0I},\omega^{11}-\omega^{10}]]+[\omega^{II},[\omega^{1I},\omega^{01}-\omega^{00}]])+\\
&+\frac{7}{288}([\omega^{I0},[\omega^{II},\omega^{00}-\omega^{10}]]+[\omega^{I1},[\omega^{II},\omega^{01}-\omega^{11}]]+[\omega^{0I},[\omega^{II},\omega^{01}-\omega^{00}]]+[\omega^{1I},[\omega^{II},\omega^{11}-\omega^{10}]])+\\
&+\frac{5}{288}([\omega^{I0},[\omega^{II},\omega^{01}-\omega^{11}]]+[\omega^{I1},[\omega^{II},\omega^{00}-\omega^{10}]]+[\omega^{0I},[\omega^{II},\omega^{11}-\omega^{10}]]+[\omega^{1I},[\omega^{II},\omega^{01}-\omega^{00}]])>_{\mathfrak{g}}+\\
&+\hbar\left(-\frac{17}{1152}(\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}_{\omega^{I0}}\mathrm{ad}_{\omega^{I0}})+\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}_{\omega^{I1}}\mathrm{ad}_{\omega^{I1}})+\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}_{\omega^{0I}}\mathrm{ad}_{\omega^{0I}})+\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}_{\omega^{1I}}\mathrm{ad}_{\omega^{1I}}))-\right.\\
&-\frac{7}{576}(\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}_{\omega^{I0}}\mathrm{ad}_{\omega^{I1}})+\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}_{\omega^{0I}}\mathrm{ad}_{\omega^{1I}}))+\\
&\left.+\frac{1}{192}(\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}_{\omega^{I0}}\mathrm{ad}_{\omega^{0I}})+\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}_{\omega^{I1}}\mathrm{ad}_{\omega^{1I}})-\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}_{\omega^{I0}}\mathrm{ad}_{\omega^{1I}})-\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}_{\omega^{I1}}\mathrm{ad}_{\omega^{0I}}))\right)+O(p\omega^4+\hbar\omega^3)
\end{aligned}\tag{337}$$

Заметим, что для куба мы можем вычислять однопетлевые диаграммы явно, в любой размерности — для всякой данной диаграммы (но любой размерности куба) всё сводится к конечному вычислению на отрезке. Эта ситуация разительно отличается от случая симплекса (раздел 5.6), где мы можем проделать (исключительно громоздкие и поднимающие вопрос о регуляризации) явные вычисления супер-следов в младших размерностях, но в общей размерности можем только лишь косвенно восстанавливать некоторую часть однопетлевого ответа из древесных диаграмм с помощью мастер-уравнения. Также, продолжая сравнение вычислений для куба и для симплекса, мы должны сказать, что пертурбативный ответ для куба технически получается намного меньшими усилиями, чем аналогичный ответ для симплекса (благодаря более удобному выражению для цепной гомотопии), однако конечные ответы для куба более громоздки (ср. (337) и (316)), поскольку число комбинаторных типов наборов n граней куба (т.е. наборы $\zeta_1, \ldots, \zeta_n \subset I^D$ по модулю диагонального действия группы симметрии куба $S_D \ltimes \mathbb{Z}_2^D$) растёт с n быстрее, чем число комбинаторных типов наборов n граней симплекса (наборов $\sigma_1, \cdots, \sigma_n \subset \Delta^D$ по модулю диагонального действия S_{D+1}).

Для некоторых приложений удобна следующая модификация описанного в этом разделе формализма: использовать для коцепей на D-кубе не базис граней $\{e_0, e_1, e_I\}^D$, а собственный базис $\mathbb{Z}_2^D$-симметрии, имеющий вид $\{e_+, e_-, e_I\}^D$, где

$$e_+ = e_0 + e_1, \quad e_- = \frac{1}{2}(e_1 - e_0), \quad e_I = e_I \tag{338}$$

Утверждение Теоремы 11 при этом остаётся справедливым, где мы теперь разрешаем индексам ζ^i пробегать не $\{0, 1, I\}$ (множество, индексирующее грани отрезка), а $\{+, -, I\}$ (множество, индексирующее $\mathbb{Z}_2$-симметричные комбинации граней). Соответствующие линейные комбинации форм Уитни на отрезке есть

$$\chi_+ = \chi_0 + \chi_1 = 1,\ \chi_- = \frac{1}{2}(\chi_1 - \chi_0) = t - \frac{1}{2},\ \chi_I = dt$$

Значения множителей $C_{I,(**)}$, $C^{\lambda,\psi}_{I,(*(**))}$, $C^{\lambda_1,\psi_1;\lambda_2,\psi_2}_{I,(*(*\bullet))}$, на которые факторизуются фейнмановские диаграммы для $\bar{S}_{I^D}$, в симметричном базисе коцепей получаются из значений в базисе граней (329,330,336) вычислением симметричных линейных комбинаций:

$$C_{I,(**)}(I,+) = C_{I,(**)}(+,I) = 1;$$
$$C^{\lambda,\psi}_{I,(*(**))}(I,+,+) = C^{\lambda,\psi}_{I,(*(**))}(+,+,I) = C^{\lambda,\psi}_{I,(*(**))}(+,I,+) = 1, \qquad C^{\lambda,\psi}_{I,(*(**))}(I,-,-) = \frac{1}{4} - \frac{1}{6}\lambda,$$
$$C^{\lambda,\psi}_{I,(*(**))}(-,-,I) = C^{\lambda,\psi}_{I,(*(**))}(-,I,-) = \frac{1}{12}\lambda, \qquad C^{\lambda,\psi}_{I,(*(**))}(I,I,-) = C^{\lambda,\psi}_{I,(*(**))}(I,-,I) = -\frac{1}{12}\psi;$$
$$C^{\lambda_1,\psi_1;\lambda_2,\psi_2}_{I,(*(*\bullet))}(+,+) = -1, \qquad C^{\lambda_1,\psi_1;\lambda_2,\psi_2}_{I,(*(*\bullet))}(-,-) = -\frac{1}{12}\lambda_1 - \frac{1}{12}\lambda_2 - \frac{1}{12}\lambda_1\lambda_2,$$
$$C^{\lambda_1,\psi_1;\lambda_2,\psi_2}_{I,(*(*\bullet))}(I,-) = -\frac{1}{12}\psi_2 - \frac{1}{12}\psi_1\lambda_2, \qquad C^{\lambda_1,\psi_1;\lambda_2,\psi_2}_{I,(*(*\bullet))}(-,I) = -\frac{1}{12}\psi_1 - \frac{1}{12}\lambda_1\psi_2,$$
$$C^{\lambda_1,\psi_1;\lambda_2,\psi_2}_{I,(*(*\bullet))}(I,I) = -\frac{1}{12}\psi_1\psi_2$$

(все остальные значения $C_{I,(**)}$, $C^{\lambda,\psi}_{I,(*(**))}$, $C^{\lambda_1,\psi_1;\lambda_2,\psi_2}_{I,(*(*\bullet))}$ — нулевые). В базисе $\{+, -, I\}$ результат для отрезка (Теорема 8) записывается как

$$\bar{S}_I = \left\langle p_I, \omega^- + [\omega^I, \omega^+] + \left(\frac{\mathrm{ad}_{\omega^I}}{2} \coth \frac{\mathrm{ad}_{\omega^I}}{2}\right) \circ \omega^- \right\rangle_{\mathfrak{g}} + \hbar\, \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}} \log \left(\frac{\sinh \frac{\mathrm{ad}_{\omega^I}}{2}}{\frac{\mathrm{ad}_{\omega^I}}{2}}\right)$$

где поля $\omega^+, \omega^-, \omega^I$ связаны с полями для базиса граней как $\omega^+ = \frac{1}{2}(\omega^0 + \omega^1)$, $\omega^- = \omega^1 - \omega^0$, $\omega^I = \omega^I$ (т.е. двойственным к (338) преобразованием). Пертурбативный ответ для квадрата (337) в базисе $\{+, -, I\} \times \{+, -, I\}$ принимает вид

$$\begin{aligned}\bar{S}_{I^2} =&< p_{II}, \omega^{-I} - \omega^{I-} + [\omega^{I+}, \omega^{+I}] + [\omega^{++}, \omega^{II}] - \\ &- \frac{1}{12}[\omega^{I+}, [\omega^{I+}, \omega^{-I}]] - \frac{1}{12}[\omega^{+I}, [\omega^{+I}, \omega^{I-}]] - \frac{1}{288}[\omega^{-I} - \omega^{I-}, [\omega^{-I}, \omega^{I-}]] - \\ &- \frac{1}{12}[\omega^{II}, [\omega^{I+}, \omega^{-+}]] + \frac{1}{12}[\omega^{II}, [\omega^{+I}, \omega^{+-}]] + \frac{1}{72}[\omega^{II}, [\omega^{-I} - \omega^{I-}, \omega^{--}]] - \\ &- \frac{1}{12}[\omega^{I+}, [\omega^{II}, \omega^{-+}]] + \frac{1}{12}[\omega^{+I}, [\omega^{II}, \omega^{+-}]] + \frac{1}{288}[\omega^{-I} - \omega^{I-}, [\omega^{II}, \omega^{--}]] >_{\mathfrak{g}} + \\ &+\hbar\left(-\frac{1}{24}\mathrm{tr}_g(\mathrm{ad}_{\omega^{I+}}\mathrm{ad}_{\omega^{I+}}) - \frac{1}{24}\mathrm{tr}_g(\mathrm{ad}_{\omega^{+I}}\mathrm{ad}_{\omega^{+I}}) - \frac{5}{1152}\mathrm{tr}_g(\mathrm{ad}_{\omega^{I-}}\mathrm{ad}_{\omega^{I-}}) - \frac{5}{1152}\mathrm{tr}_g(\mathrm{ad}_{\omega^{-I}}\mathrm{ad}_{\omega^{-I}}) \right. \\ &\left. + \frac{1}{192}\mathrm{tr}_g(\mathrm{ad}_{\omega^{I-}}\mathrm{ad}_{\omega^{-I}})\right) + O(p\omega^4 + \hbar\omega^3)\end{aligned}$$

где $\omega^{++} = \frac{1}{4}(\omega^{00} + \omega^{01} + \omega^{10} + \omega^{11})$, $\omega^{+-} = \frac{1}{2}(-\omega^{00} + \omega^{01} - \omega^{10} + \omega^{11})$, $\omega^{-+} = \frac{1}{2}(-\omega^{00} - \omega^{01} + \omega^{10} + \omega^{11})$, $\omega^{--} = \omega^{00} - \omega^{01} - \omega^{10} + \omega^{11}$, $\omega^{+I} = \frac{1}{2}(\omega^{0I} + \omega^{1I})$, $\omega^{I+} = \frac{1}{2}(\omega^{I0} + \omega^{I1})$, $\omega^{-I} = \omega^{1I} - \omega^{0I}$, $\omega^{I-} = \omega^{I1} - \omega^{I0}$, $\omega^{II} = \omega^{II}$.

Следует отметить, что, хотя в симметричном базисе на коцепях куба выражения для $\bar{S}_{I^D}$ выглядят менее громоздко, этот базис, в отличие от базиса граней, хуже приспособлен для склеивания клеточного действия на кубическом комплексе (именно, в базисе граней при приклеивании грани ζ к грани ζ', мы просто отождествляем ω^{ζ} и $\omega^{\zeta'}$, в то время как в базисе $\{+,-,I\}$ мы должны накладывать более сложные соотношения).

6.4. **Примеры точно вычислимого клеточного BF-действия: тор, цилиндр, бутылка Клейна.**

6.4.1. *Тор $\mathbb{T}^2$ в симметричной калибровке.* Уже в размерности $D = 2$, мы не можем написать точную формулу для клеточного действия на квадрате, и можем лишь предъявить пертурбативный результат. Однако, оказывается, что для тора $\mathbb{T}^2 = \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1$, получающегося прилеиванием в квадрате $I \times I$ ребра $I1$ к $I0$ и ребра $1I$ к $0I$, для написания склеенного действия достаточно знать только некоторую часть клеточного действия для квадрата S_{I^2} (т.е. ограничение на коцепной комплекс тора, вложенный в коцепной комплекс квадрата, согласно общей конструкции раздела 5.4), вычислимую точно.

Базисные коцепи на торе $\mathbb{T}^2$ для стандартного (кубического) клеточного разбиения, состоящего из одной 0-клетки $(++)$, двух 1-клеток $(+I$ и $I+)$ и одной 2-клетки (II), будем обозначать $e_{++}, e_{+I}, e_{I+}, e_{II} \in C^\bullet(\mathbb{T}^2)$, и вложение $C^\bullet(\mathbb{T}^2) \hookrightarrow C^\bullet(I^2)$ устроено как

$$e_{++} = e_{00} + e_{01} + e_{10} + e_{11},\ e_{+I} = e_{0I} + e_{1I},\ e_{I+} = e_{I0} + e_{I1},\ e_{II} = e_{II}$$

Соответсвующие формы Уитни в координатах t_1, t_2 на квадрате имеют вид

$$\chi_{++} = 1,\ \chi_{+I} = dt_2,\ \chi_{I+} = dt_1,\ \chi_{II} = dt_1 dt_2$$

И их линейная оболочка $\mathbb{R}\chi_{++} \oplus \mathbb{R}\chi_{+I} \oplus \mathbb{R}\chi_{I+} \oplus \mathbb{R}\chi_{II} \subset \Omega^\bullet(\mathbb{T}^2) \subset \Omega^\bullet(I^2)$ есть периодическая часть комплекса Уитни для квадрата, и, что для нас очень важно, замкнута относительно внешнего умножения, а также обладает нулевым дифференциалом. Мы хотим вычислить клеточное BF-действие на торе:

$$S_{\mathbb{T}^2} = \sum_{T \in \mathbf{T}_{\mathrm{nonPl}}} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(T)|} \cdot$$
$$\cdot \sum_{\zeta,\zeta_1,\ldots,\zeta_{|T|} \in \{++,+I,I+,II\}} < p_\zeta, \int_\zeta \mathrm{Iter}_{T;-K_{I^2}[\bullet,\bullet];[\bullet,\bullet]}(\chi_{\zeta_1}\omega^{\zeta_1},\ldots,\chi_{\zeta_{|T|}}\omega^{\zeta_{|T|}}) >_{\mathfrak{g}} -$$
$$-\hbar \sum_{L \in \mathbf{L}_{\mathrm{nonPl}}} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(L)|} \sum_{\zeta_1,\ldots,\zeta_{|L|} \in \{++,+I,I+,II\}} \mathrm{Loop}_{L;-K_{I^2}[\bullet,\bullet];\Omega^\bullet(\mathbb{T}^2,\mathfrak{g})}(\chi_{\zeta_1}\omega^{\zeta_1},\ldots,\chi_{\zeta_{|L|}}\omega^{\zeta_{|L|}})$$

При этом супер-следы вычисляются по пространству $\Omega^\bullet(\mathbb{T}^2,\mathfrak{g})$ форм на торе (периодических форм на квадрате), без условия равенства нулю на границе квадрата, в отличие от случая укороченного клеточного действия $\bar{S}_{I^2}$. Заметим, что из-за того, что пространство инфракрасных форм в данном случае замкнуто относительно умножения, любая фейнманавская диаграмма, содержащая хотя бы одно внутреннее ребро вне цикла однопетлевой диаграммы, не даёт вклада (так K_{I^2} на инфракрасных формах есть ноль). Поэтому остаётся только одно фейнмановское дерево $(**)$ (дерево $(*)$ не даёт вклада, поскольку дифференциал на инфракрасных формах нулевой) и только однопетлевые графы вида $(*(*\bullet))$, $(*(*(*\bullet)))$, $(*(*(*(*\bullet))))$, $\ldots$ ("колёса"). Поэтому древесная часть $S_{\mathbb{T}^2}$ вычисляется элементарно:

$$\begin{aligned} S^0_{\mathbb{T}^2} &= \frac{1}{2} \sum_{\zeta,\zeta_1,\zeta_2 \in \{++,+I,I+,II\}} < p_\zeta, \int_\zeta [\chi_{\zeta_1}\omega^{\zeta_1}, \chi_{\zeta_2}\omega^{\zeta_2}] >_{\mathfrak{g}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\zeta,\zeta_1,\zeta_2 \in \{++,+I,I+,II\}} (-1)^{(|\zeta_1|+1)\cdot|\zeta_2|} < p_\zeta, [\omega^{\zeta_1},\omega^{\zeta_2}] >_{\mathfrak{g}} \int_\zeta \chi_{\zeta_1} \wedge \chi_{\zeta_2} \\ &= \frac{1}{2} < p_{++}, [\omega^{++},\omega^{++}] >_{\mathfrak{g}} + < p_{I+}, [\omega^{I+},\omega^{++}] >_{\mathfrak{g}} + < p_{+I}, [\omega^{+I},\omega^{++}] >_{\mathfrak{g}} + \\ &\quad + < p_{II}, [\omega^{I+},\omega^{+I}] + [\omega^{II},\omega^{++}] >_{\mathfrak{g}} \end{aligned} \tag{339}$$

Перейдём теперь к однопетлевой части. Сперва сделаем такое наблюдение: чтобы супер-след

$$W(\zeta_1,\ldots,\zeta_n) = \mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(\mathbb{T}^2)} \prod_{i=1}^{n} (K_{I^2}(\chi_{\zeta_i} \wedge \bullet))$$

был отличен от нуля, необходимо, чтобы все грани $\zeta_1,\ldots,\zeta_{|L|}$ были одномерны. В самом деле, оператор, от которого вычисляется супер-след, должен быть сохраняющим степень формы, поэтому сумма степение входящих форм есть число листьев $|\zeta_1|+\cdots+|\zeta_{|L|}| = |L|$. Поэтому, если не все $|\zeta_i| = 1$, то есть минимум одна грань размерности 0, то есть $\zeta_i = ++$ для какого-то i. Поскольку $\chi_{++} = 1$ и $(K_{I^2})^2 = 0$, такой супер-след равен нулю. Поэтому

$S^1_{\mathbb{T}^2}$ представляется в виде

$$S^1_{\mathbb{T}^2} = -\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n} \sum_{\zeta_1,\ldots,\zeta_n \in \{I+,+I\}} \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}_{\omega^{\zeta_1}} \cdots \mathrm{ad}_{\omega^{\zeta_n}}) \cdot \mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(\mathbb{T}^2)} \prod_{i=1}^{n} (K_{I^2}(\chi_{\zeta_i} \wedge \bullet))$$

Для вычисления супер-следов $\mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(\mathbb{T}^2)} \prod_{i=1}^{n} (K_{I^2}(\chi_{\zeta_i} \wedge \bullet))$ мы пользуемся факторизацией пространства дифференциальных форм на торе $\Omega^\bullet(\mathbb{T}^2) = \Omega^\bullet(\mathcal{S}^1) \otimes \Omega^\bullet(\mathcal{S}^1)$, факторизацией кубических форм Уитни и представлением для цепной гомотопии

$$K_{I^2} = K_I \otimes \frac{\mathrm{id} + \mathcal{P}'_I}{2} + \frac{\mathrm{id} + \mathcal{P}'_I}{2} \otimes K_I$$

(мы не вводим здесь формализма вспомогательных переменных λ, ψ из раздела 6.3). Введём обозначения

$$K_1 = K_I \otimes \frac{\mathrm{id} + \mathcal{P}'_I}{2}, \quad K_2 = \frac{\mathrm{id} + \mathcal{P}'_I}{2} \otimes K_I$$

В случае $\zeta_1 = \zeta_2 = \cdots = \zeta_n = I+$, супер-след W есть

$$\begin{aligned} W(I+,\ldots,I+) = \\ &= \mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(\mathcal{S}^1)\otimes\Omega^\bullet(\mathcal{S}^1)}\left((K_1 + K_2)(\chi_{I+} \wedge \bullet)\right)^n \\ &= \mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(\mathcal{S}^1)\otimes\Omega^\bullet(\mathcal{S}^1)}\left(K_1(\chi_{I+} \wedge \bullet)\right)^n = \mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(\mathcal{S}^1)}(K_I(\chi_I \wedge \bullet))^n \cdot \mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(\mathcal{S}^1)}\left(\frac{\mathrm{id} + \mathcal{P}'_I}{2}(\chi_0 \wedge \bullet)\right)^n \\ &= \mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(\mathcal{S}^1)}(K_I(\chi_I \wedge \bullet))^n \cdot \mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(\mathcal{S}^1)}\left(\mathcal{P}'_I + \frac{1}{2}\mathcal{P}''_I\right)^n = \mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(\mathcal{S}^1)}(K_I(\chi_I \wedge \bullet))^n \cdot \mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(\mathcal{S}^1)}\left(\mathcal{P}'_I + \frac{1}{2^n}\mathcal{P}''_I\right) \\ &= \mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(\mathcal{S}^1)}(K_I(\chi_I \wedge \bullet))^n \cdot \left(\chi(\Omega'^\bullet(\mathcal{S}^1)) + \frac{1}{2^n}\chi(\Omega''^\bullet(\mathcal{S}^1))\right) = 0 \end{aligned}$$

где мы пользуемся тем, что супер-след проектора на подпространство есть эйлерова характеристика подпространства и тем, что эйлеровы характеристики пространств инфракрасных и ультрафиолетовых форм на окружности равны 0: для инфракрасных форм, поскольку эйлерова характеристика окружности равна 0, для ультрофиолетовых — поскольку по конструкции стягиваемый подкомплекс всегда ацикличен. Также мы пользуемся тем, что в выражении для цепной гомотопии $K_I \otimes \frac{\mathrm{id}+\mathcal{P}'_I}{2} + \frac{\mathrm{id}+\mathcal{P}'_I}{2} \otimes K_I$ для этого супер-следа достаточно учитывать только первое слагаемое, поскольку обе компоненты, на которые факторизуется оператор $(K_{I^2}(\chi_{I+} \wedge \bullet))^n$ должны иметь степень 0. Аналогичное рассуждение показывает, что для случая $\zeta_1 = \zeta_2 = \cdots = \zeta_n = +I$ супер-след также есть ноль.

В случае, когда не все $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ совпадают, пользуясь циклическим свойством следа, мы представляем супер-след в виде

$$W(\underbrace{+I,\ldots,+I}_{b_m}, \underbrace{I+,\ldots,I+}_{a_m}, \quad \ldots, \quad \underbrace{+I,\ldots,+I}_{b_1}, \underbrace{I+,\ldots,I+}_{a_1}) =$$

$$= \mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(\mathbb{T}^2)}(K_{I^2}(\chi_{+I}\wedge\bullet))^{b_m}(K_{I^2}(\chi_{I+}\wedge\bullet))^{a_m}\cdots(K_{I^2}(\chi_{+I}\wedge\bullet))^{b_1}(K_{I^2}(\chi_{I+}\wedge\bullet))^{a_1}$$

для некоторых $m\geq 1$ и $a_i, b_i \geq 1$ для $i=1,\ldots,m$. Из подсчёта степеней форм следует

$$\chi_{I+}\wedge(K_{I^2}(\chi_{I+}\wedge\bullet))^{a-1} = \chi_{I+}\wedge(K_1(\chi_{I+}\wedge\bullet))^{a-1}$$

$$\chi_{+I}\wedge(K_{I^2}(\chi_{+I}\wedge\bullet))^{b-1} = \chi_{+I}\wedge(K_2(\chi_{+I}\wedge\bullet))^{b-1}$$

Поэтому

$$W(\underbrace{+I,\ldots,+I}_{b_m},\underbrace{I+,\ldots,I+}_{a_m},\quad\ldots,\quad\underbrace{+I,\ldots,+I}_{b_1},\underbrace{I+,\ldots,I+}_{a_1}) =$$
$$= \mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(\mathbb{T}^2)} K_{I^2}\wedge\chi_{+I}\wedge(K_2(\chi_{+I}\wedge\bullet))^{b_m-1}\, K_{I^2}\wedge\chi_{I+}\wedge(K_1(\chi_{I+}\wedge\bullet))^{a_m-1}\cdots$$
$$\cdots K_{I^2}\wedge\chi_{+I}\wedge(K_2(\chi_{+I}\wedge\bullet))^{b_1-1}\, K_{I^2}\wedge\chi_{I+}\wedge(K_1(\chi_{I+}\wedge\bullet))^{a_1-1} \quad (340)$$

Теперь заметим, что

$$K_1\wedge\chi_{+I}\wedge(K_2(\chi_{+I}\wedge\bullet))^{b-1}\, K_1 = 0$$

поскольку в первом факторе $\Omega^\bullet(\mathcal{S}^1)\otimes\Omega^\bullet(\mathcal{S}^1)$ возникает либо структура $(K_I)^2$, либо структура $K_I\mathcal{P}'_I$. Точно также

$$K_2\wedge\chi_{I+}\wedge(K_1(\chi_{I+}\wedge\bullet))^{a-1}\, K_2 = 0$$

— здесь во втором факторе $\Omega^\bullet(\mathcal{S}^1)\otimes\Omega^\bullet(\mathcal{S}^1)$ возникает $(K_I)^2$ или $K_I\mathcal{P}'_I$. Отсюда для (340) вытекает

$$W(\underbrace{+I,\ldots,+I}_{b_m},\underbrace{I+,\ldots,I+}_{a_m},\quad\ldots,\quad\underbrace{+I,\ldots,+I}_{b_1},\underbrace{I+,\ldots,I+}_{a_1}) =$$
$$= \mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(\mathbb{T}^2)} K_2\wedge\chi_{+I}\wedge(K_2(\chi_{+I}\wedge\bullet))^{b_m-1}\, K_1\wedge\chi_{I+}\wedge(K_1(\chi_{I+}\wedge\bullet))^{a_m-1}\cdots$$
$$\cdots K_2\wedge\chi_{+I}\wedge(K_2(\chi_{+I}\wedge\bullet))^{b_1-1}\, K_1\wedge\chi_{I+}\wedge(K_1(\chi_{I+}\wedge\bullet))^{a_1-1} +$$
$$+ \mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(\mathbb{T}^2)} K_1\wedge\chi_{+I}\wedge(K_2(\chi_{+I}\wedge\bullet))^{b_m-1}\, K_2\wedge\chi_{I+}\wedge(K_1(\chi_{I+}\wedge\bullet))^{a_m-1}\cdots$$
$$\cdots K_1\wedge\chi_{+I}\wedge(K_2(\chi_{+I}\wedge\bullet))^{b_1-1}\, K_2\wedge\chi_{I+}\wedge(K_1(\chi_{I+}\wedge\bullet))^{a_1-1} =$$
$$= 2\mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(\mathbb{T}^2)}\,(K_2(\chi_{+I}\wedge\bullet))^{b_m}\,(K_1(\chi_{I+}\wedge\bullet))^{a_m}\cdots(K_2(\chi_{+I}\wedge\bullet))^{b_1}\,(K_1(\chi_{I+}\wedge\bullet))^{a_1} =$$
$$= 2\,\mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(\mathcal{S}^1)}\left(\frac{\mathrm{id}+\mathcal{P}'_I}{2}(\chi_+\wedge\bullet)\right)^{b_m}(K_I(\chi_I\wedge\bullet))^{a_m}\cdots\left(\frac{\mathrm{id}+\mathcal{P}'_I}{2}(\chi_+\wedge\bullet)\right)^{b_1}(K_I(\chi_I\wedge\bullet))^{a_1}\cdot$$
$$\cdot\,\mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(\mathcal{S}^1)}\,(K_I(\chi_I\wedge\bullet))^{b_m}\left(\frac{\mathrm{id}+\mathcal{P}'_I}{2}(\chi_+\wedge\bullet)\right)^{a_m}\cdots(K_I(\chi_I\wedge\bullet))^{b_1}\left(\frac{\mathrm{id}+\mathcal{P}'_I}{2}(\chi_+\wedge\bullet)\right)^{a_1} =$$
$$= 2\,\frac{1}{2^{b_1+\cdots+b_m}}\,\mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(\mathcal{S}^1)}\,(K_I(\chi_I\wedge\bullet))^{a_1+\cdots+a_m}\cdot\frac{1}{2^{a_1+\cdots+a_m}}\,\mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(\mathcal{S}^1)}\,(K_I(\chi_I\wedge\bullet))^{b_1+\cdots+b_m}$$

Комбинаторный множитель 2 возник как число допустимых раскрасок фейнмановской диаграммы частями цепной гомотопии K_1, K_2. Оставшиеся супер-следы вычисляются с помощью (259) (разница между $\Omega^\bullet(\mathcal{S}^1)$ и $\Omega^\bullet(\Delta^1)$ здесь не играет роли, поскольку вклад в след дают только ультрафиолетовые формы, и $\Omega''^\bullet(\mathcal{S}^1) = \Omega''^\bullet(\Delta^1)$). В случае $n = 1$, $a_1 = 1$ или $n = 1$, $b_1 = 1$ супер-след равен нулю вследствие (333). Поэтому

$$W(\underbrace{+I,\ldots,+I}_{b_m},\underbrace{I+,\ldots,I+}_{a_m},\quad\ldots,\quad\underbrace{+I,\ldots,+I}_{b_1},\underbrace{I+,\ldots,I+}_{a_1}) =$$

$$= 2\,\frac{1}{2^{a_1+\cdots+a_m+b_1+\cdots+b_m}}\,\frac{\bar{B}_{a_1+\cdots+a_m}}{(a_1+\cdots+a_m)!}\,\frac{\bar{B}_{b_1+\cdots+b_m}}{(b_1+\cdots+b_m)!}$$

где мы ввели обозначение

$$\bar{B}_k = B_k - \delta_{0,k} + \frac{1}{2}\delta_{1,k} = \begin{cases} B_k, & \text{при } k \geq 2, \\ 0, & \text{при } k = 0,1 \end{cases}$$

Или иначе: для набора 1-клеток тора $\zeta_1,\ldots,\zeta_n \in \{I+,+I\}$ супер-след W принимает значение

$$W(\zeta_1,\ldots,\zeta_n) = \frac{2}{2^n}\,\frac{\bar{B}_{\sharp\{i:\,\zeta_i=I+\}}}{(\sharp\{i:\,\zeta_i=I+\})!}\,\frac{\bar{B}_{\sharp\{i:\,\zeta_i=+I\}}}{(\sharp\{i:\,\zeta_i=+I\})!}$$

Заметим, что благодаря тому, что мы положили $\bar{B}_0 = 0$, эта формула учитывает разобранный выше случай, когда все ζ_i совпадают.

Тем самым, для однопетлевой части действия для тора мы получили явный ответ:

$$S^1_{\mathbb{T}^2} = -2\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^n}\sum_{\zeta_1,\ldots,\zeta_n\in\{I+,+I\}}\frac{\bar{B}_{\sharp\{i:\,\zeta_i=I+\}}}{(\sharp\{i:\,\zeta_i=I+\})!}\,\frac{\bar{B}_{\sharp\{i:\,\zeta_i=+I\}}}{(\sharp\{i:\,\zeta_i=+I\})!}\,\mathrm{tr}_g(\mathrm{ad}_{\omega^{\zeta_1}}\cdots\mathrm{ad}_{\omega^{\zeta_n}})$$

(мы не выписываем знак $(-1)^n$, поскольку всё равно вклад дают только чётные n, и пользуемся тем, что члены с $n < 4$ раны нулю). Другая форма ответа получается выделением групп идущих подряд одинаковых 1-клеток и использованием циклического свойства следа:

$$S^1_{\mathbb{T}^2} = -2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_{a_1,b_1,\ldots,a_m,b_m\geq 1}\frac{1}{2^{a_1+\cdots+a_m+b_1+\cdots+b_m}}\,\frac{\bar{B}_{a_1+\cdots+a_m}}{(a_1+\cdots+a_m)!}\,\frac{\bar{B}_{b_1+\cdots+b_m}}{(b_1+\cdots+b_m)!}\cdot$$
$$\cdot\,\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\left((\mathrm{ad}_{\omega^{+I}})^{b_m}(\mathrm{ad}_{\omega^{I+}})^{a_m}\cdots(\mathrm{ad}_{\omega^{+I}})^{b_1}(\mathrm{ad}_{\omega^{I+}})^{a_1}\right)$$

Ещё одна форма ответа — в терминах производящих функций: воспользуемся тем, что

$$\frac{\bar{B}_k}{k!} = \frac{1}{2\pi i}\oint\frac{dz}{z}\left(\frac{z}{2}\coth\frac{z}{2} - 1\right)z^{-k}$$

— интеграл по контуру, обходящему вокруг нуля против часовой стрелки на комплексной плоскости $z \in \mathbb{C}$ (не содержащему других полюсов подынтегрального выражения). Поэтому можем записать $S^1_{\mathbb{T}^2}$ в элегантном виде

$$S^1_{\mathbb{T}^2} = 2\oint\frac{dz_1}{2\pi i z_1}\left(\frac{z_1}{2}\coth\frac{z_1}{2} - 1\right)\oint\frac{dz_2}{2\pi i z_2}\left(\frac{z_2}{2}\coth\frac{z_2}{2} - 1\right)\cdot\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\log\left(1 - \frac{1}{2}z_1^{-1}\mathrm{ad}_{\omega^{I+}} - \frac{1}{2}z_2^{-1}\mathrm{ad}_{\omega^{+I}}\right) \tag{341}$$

6.4.2. *Тор $\mathbb{T}^D$ в асимметричной калибровке.* Вычисление, приведшее нас к результату (339,341), было основано на использовании $S_2 \ltimes (\mathbb{Z}_2)^2$-симметричного пропагатора (цепной гомотопии) для квадрата

$$K_{I^2} = K_I^{\otimes_{\mathrm{sym}} 2} = K_I \otimes \frac{\mathrm{id} + \mathcal{P}_I'}{2} + \frac{\mathrm{id} + \mathcal{P}_I'}{2} \otimes K_I$$

Оказывается, если использовать асимметричный пропагатор

$$K_{I^2,L} = K_I \otimes \mathrm{id} + \mathcal{P}_I' \otimes K_I$$

или

$$K_{I^2,R} = \mathrm{id} \otimes K_I + K_I \otimes \mathcal{P}_I'$$

ответ становится гораздо проще. Выберем, например, пропагатор $K_{I^2,L}$ (случай $K_{I^2,R}$ совершенно аналогичен). Рассуждение о виде дающих вклад фейнмановских диаграмм (только дерево (∗∗) и “колёса”) никак не меняется, и поэтому древесная часть действия совпадает с (339) — в её вычислении пропагатор вообще не возникает.

Чтобы вычислить супер-след

$$W_L(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = \mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(\mathbb{T}^2)} \prod_{i=1}^{n} \left(K_{I^2,L}(\chi_{\zeta_i} \wedge \bullet)\right)$$

(т.е. де рамовскую часть значения “колеса”) воспользуемся следующим наблюдением.

Лемма 7. *Пусть $\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \bar{\zeta}_1, \ldots, \bar{\zeta}_n \in \{+, I\}$ — два набора клеток стандартного клеточного разбиения окружности $\mathcal{S}^1$. И обозначим $\Phi_I = K_I$, $\Phi_+ = \mathcal{P}_I'$. Тогда*

$$\mathrm{Str}_{\Omega^\bullet \mathcal{S}^1} \prod_{i=1}^{n} \Phi_{\bar{\zeta}_i}(\chi_{\zeta_i} \wedge \bullet) = \begin{cases} -\frac{\bar{B}_n}{n!}, & \textit{если } \bar{\zeta}_1 = \cdots = \bar{\zeta}_n = \zeta_1 = \cdots = \zeta_n = I, \\ 0, & \textit{в противном случае} \end{cases}$$

Доказательство. Случай $\bar{\zeta}_1 = \cdots = \bar{\zeta}_n = \zeta_1 = \cdots = \zeta_n = I$ сводится к Лемме 4. В противном случае под супер-следом стоит одна из структур

$$\chi_I \mathcal{P}_I' \chi_+ \mathcal{P}_I' \chi_+ \cdots \mathcal{P}_I' \chi_+ \mathcal{P}_I' \chi_I = 0$$

$$K_I \chi_+ K_I = 0$$

$$\mathcal{P}_I' \chi_+ K_I = 0$$

$$K_I \mathcal{P}_I' \chi_+ \mathcal{P}_I' \chi_+ \cdots \mathcal{P}_I' \chi_+ \mathcal{P}_I' \chi_I = 0$$

или есть ещё возможность $\bar{\zeta}_1 = \cdots = \bar{\zeta}_n = \zeta_1 = \cdots = \zeta_n = +$, и тогда

$$\mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(\mathcal{S}^1)}(\mathcal{P}_I'(\chi_+ \wedge \bullet))^n = \mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(\mathcal{S}^1)} \mathcal{P}_I' = \chi(\mathcal{S}^1) = 0$$

□

Согласно этой лемме, если рассмотреть супер-след, возникающий в W_L на первой окружности, W_L может быть отлично от нуля только для последовательности одинаковых 1-клеток $\zeta_1 = \cdots = \zeta_n = I+$, но тогда

$$W_L(I+, \ldots, I+) = \mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(\mathcal{S}^1)}(K_I(\chi_I \wedge \bullet))^n \cdot \mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(\mathcal{S}^1)}(\chi_+)^n = 0$$

поскольку второй супер-след здесь есть эйлерова характеристика окружности. Поэтому однопетлевая часть действия на торе для пропагатора $K_{I^2,L}$ есть

$$S^1_{\mathbb{T}^2;K_{I^2,L}} = 0$$

и точно так же, для пропагатора $K_{I^2,R}$

$$S^1_{\mathbb{T}^2;K_{I^2,R}} = 0$$

(мы включили пропагатор в обозначение для эффективного действия). Выбор конкретного представления для цепной гомотопии есть выбор калибровки (лагранжева подмногообразия) для БВ-интеграла, определяющего эффективное действие BF-теории. Поэтому, согласно общей теории (Утверждение 9), действие (339,341) и действие с нулевой однопетлевой частью должны быть эквивалентны (т.е. отличаться на специальное каноническое преобразование).

Последнее рассуждение (для асимметричной цепной гомотопии) можно обобщить на случай тора старшей размерности $\mathbb{T}^D = \underbrace{\mathcal{S}^1 \times \cdots \times \mathcal{S}^1}_{D}$, склеенного из куба I^D отождествлением противоположных граней коразмерности 1. Базис в пространстве клеточных коцепей $C^\bullet(\mathbb{T}^D)$ есть $\{e_+, e_I\}^{\times D}$ и вложение в коцепи куба $C^\bullet(I^D)$ получается как тензорная степень вложения коцепей окружности в коцепи отрезка как $\epsilon_+ = e_0 + e_1$, $e_I = e_I$. Далее, базисные коцепи для тора вкладываются в дифференциальные формы на торе как координатные формы $e_{\zeta^0 \ldots \zeta^D} \mapsto \chi_{\zeta^0 \ldots \zeta^D}$, где $\zeta^i \in \{+, I\}$, поэтому инфракрасные формы образуют подалгебру с нулевым дифференциалом в $\Omega^\bullet(\mathbb{T}^D)$, и поэтому, как и для $D = 2$, вклад в $S_{\mathbb{T}^D}$ даёт только дерево $(**)$ и однопетлевые диаграммы типа $(*(*\cdots(*\bullet)\cdots))$. Древесная часть не зависит от выбора цепной гомотопии и имеет вид

$$\begin{aligned} S^0_{\mathbb{T}^D} = \frac{1}{2} \sum_{\zeta,\zeta_1,\zeta_2 \in \{+,I\}^D} &< p_\zeta, \int_\zeta [\chi_{\zeta_1}\omega^{\zeta_1}, \chi_{\zeta_2}\omega^{\zeta^2}] >_g \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\zeta,\zeta_1,\zeta_2 \in \{+,I\}^D} (-1)^{(|\zeta_1|+1)\cdot|\zeta_2|} < p_\zeta, [\omega^{\zeta_1}, \omega^{\zeta_2}] >_{\mathfrak{g}} \int_\zeta \chi_{\zeta_1} \wedge \chi_{\zeta_2} \\ &\qquad = \frac{1}{2} \sum_{\zeta,\zeta_1,\zeta_2 \in \{+,I\}^D} (-1)^{(|\zeta_1|+1)\cdot|\zeta_2|} c^\zeta_{\zeta_1,\zeta_2} < p_\zeta, [\omega^{\zeta_1}, \omega^{\zeta_2}] >_{\mathfrak{g}} \end{aligned}$$

где мы использовали обозначение $c^{\zeta}_{\zeta_1,\zeta_2}=\int_\zeta \chi_{\zeta_1}\wedge\chi_{\zeta_2}\in\{\pm1,0\}$ — комбинаторный множитель, принимающий значение ±1, если грань ζ есть произведение граней ζ_1 и ζ_2, и значение 0 в противном случае.

Далее, рассмотрим однопетлевую часть действия $S^1_{\mathbb{T}^D}$ для выбора асимметричной цепной гомотопии, которая последовательно стягивает в $\Omega^\bullet(\mathbb{T}^D)=\Omega^\bullet(\mathcal{S}^1)\otimes\cdots\otimes\Omega^\bullet(\mathcal{S}^1)$ сначала первый сомножитель, потом второй и т.д.:

$$K_{\mathbb{T}^D,1\cdots D}=K_I\otimes\underbrace{\mathrm{id}\otimes\cdots\otimes\mathrm{id}}_{D-1}+\mathcal{P}'_I\otimes K_I\otimes\underbrace{\mathrm{id}\otimes\cdots\otimes\mathrm{id}}_{D-2}+\ \cdots\ +\underbrace{\mathcal{P}'_I\otimes\cdots\otimes\mathcal{P}'_I}_{D-1}\otimes K_I$$

Согласно тому же аргументу, что и для $D=2$, вклад в однопетлевую часть действия могут давать только 1-коцепи. Поэтому

$$S^1_{\mathbb{T}^D;K_{\mathbb{T}^D,1\cdots D}}=-\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\sum_{\zeta_1,\ldots,\zeta_n\in\{I+\cdots+,\,\ldots,\,+\cdots+I\}}\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}_{\omega^{\zeta_1}}\cdots\mathrm{ad}_{\omega^{\zeta_n}})\cdot\mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(\mathbb{T}^D)}\prod_{i=1}^{D}(K_{\mathbb{T}^D,1\cdots D}(\chi_{\zeta_i}\wedge\bullet)) \tag{342}$$

Супер-след по $\Omega^\bullet(\mathbb{T}^D)$ факторизуется на супер-следы по $\Omega^\bullet(\mathcal{S}^1)$, причём для первой окружности рёбра диаграммы раскрашиваются либо оператором K_I, либо проектором $\mathcal{P}'_I$, а листья раскрашены периодическими формами Уитни $\chi_+=1,\ \chi_I=dt$. Такие диаграммы дают вклад только в случае, когда все листья раскрашены χ_I и все рёбра раскрашены K_I (Лемма 7). Поэтому в сумму по 1-клеткам в (342) может давать вклад только случай $\zeta_1=\cdots=\zeta_n=I+\cdots+$. Однако тогда супер-следы по остальным окружностям — нули

$$\mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(\mathbb{T}^D)}(K_{\mathbb{T}^D,1\cdots D}(\chi_{I+\cdots+}\wedge\bullet))^D=\mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(\mathcal{S}^1)}(K_I(\chi_I\wedge\bullet))^n\cdot\left(\mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(\mathcal{S}^1)}(\chi_+)^n\right)^{D-1}=0$$

Поэтому, так же, как и для $\mathbb{T}^2$ с асимметричным пропагатором, получаем

$$S^1_{\mathbb{T}^D;K_{\mathbb{T}^D,1\cdots D}}=0$$

Точно так же, для любой асимметричной цепной гомотопии, получаемой последовательным стягиванием сомножителей в $\Omega^\bullet(\mathbb{T}^D)=\Omega^\bullet(\mathcal{S}^1)\otimes\cdots\otimes\Omega^\bullet(\mathcal{S}^1)$ в порядке, задаваемом перестановкой π (319), получаем

$$S^1_{\mathbb{T}^D;K_{\mathbb{T}^D,\pi}}=0$$

6.4.3. *Каноническое преобразование, связывающее результаты для $S_{\mathbb{T}^2}$ в симметричной и асимметричной калибровках.* Используя Утверждение 6 и формулу (127), мы можем явно написать каноническое преобразование, связывающее результаты для 2-тора, вычисленные в симметричной калибровке $S_{\mathbb{T}^2,K_{I^2}}$ (с нетривиальной однопетлевой частью (341)) и в асимметричных калибровках $S_{\mathbb{T}^2,K_{I^2,L}},S_{\mathbb{T}^2,K_{I^2,R}}$ (с нулевой однопетлевой частью). Точнее, поскольку нам удобнее работать с инфинитезимальными каноническими преобразованиями, мы построим непрерывное семейство цепных гомотопий для тора K^ξ, где параметр $\xi \in [0,1]$, причём $K^0 = K_{I^2,L}$, $K^1 = K_{I^2,R}$ и $K^{1/2} = K_{I^2}$ (симметричная цепная гомотопия), и далее мы явно напишем генератор инфинитезимального канонического преобразования, переводящего действие $S_{\mathbb{T}^2,\xi}$, вычисленного с пропагатором K^ξ, в действие $S_{\mathbb{T}^2,\xi+\delta\xi}$, вычисленного с пропагатором $K^{\xi+\delta\xi}$ (где $\delta\xi$ — инфинитезимальный сдвиг параметра цепной гомотопии).

Зависящую от параметра цепную гомотопию K^ξ мы определим как линейную комбинацию

$$K^\xi = (1-\xi)K_{I^2,L} + \xi K_{I^2,R} = K_I \otimes ((1-\xi)\mathrm{id} + \xi\mathcal{P}'_I) + (\xi\ \mathrm{id} + (1-\xi)\mathcal{P}'_I) \otimes K_I$$

то, что это — действительно цепная гомотопия, проверяется так же, как для частного случая $\xi = 1/2$ (раздел 6.1). Заметим, мы никак не меняем вложение клеточных коцепей в дифференциальные формы и ретракцию фопм на коцепи. Таким образом, в терминологии доказательства Утверждения 4, при сдвиге $\xi \mapsto \xi + \delta\xi$ мы имеем дело с преобразованием данных индуцирования типа I.

Вычисление клеточного действия для тора с цепной гомотопией K^ξ абсолютно аналогично вычислению для симметричного случая $\xi = 1/2$ и даёт результат

$$S_{\mathbb{T}^2,\xi} = S^0_{\mathbb{T}^2} + \hbar S^1_{\mathbb{T}^2,\xi}$$

где древесная часть не зависит от ξ (из-за замкнутости инфракрасных форм относительно умножения, она не может зависеть от вида цепной гомотопии) и даётся выражением (339), а однопетлевая часть вычисляется аналогично (341) и имеет вид

$$S^1_{\mathbb{T}^2,\xi} = 2\oint \frac{dz_1}{2\pi i z_1}\left(\frac{z_1}{2}\coth\frac{z_1}{2} - 1\right)\oint \frac{dz_2}{2\pi i z_2}\left(\frac{z_2}{2}\coth\frac{z_2}{2} - 1\right)\cdot \mathrm{tr}_\mathfrak{g} \log\left(1 - (1-\xi)z_1^{-1}\mathrm{ad}_{\omega^{I+}} - \xi z_2^{-1}\mathrm{ad}_{\omega^{+I}}\right)$$

При сдвиге $\xi \mapsto \xi + \delta\xi$ цепная гомотопия деформируется как

$$K^\xi \mapsto K^{\xi+\delta\xi} = K^\xi + \delta\xi \cdot (\mathcal{P}''_I \otimes K_I - K_I \otimes \mathcal{P}''_I) = K^\xi + \delta K$$

Пертурбативное вычисление интеграла (127) для генератора R_ξ инфинитезимального канонического преобразования, переводящего $S_{\mathbb{T}^2,\xi}$ в $S_{\mathbb{T}^2,\xi+\delta\xi}$, приводит к тем же фейнмановским правилам, что и для вычисления эффективного действия, с одним отличием: теперь мы должны в каждой диаграмме отметить одно ребро и поставить на нём не $-K^\xi$, а выражение $-\delta K \cdot K^\xi$. Вследствие замкнутости инфракрасных форм для тора относительно умножения, вклад в R_ξ дадут только однопетлевые диаграммы типа $(*(*\cdots(*\bullet)\cdots))$, т.е. $R_\xi = \hbar R^1_\xi$, причём одно из рёбер раскрашено выражением

$$-\delta K \cdot K^\xi = \delta\xi \cdot K_I \otimes K_I$$

остальные рёбра раскрашиваются обычным пропагатором $-K_\xi$, один лист раскрашен формой $\chi_{II}\omega^{II}$, а все остальные — либо $\chi_{I+}\omega^{I+}$, либо $\chi_{+I}\omega^{+I}$ (последнее наблюдение следует из того, что оператор под супер-следом должен быть степени ноль, чтобы супер-след не равнялся нулю автоматически, и из того, что если раскрасить какой-нибудь лист выражением $\chi_{++}\omega^{++}$, оператор под супер-следом будет нулевой). Поэтому R^1_ξ представляется в виде

$$R^1_\xi\ \delta\xi = \mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(\mathbb{T}^2,\mathfrak{g})}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{\zeta_1,\ldots,\zeta_n\in\{+,I\}\times\{+,I\}} -\delta K\cdot K^\xi[\chi_{\zeta_1}\omega^{\zeta^1}, -K^\xi[\chi_{\zeta_2}\omega^{\zeta^2},\cdots -K^\xi[\chi_{\zeta_n}\omega^{\zeta^n},\bullet]\cdots]]$$

$$= \delta\xi\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\zeta_1,\ldots,\widehat{\zeta_k},\ldots,\zeta_n\in\{I+,+I\},\ \zeta_k=II}\mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(\mathbb{T}^2,\mathfrak{g})}K_I\otimes K_I[\chi_{\zeta_1}\omega^{\zeta^1}, K^\xi[\chi_{\zeta_2}\omega^{\zeta^2},\cdots K^\xi[\chi_{\zeta_n}\omega^{\zeta^n},\bullet]\cdots]]$$

$$= \delta\xi\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\zeta_1,\ldots,\widehat{\zeta_k},\ldots,\zeta_n\in\{I+,+I\},\ \zeta_k=II}\mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(\mathbb{T}^2)}\Big((K_I\otimes K_I)\chi_{\zeta_1}K^\xi\chi_{\zeta_2}\cdots K^\xi\chi_{\zeta_n}\wedge\bullet\Big)\cdot$$

$$\cdot\,\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}_{\omega^{\zeta_1}}\cdots\mathrm{ad}_{\omega^{\zeta_n}})$$

Заметим, что симметрийный коэффициент $\frac{1}{n}$, обычный для однопетлевых диаграмм для эффективного действия, здесь не возникает, так как отмеченное ребро на цикле убивает группу автоморфизмов графа. Далее, анализ возможных раскрасок рёбер частями цепной гомотопии

$$K^\xi_{I+} = K_I\otimes((1-\xi)\mathrm{id}+\xi\mathcal{P}'_I),\quad K^\xi_{+I} = (\xi\ \mathrm{id}+(1-\xi)\mathcal{P}'_I)\otimes K_I$$

показывает, что для каждой раскраски рёбер клетками тора $\zeta_1,\ldots,\widehat{\zeta_k}\ldots,\zeta_n\in\{I+,+I\},\ \zeta_k = II$ вклад даёт ровно одна раскраска рёбер:

$$R^1_\xi = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\zeta_1,\ldots,\widehat{\zeta_k},\ldots,\zeta_n\in\{I+,+I\},\ \zeta_k=II}\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}_{\omega^{\zeta_1}}\cdots\mathrm{ad}_{\omega^{\zeta_n}})\cdot$$

$$\cdot\,\mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(\mathbb{T}^2)}\Big((K_I\otimes K_I)\chi_{\zeta_1}K^\xi_{\zeta_1}\chi_{\zeta_2}K^\xi_{\zeta_2}\cdots\chi_{\zeta_{k-1}}K^\xi_{\zeta_{k-1}}\chi_{II}K^\xi_{\zeta_{k+1}}\chi_{\zeta_{k+1}}\cdots K^\xi_{\zeta_n}\chi_{\zeta_n}\wedge\bullet\Big)$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\zeta_1,\ldots,\widehat{\zeta_k},\ldots,\zeta_n\in\{I+,+I\},\ \zeta_k=II}\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}_{\omega^{\zeta_1}}\cdots\mathrm{ad}_{\omega^{\zeta_n}})\cdot$$

$$\cdot\,(1-\xi)^{\sharp\{i:\,\zeta_i=I+\}}\frac{\bar{B}_{\sharp\{i:\,\zeta_i=I+\}+1}}{(\sharp\{i:\ \zeta_i=I+\}+1)!}\cdot\xi^{\sharp\{i:\,\zeta_i=+I\}}\frac{\bar{B}_{\sharp\{i:\,\zeta_i=+I\}+1}}{(\sharp\{i:\ \zeta_i=+I\}+1)!}$$

Переписывая сумму с числами Бернулли через производящие функции, получаем для генератора канонического преобразования $S_{\mathbb{T}^2,\xi}\mapsto S_{\mathbb{T}^2,\xi+\delta\xi}$ следующее выражение:

$$R_\xi = \hbar R^1_\xi = -\hbar\,\frac{\partial}{\partial\vartheta}\oint\frac{dz_1}{2\pi i z_1}\Big(\frac{z_1}{2}\coth\frac{z_1}{2}-1\Big)\oint\frac{dz_2}{2\pi i z_2}\Big(\frac{z_2}{2}\coth\frac{z_2}{2}-1\Big)\cdot$$

$$\cdot\,\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(1-(1-\xi)z_1^{-1}\mathrm{ad}_{\omega^{I+}}-\xi z_2^{-1}\mathrm{ad}_{\omega^{+I}}-\vartheta z_1^{-1}z_2^{-1}\mathrm{ad}_{\omega^{II}})^{-1}$$

где ϑ — вспомогательная нечётная переменная.

Инфинитезимальное каноническое преобразование $S_{\mathbb{T}^2,\xi}\mapsto S_{\mathbb{T}^2,\xi+\delta\xi}$ имеет вид

$$S_{\mathbb{T}^2,\xi}\mapsto S_{\mathbb{T}^2,\xi+\delta\xi} = S_{\mathbb{T}^2,\xi}+\delta\xi\ \{S_{\mathbb{T}^2,\xi},R_\xi\}+\delta\xi\ \hbar\Delta R_\xi = S_{\mathbb{T}^2,\xi}+\delta\xi\ \hbar Q_{\mathbb{T}^2}R^1_\xi$$

где

$$Q_{\mathbb{T}^2} = \{S^0_{\mathbb{T}^2}, \bullet\} = -\frac{1}{2}\left\langle [\omega^{++}, \omega^{++}], \frac{\partial}{\partial \omega^{++}} \right\rangle_{\mathfrak{g}} + \left\langle [\omega^{I+}, \omega^{++}], \frac{\partial}{\partial \omega^{I+}} \right\rangle_{\mathfrak{g}} + \\ + \left\langle [\omega^{+I}, \omega^{++}], \frac{\partial}{\partial \omega^{+I}} \right\rangle_{\mathfrak{g}} - \left\langle [\omega^{I+}, \omega^{+I}] + [\omega^{II}, \omega^{++}], \frac{\partial}{\partial \omega^{II}} \right\rangle_{\mathfrak{g}}$$

— БРСТ-оператор, порождённый древесной частью клеточного действия для тора. Поскольку древесная часть $S_{\mathbb{T}^2,\xi}$, а значит, и БРСТ-оператор $Q_{\mathbb{T}^2}$, не зависит от ξ, мы можем легко проинтегрировать R_ξ до конечного канонического преобразования:

$$S_{\mathbb{T}^2,0} \mapsto S_{\mathbb{T}^2,\xi} = S_{\mathbb{T}^2,0} + Q_{\mathbb{T}^2} R_{0\to\xi}$$

с генератором

$$R_{0\to\xi} = \hbar \int_0^\xi R^1_{\xi'} d\xi'$$

В частности, при $\xi = 1/2$ получаем генератор канонического преобразования, связывающего $S_{\mathbb{T}^2,K_{I^2,L}}$ и $S_{\mathbb{T}^2,K_{I^2}}$:

$$R_{0\to 1/2} = -\hbar \frac{\partial}{\partial \vartheta} \int_0^{1/2} d\xi \oint \frac{dz_1}{2\pi i z_1}\left(\frac{z_1}{2}\coth\frac{z_1}{2} - 1\right) \oint \frac{dz_2}{2\pi i z_2}\left(\frac{z_2}{2}\coth\frac{z_2}{2} - 1\right) \cdot \\ \cdot \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}(1 - (1-\xi) z_1^{-1}\mathrm{ad}_{\omega^{I+}} - \xi z_2^{-1}\mathrm{ad}_{\omega^{+I}} - \vartheta z_1^{-1} z_2^{-1}\mathrm{ad}_{\omega^{II}})^{-1}$$

6.4.4. *Цилиндр $I\times\mathcal{S}^1$, толстый тор $I\times\mathbb{T}^D$.* Рассмотрим теперь цилиндр, получающийся из квадрата $I \times I$ приклеиванием стороны $I0$ к стороне $I1$. То есть, мы снабжаем цилиндр $I\times\mathcal{S}^1$ клеточным разбиением $\{0,1,I\}\times\{+,I\}$, с двумя 0-клетками $0+$, $1+$, тремя 1-клетками $0I$, $1I$, $I+$ и одной 2-клеткой II. Соответственно, пространство клеточных коцепей есть

$$C^\bullet(I\times\mathcal{S}^1) = C^\bullet(I)\otimes C^\bullet(\mathcal{S}^1) = (\mathbb{R}e_0\oplus\mathbb{R}e_1\oplus\mathbb{R}e_I)\otimes(\mathbb{R}e_+\oplus\mathbb{R}e_I) = \mathbb{R}e_{0+}\oplus\mathbb{R}e_{1+}\oplus\mathbb{R}e_{0I}\oplus\mathbb{R}e_{1I}\oplus\mathbb{R}e_{I+}\oplus\mathbb{R}e_{II}$$

Вложение коцепей в $\Omega^\bullet(I\times\mathcal{S}^1)$ устроено как

$$e_{0+}\mapsto\chi_{0+} = 1 - t_1,\ e_{1+}\mapsto\chi_{1+} = t_1,\ e_{0I}\mapsto\chi_{0I} = (1-t_1)dt_2, \\ e_{1I}\mapsto\chi_{1I} = t_1 dt_2,\ e_{I+}\mapsto\chi_{I+} = dt_1,\ e_{II}\mapsto\chi_{II} = dt_1 dt_2$$

Для вычисления эффективного действия на коцепях, используем для простоты асимметричную цепную гомотопию

$$K_{I^2,R} = \mathrm{id}\otimes K_I + K_I\otimes\mathcal{P}'_I$$

и будем анализировать диаграммы Фейнмана для $S_{I\times\mathcal{S}^1}$, с ребрами раскрашенными частями цепной гомотопии $\mathrm{id}\otimes K_I$ и $K_I\otimes\mathcal{P}'_I$. Сначала заметим, что, поскольку формы Уитни на окружности $\mathbb{R}\chi_+\oplus\mathbb{R}\chi_I$ замкнуты относительно умножения, диаграммы, в которых какое-нибудь внутреннее ребро (не находящееся в цикле однопетлевой диаграммы) раскрашено частью цепной гомотопии $\mathrm{id}\otimes K_I$, не дают вклада. Поэтому все внутренние рёбра вне цикла раскрашены $K_I\otimes\mathcal{P}'_I$. Таким образом возможные древесные диаграммы — только деревья вида $(*(*\cdots(**)\cdots))$ (“ветки”) — согласно тем же рассуждениям, что использовались при доказательстве Теоремы 8 для отрезка, причём для деревьев с ≥ 3 листьями в $S^0_{I\times\mathcal{S}^1}$ возможны только следующие структуры

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{n+1}S_{I\times\mathcal{S}^1,\underbrace{(*(*\cdots(**)\cdots))}_{n+1}}\\
&=<p_{I+},\int_{I+}[\chi_{I+}\omega^{I+},\bullet]\circ((K_I\otimes\mathcal{P}'_I)[\chi_{I+}\omega^{I+},\bullet])^{n-1}\circ(\chi_{1+}\omega^{1+}+\chi_{0+}\omega^{0+})>_{\mathfrak{g}}+\\
&+<p_{II},\int_{II}[\chi_{I+}\omega^{I+},\bullet]\circ((K_I\otimes\mathcal{P}'_I)[\chi_{I+}\omega^{I+},\bullet])^{n-1}\circ(\chi_{1I}\omega^{1I}+\chi_{0I}\omega^{0I})>_{\mathfrak{g}}+\\
&+<p_{II},\int_{II}[\chi_{II}\omega^{II},\bullet]\circ((K_I\otimes\mathcal{P}'_I)[\chi_{I+}\omega^{I+},\bullet])^{n-1}\circ(\chi_{1+}\omega^{1+}+\chi_{0+}\omega^{0+})>_{\mathfrak{g}}+\\
&+\sum_{k=2}^{n}<p_{II},\int_{II}[\chi_{I+}\omega^{I+},\bullet]\circ((K_I\otimes\mathcal{P}'_I)[\chi_{I+}\omega^{I+},\bullet])^{k-2}\circ(K_I\otimes\mathcal{P}'_I)[\chi_{II}\omega^{II},\bullet]\circ\\
&\qquad\circ((K_I\otimes\mathcal{P}'_I)[\chi_{I+}\omega^{I+},\bullet])^{n-k}\circ(\chi_{1+}\omega^{1+}+\chi_{0+}\omega^{0+})>_{\mathfrak{g}}
\end{aligned}
$$

для $n\geq 2$ (знак $(-1)^{n+1}$ учитывает, то, что мы ставим на ребрах $K_{I^2,R}$, а не $-K_{I^2,R}$). Таким образом, значения древесных диаграмм элементарно вычисляются с помощью факторизации и (258):

$$
\begin{aligned}
&S_{I\times\mathcal{S}^1,\underbrace{(*(*\cdots(**)\cdots))}_{n+1}}=\frac{B_n}{n!}<p_{I+},(\mathrm{ad}_{\omega^{I+}})^n\circ(\omega^{1+}-\omega^{0+})>_{\mathfrak{g}}+\\
&+\frac{B_n}{n!}<p_{II},(\mathrm{ad}_{\omega^{I+}})^n\circ(\omega^{1I}-\omega^{0I})+\sum_{k=1}^{n}(\mathrm{ad}_{\omega^{I+}})^{k-1}\mathrm{ad}_{\omega^{II}}(\mathrm{ad}_{\omega^{I+}})^{n-k}\circ(\omega^{1+}-\omega^{0+})>_{\mathfrak{g}}
\end{aligned}
$$

Оставшиеся древесные диаграммы $(*)$ и $(**)$ вычисляются отдельно:

$$S_{I\times\mathcal{S}^1,(*)}=<p_{I+},\omega^{1+}-\omega^{0+}>_{\mathfrak{g}}+<p_{II},\omega^{1I}-\omega^{0I}>_{\mathfrak{g}}$$

— производящая функция для дифференциала на клеточных коцепях на цилиндре,

$$
\begin{aligned}
&S_{I\times\mathcal{S}^1,(**)}=\frac{1}{2}<p_{0+},[\omega^{0+},\omega^{0+}]>_{\mathfrak{g}}+\frac{1}{2}<p_{1+},[\omega^{1+},\omega^{1+}]>_{\mathfrak{g}}+<p_{0I},[\omega^{0I},\omega^{0+}]>_{\mathfrak{g}}+\\
&+<p_{1I},[\omega^{1I},\omega^{1+}]>_{\mathfrak{g}}+\frac{1}{2}<p_{I+},[\omega^{I+},\omega^{0+}+\omega^{1+}]]>_{\mathfrak{g}}+\frac{1}{2}<p_{II},[\omega^{I+},\omega^{0I}+\omega^{1I}]+[\omega^{II},\omega^{0+}+\omega^{1+}]>_{\mathfrak{g}}
\end{aligned}
$$

— производящая функция для умножения коцепей (спроецированного умножения форм Уитни на цилиндре).

Далее, чтобы вычислить однопетлевую часть действия для цилиндра, воспользуемся представлением $S^1_{I\times\mathcal{S}^1}$ через L_∞-морфизм (166):

$$S^1_{I\times\mathcal{S}^1}=-\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\,\mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(I\times\mathcal{S}^1,\mathfrak{g})}\left(K_{I^2,R}[U_{I\times\mathcal{S}^1}(\omega),\bullet]\right)^n \qquad (343)$$

где L_∞-морфизм вычисляется совершенно аналогично древесной части действия (только теперь на корне диаграммы стоит не ретракция на коцепи, а обычный пропагатор $-K_{I^2,R}$):

$$\begin{gathered}U_{I\times\mathcal{S}^1}(\omega)=\chi_{0+}\omega^{0+}+\chi_{1+}\omega^{1+}+\chi_{0I}\omega^{0I}+\chi_{1I}\omega^{1I}+\chi_{I+}\omega^{I+}+\chi_{II}\omega^{II}+\\
+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m((K_I\otimes\mathcal{P}'_I)[\chi_{I+}\omega^{I+},\bullet])^m\circ(\chi_{1+}\omega^{1+}+\chi_{0+}\omega^{0+})+\\
+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m((K_I\otimes\mathcal{P}'_I)[\chi_{I+}\omega^{I+},\bullet])^m\circ(\chi_{1I}\omega^{1I}+\chi_{0I}\omega^{0I})+\\
+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\sum_{k=1}^{m}((K_I\otimes\mathcal{P}'_I)[\chi_{I+}\omega^{I+},\bullet])^{k-1}(K_I\otimes\mathcal{P}'_I)[\chi_{II}\omega^{II},\bullet]((K_I\otimes\mathcal{P}'_I)[\chi_{I+}\omega^{I+},\bullet])^{m-k}\circ\\
\circ(\chi_{1+}\omega^{1+}+\chi_{0+}\omega^{0+})\\
=\chi_{0+}\omega^{0+}+\chi_{1+}\omega^{1+}+\chi_{0I}\omega^{0I}+\chi_{1I}\omega^{1I}+\chi_{I+}\omega^{I+}+\chi_{II}\omega^{II}-\\
-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{B_{m+1}(t_1)-B_{m+1}}{(m+1)!}(\mathrm{ad}_{\omega^{I+}})^m\circ(\omega^{1+}-\omega^{0+})-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{B_{m+1}(t_1)-B_{m+1}}{(m+1)!}\,dt_2\cdot\\
\cdot\left(\sum_{k=1}^{m}(\mathrm{ad}_{\omega^{I+}})^{k-1}\mathrm{ad}_{\omega^{II}}(\mathrm{ad}_{\omega^{I+}})^{m-k}\circ(\omega^{1+}-\omega^{0+})+(\mathrm{ad}_{\omega^{I+}})^m\circ(\omega^{1I}-\omega^{0I})\right)\end{gathered}$$

Заметим, что $U_{I\times\mathcal{S}^1}(\omega)$ имеет следующую структуру:

$$U_{I\times\mathcal{S}^1}(\omega)=f(\omega,t_1)\otimes\chi_++(\omega^{0I}\chi_0+\omega^{1I}\chi_1+g(\omega,t_1))\otimes\chi_I+\omega^{II}\chi_{II}$$

где f и g некоторые выражающиеся через полиномы Бернулли функции t_1, зависящие от коцепи ω, и при этом выполнено $g|_{t_1=0}=g|_{t_1=1}=0$. Тем самым, выражение (343) факторизуется в сумму произведений супер-следов по $\Omega^\bullet(I)$ и $\Omega^\bullet(\mathcal{S}^1)$, причём на втором факторе мы оказываемся в условиях Леммы 7. Поэтому

$$\begin{aligned}S^1_{I\times\mathcal{S}^1}&=-\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(I\times\mathcal{S}^1,\mathfrak{g})}((\mathrm{id}\otimes K_I)[(\omega^{0I}\chi_0+\omega^{1I}\chi_1+g(\omega,t_1))\otimes\chi_I,\bullet])^n\\
&=-\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(I,\mathfrak{g})}([\omega^{0I}\chi_0+\omega^{1I}\chi_1+g(\omega,t_1),\bullet])^n\cdot\mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(\mathcal{S}^1)}(K_I(\chi_I\wedge\bullet))^n\\
&=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_n}{n\cdot n!}\mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(I,\mathfrak{g})}([\omega^{0I}\chi_0+\omega^{1I}\chi_1+g(\omega,t_1),\bullet])^n\end{aligned}$$

Супер-след по $\Omega^\bullet(I,\mathfrak{g})$ мы вычисляем с помощью (331) (и пользуясь тем, что g обращается в ноль на концах отрезка):

$$S^1_{I\times\mathcal{S}^1}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_n}{n\cdot n!}\,\frac{1}{2}(\mathrm{tr}_\mathfrak{g}(\mathrm{ad}_{\omega^{0I}})^n+\mathrm{tr}_\mathfrak{g}(\mathrm{ad}_{\omega^{1I}})^n)=\frac{1}{2}\mathrm{tr}_\mathfrak{g}\log\left(\frac{\sinh\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{0I}}}{2}}{\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{0I}}}{2}}\right)+\frac{1}{2}\mathrm{tr}_\mathfrak{g}\log\left(\frac{\sinh\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{1I}}}{2}}{\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{1I}}}{2}}\right)$$

Итак, мы получили для цилиндра с цепной гомотопией $K_{I^2,R}=\mathrm{id}\otimes K_I+K_I\otimes\mathcal{P}'_I$ следующий результат:

$$
\begin{aligned}
&S_{I\times\mathcal{S}^1}\\
&=< p_{I+},\omega^{1+}-\omega^{0+} >_{\mathfrak{g}} + < p_{II},\omega^{1I}-\omega^{0I} >_{\mathfrak{g}} + \frac{1}{2} < p_{0+},[\omega^{0+},\omega^{0+}] >_{\mathfrak{g}} + \frac{1}{2} < p_{1+},[\omega^{1+},\omega^{1+}] >_{\mathfrak{g}} +\\
&\quad + < p_{0I},[\omega^{0I},\omega^{0+}] >_{\mathfrak{g}} + < p_{1I},[\omega^{1I},\omega^{1+}] >_{\mathfrak{g}} + \frac{1}{2} < p_{I+},[\omega^{I+},\omega^{0+}+\omega^{1+}]] >_{\mathfrak{g}} +\\
&+\frac{1}{2} < p_{II},[\omega^{I+},\omega^{0I}+\omega^{1I}]+[\omega^{II},\omega^{0+}+\omega^{1+}] >_{\mathfrak{g}} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_n}{n!} < p_{I+},(\mathrm{ad}_{\omega^{I+}})^n\circ(\omega^{1+}-\omega^{0+}) >_{\mathfrak{g}} +\\
&+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_n}{n!} < p_{II},(\mathrm{ad}_{\omega^{I+}})^n\circ(\omega^{1I}-\omega^{0I}) + \sum_{k=1}^{n}(\mathrm{ad}_{\omega^{I+}})^{k-1}\mathrm{ad}_{\omega^{II}}(\mathrm{ad}_{\omega^{I+}})^{n-k}\circ(\omega^{1+}-\omega^{0+}) >_{\mathfrak{g}} +\\
&\qquad + \hbar\sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_n}{n\cdot n!}\,\frac{1}{2}(\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}_{\omega^{0I}})^n + \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}_{\omega^{1I}})^n)
\end{aligned}
$$

или, собирая суммы с числами Бернулли в производящие функции,

$$
\begin{aligned}
S_{I\times\mathcal{S}^1} &= \frac{1}{2} < p_{0+},[\omega^{0+},\omega^{0+}] >_{\mathfrak{g}} + \frac{1}{2} < p_{1+},[\omega^{1+},\omega^{1+}] >_{\mathfrak{g}} +\\
&\quad + < p_{0I},[\omega^{0I},\omega^{0+}] >_{\mathfrak{g}} + < p_{1I},[\omega^{1I},\omega^{1+}] >_{\mathfrak{g}} +\\
&+ \frac{1}{2} < p_{I+},[\omega^{I+},\omega^{0+}+\omega^{1+}]] >_{\mathfrak{g}} + \frac{1}{2} < p_{II},[\omega^{I+},\omega^{0I}+\omega^{1I}] + [\omega^{II},\omega^{0+}+\omega^{1+}] >_{\mathfrak{g}} +\\
&+\frac{\partial}{\partial\vartheta} < p_{II}+\vartheta\cdot p_{I+}, \left(\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{I+}+\vartheta\cdot\omega^{II}}}{2}\coth\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{I+}+\vartheta\cdot\omega^{II}}}{2}\right)\circ((\omega^{1+}-\omega^{0+})+\vartheta\cdot(\omega^{1I}-\omega^{0I})) >_{\mathfrak{g}} +\\
&\qquad + \hbar\left(\frac{1}{2}\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\log\left(\frac{\sinh\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{0I}}}{2}}{\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{0I}}}{2}}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\log\left(\frac{\sinh\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{1I}}}{2}}{\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{1I}}}{2}}\right)\right) \qquad (344)
\end{aligned}
$$

где ϑ — вспомогательная нечётная переменная (точнее, с духовым числом $+1$).

Аналогичным образом разбирается случай “толстого тора” $I\times\mathbb{T}^D = I\times\underbrace{\mathcal{S}^1\times\cdots\times\mathcal{S}^1}_{D}$ с клеточным разбиением $\{0,1,I\}\times\{0,+\}\times\cdots\times\{0,+\}$ и с асимметричной цепной гомотопией

$$
K_{I\times\mathcal{S}^D} = \underbrace{\mathrm{id}\otimes\cdots\otimes\mathrm{id}}_{D}\otimes K_I + \underbrace{\mathrm{id}\otimes\cdots\otimes\mathrm{id}}_{D-1}\otimes K_I\otimes\mathcal{P}'_I + \cdots + K_I\otimes\underbrace{\mathcal{P}'_I\otimes\cdots\otimes\mathcal{P}'_I}_{D} \qquad (345)
$$

т.е. сначала стягивается алгебра де Рама последней окружности, потом предпоследней и т.д., последним стегивается алгебра де Рама отрезка (можно принять любой другой порядок стягивания, важно только, что первой стягивается какая-то из окружностей, не отрезок).

Как и для случая $I\times\mathcal{S}^1$, поскольку формы Уитни на окружности замкнуты относительно умножения, все внутренние рёбра фейнмановских диаграмм, кроме находящихся в цикле, обязаны быть раскрашенными частью $K_I\otimes\mathcal{P}'_I\otimes\cdots\otimes\mathcal{P}'_I$ пропагатора. Поэтому из древесных диаграмм выживают только “ветки”, и для древесной части клеточного действия получаем

$$S^0_{I\times\mathbb{T}^D} = \sum_{\zeta\in\{+,I\}^D} < p_{I\zeta}, \omega^{1\zeta} - \omega^{0\zeta} >_{\mathfrak{g}} + \frac{1}{2} \sum_{\zeta,\zeta_1,\zeta_2\in\{+,I\}^D} (-1)^{(|\zeta_1|+1)\cdot|\zeta_2|} c^{\zeta}_{\zeta_1,\zeta_2} \cdot$$

$$\cdot \Big(< p_{0\zeta}, [\omega^{0\zeta_1}, \omega^{0\zeta_2}] >_{\mathfrak{g}} + < p_{1\zeta}, [\omega^{1\zeta_1}, \omega^{1\zeta_2}] >_{\mathfrak{g}} + (-1)^{|\zeta_2|} < p_{I\zeta}, [\omega^{I\zeta_1}, \omega^{0\zeta_2} + \omega^{1\zeta_2}] >_{\mathfrak{g}} \Big) +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \sum_{\zeta,\zeta_1,\ldots,\zeta_{n+1}\in\{+,I\}^D} (-1)^{\sum_{1\le i<j\le n+1}|\zeta_i|\cdot|\zeta_j|} c^{\zeta}_{\zeta_1,\ldots,\zeta_{n+1}} < p_{I\zeta}, \prod_{i=1}^{n} \mathrm{ad}_{\omega^{I\zeta_i}} \circ (\omega^{1\zeta_{n+1}} - \omega^{0\zeta_{n+1}}) >_{\mathfrak{g}}$$

где мы использовали обозначение

$$c^{\zeta}_{\zeta_1,\ldots,\zeta_n} = \int_{\zeta} \chi_{\zeta_1} \wedge \cdots \wedge \chi_{\zeta_n} \in \{\pm 1, 0\}$$

Однопетлевая же часть равна нулю при $D \ge 2$ по следующей причине. В силу Леммы 7, все рёбра в цикле раскрашены кусками пропагатора $\mathrm{id} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id} \otimes K_I$. Поэтому при факторизации де рамовской части значения диаграммы, мы обнаружим, что на каждой окружности кроме последней мы вычисляем супер-след оператора умножения на некоторую функцию, а $\mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(\mathcal{S}^1)} f(t) \wedge \bullet = 0$ для любого $f(t)$, как следствие (331). Поэтому

$$S^1_{I\times\mathcal{S}^D} = 0$$

при $D \ge 2$, для цепной гомотопии (345).

6.4.5. *Бутылка Клейна.* Клеточное действие для бутылки Клейна получается из клеточного действия для цилиндра (344) с помощью конструкции склейки (раздел 5.4). Именно, мы полагаем $V = C^\bullet(I\times\mathcal{S}^1, \mathfrak{g})$ — коцепи на цилиндре с базисом $\{e_{0+}, e_{1+}, e_{0I}, e_{1I}, e_{I+}, e_{II}\}$, и $W = C^\bullet(\mathcal{S}^1, \mathfrak{g})$ — коцепи на окружности с базисом $\{\bar{e}_+, \bar{e}_I\}$, и задаём пару проекций $\pi_{1,2} : V \to W$ и пару вложений $\iota_{1,2} : W \to V$ как

$$\begin{array}{lrcl}
\pi_1 : & x^{0+}e_{0+} + x^{1+}e_{1+} + x^{0I}e_{0I} + x^{1I}e_{1I} + x^{I+}e_{I+} + x^{II}e_{II} & \mapsto & x^{0+}\bar{e}_+ + x^{0I}\bar{e}_I \\
\pi_2 : & x^{0+}e_{0+} + x^{1+}e_{1+} + x^{0I}e_{0I} + x^{1I}e_{1I} + x^{I+}e_{I+} + x^{II}e_{II} & \mapsto & x^{1+}\bar{e}_+ - x^{1I}\bar{e}_I \\
 & \iota_1 : \quad y^+\bar{e}_+ + y^I\bar{e}_I & \mapsto & y^+e_{0+} + y^Ie_{0I} \\
 & \iota_2 : \quad y^+\bar{e}_+ + y^I\bar{e}_I & \mapsto & y^+e_{1+} - y^Ie_{1I}
\end{array}$$

Поскольку $\pi_{1,2}$ происходят из геометрических вложений окружности в цилиндр как клеточного подкомплекса, они a priori являются линейными L_∞-морфизмами вследствие теоремы о клеточной локальности клеточного действия (или можно это прямо увидеть из явной формулы (344)). Поэтому конструкция склейки для BF_∞-теории здесь применима. Склеенное пространство есть

$$V' = \ker \pi_- = \mathfrak{g}e_{++} \oplus \mathfrak{g}e_{-I} \oplus \mathfrak{g}e_{I+} \oplus \mathfrak{g}e_{II} \subset V$$

где $e_{++} = e_{0+} + e_{1+}$ и $e_{-I} = e_{1I} - e_{0I}$. Пространство V' естественно отождествляется с комплексом $\mathfrak{g}$-значных коцепей бутылки Клейна KB: $V' = C^\bullet(\mathrm{KB}, \mathfrak{g})$ с клеточным разбиением $\{++, -I, I+, II\}$ (заметим, мы определили e_{-I} без множителя $\frac{1}{2}$, чтобы ω^{-I} можно было понимать как значение коцепи на клетке $-I$ в КВ, полученной склеиванием клеток $1I$ и $0I$ с обратной ориентацией в цилиндре). Склеенное действие есть

$$\begin{aligned}
S_{\text{KB}} = S_{I\times\mathcal{S}^1}|_{\omega^{0+}\mapsto\omega^{++},\,\omega^{1+}\mapsto\omega^{++},\,\omega^{0I}\mapsto-\omega^{-I},\,\omega^{1I}\mapsto\omega^{-I},\,p_{0+}\mapsto p_{++},\,p_{1+}\mapsto p_{++},\,p_{0I}\mapsto -p_{-I},\,p_{1I}\mapsto p_{-I}} - \\
- S_{\mathcal{S}^1}|_{\bar\omega^{+}\mapsto\omega^{++},\,\bar\omega^{I}\mapsto\omega^{-I},\,\bar p_{+}\mapsto p_{++},\,\bar p_{I}\mapsto p_{-I}} = \\
= \frac{1}{2} < p_{++}, [\omega^{++}, \omega^{++}] >_{\mathfrak{g}} + < p_{-I}, [\omega^{-I}, \omega^{++}] >_{\mathfrak{g}} + < p_{I+}, [\omega^{I+}, \omega^{++}] >_{\mathfrak{g}} + \\
+ < p_{II}, [\omega^{II}, \omega^{++}] >_{\mathfrak{g}} + 2 < p_{II}, \left(\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{I+}}}{2} \coth \frac{\mathrm{ad}_{\omega^{I+}}}{2}\right) \circ \omega^{-I} >_{\mathfrak{g}}
\end{aligned}$$

Заметим, что однопетлевая часть действия сократилась между цилиндром и окружностью.

Итак, резюмируя результаты этого раздела, мы получили следующий набор ответов:

Утверждение 15. • *Для тора $\mathbb{T}^2$ с клеточным разбиением $\{+, I\} \times \{+, I\}$ и с симметричной цепной гомотопией $K = K_I \otimes \frac{\mathrm{id}+\mathcal{P}'_I}{2} + \frac{\mathrm{id}+\mathcal{P}'_I}{2} \otimes K_I$ клеточное BF-действие имеет вид*

$$\begin{aligned}
S_{\mathbb{T}^2,\mathrm{sym}} = \frac{1}{2} < p_{++}, [\omega^{++}, \omega^{++}] >_{\mathfrak{g}} + < p_{I+}, [\omega^{I+}, \omega^{++}] >_{\mathfrak{g}} + \\
+ < p_{+I}, [\omega^{+I}, \omega^{++}] >_{\mathfrak{g}} + < p_{II}, [\omega^{I+}, \omega^{+I}] + [\omega^{II}, \omega^{++}] >_{\mathfrak{g}} + \\
+\hbar\, 2 \oint \frac{dz_1}{2\pi i z_1} \left(\frac{z_1}{2} \coth \frac{z_1}{2} - 1\right) \oint \frac{dz_2}{2\pi i z_2} \left(\frac{z_2}{2} \coth \frac{z_2}{2} - 1\right) \cdot \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}} \log \left(1 - \frac{1}{2} z_1^{-1} \mathrm{ad}_{\omega^{I+}} - \frac{1}{2} z_2^{-1} \mathrm{ad}_{\omega^{+I}}\right)
\end{aligned} \tag{346}$$

- *Для тора $\mathbb{T}^D$ с клеточным разбиением $\{+, I\}^{\times D}$ и с асимметричной цепной гомотопией (319) (окружности стягиваются в произвольном порядке) клеточное BF-действие при $D \geq 2$ есть*

$$S_{\mathbb{T}^D,\mathrm{non-sym}} = \frac{1}{2} \sum_{\zeta,\zeta_1,\zeta_2 \in \{+,I\}^D} (-1)^{(|\zeta_1|+1)\cdot|\zeta_2|} c^{\zeta}_{\zeta_1,\zeta_2} < p_\zeta, [\omega^{\zeta_1}, \omega^{\zeta_2}] >_{\mathfrak{g}} \tag{347}$$

  где $c^{\zeta}_{\zeta_1,\zeta_2} = \int_\zeta \chi_{\zeta_1} \wedge \chi_{\zeta_2} \in \{\pm 1, 0\}$.

- *Клеточные $BF-$действия для тора $\mathbb{T}^2$ с симметричной и асимметричной цепной гомотопией связаны каноническим преобразованием*

$$S_{\mathbb{T}^2,\mathrm{sym}} = S_{\mathbb{T}^2,\mathrm{non-sym}} + \{S^0_{\mathbb{T}^2}, R_{0\to 1/2}\}$$

  с генератором

$$\begin{aligned}
R_{0\to 1/2} = -\hbar \frac{\partial}{\partial \vartheta} \int_0^{1/2} d\xi \oint \frac{dz_1}{2\pi i z_1} \left(\frac{z_1}{2} \coth \frac{z_1}{2} - 1\right) \oint \frac{dz_2}{2\pi i z_2} \left(\frac{z_2}{2} \coth \frac{z_2}{2} - 1\right) \cdot \\
\cdot \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}} (1 - (1-\xi) z_1^{-1} \mathrm{ad}_{\omega^{I+}} - \xi z_2^{-1} \mathrm{ad}_{\omega^{+I}} - \vartheta z_1^{-1} z_2^{-1} \mathrm{ad}_{\omega^{II}})^{-1}
\end{aligned}$$

где ϑ — нечётная переменная.

- *Для цилиндра $I \times \mathcal{S}^1$ с клеточным разбиением $\{0, 1, I\} \times \{+, I\}$ и асимметричной цепной гомотопией $K = \mathrm{id} \otimes K_I + K_I \otimes \mathcal{P}'_I$ клеточное BF-действие:*

$$S_{I\times\mathcal{S}^1} = \frac{1}{2} < p_{0+}, [\omega^{0+}, \omega^{0+}] >_{\mathfrak{g}} + \frac{1}{2} < p_{1+}, [\omega^{1+}, \omega^{1+}] >_{\mathfrak{g}} +$$

$$+ < p_{0I}, [\omega^{0I}, \omega^{0+}] >_{\mathfrak{g}} + < p_{1I}, [\omega^{1I}, \omega^{1+}] >_{\mathfrak{g}} +$$

$$+ \frac{1}{2} < p_{I+}, [\omega^{I+}, \omega^{0+} + \omega^{1+}]] >_{\mathfrak{g}} + \frac{1}{2} < p_{II}, [\omega^{I+}, \omega^{0I} + \omega^{1I}] + [\omega^{II}, \omega^{0+} + \omega^{1+}] >_{\mathfrak{g}} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial\vartheta} < p_{II} + \vartheta \cdot p_{I+}, \left(\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{I+}+\vartheta\cdot\omega^{II}}}{2} \coth \frac{\mathrm{ad}_{\omega^{I+}+\vartheta\cdot\omega^{II}}}{2}\right) \circ ((\omega^{1+} - \omega^{0+}) + \vartheta \cdot (\omega^{1I} - \omega^{0I})) >_{\mathfrak{g}} +$$

$$+ \hbar \left(\frac{1}{2}\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}} \log \left(\frac{\sinh \frac{\mathrm{ad}_{\omega^{0I}}}{2}}{\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{0I}}}{2}}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}} \log \left(\frac{\sinh \frac{\mathrm{ad}_{\omega^{1I}}}{2}}{\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{1I}}}{2}}\right)\right)$$

где ϑ — нечётная переменная.

- *Для толстого тора $I \times \mathbb{T}^D$ с клеточным разбиением $\{0, 1, I\} \times \{+, I\}^D$ и асимметричной цепной гомотопией (319) (первой стягивается одна из окружностей, а дальше в произвольном порядке остальные окружности и отрезок) клеточное BF-действие при $D \geq 2$ есть*

$$S_{I\times\mathbb{T}^D} = \sum_{\zeta\in\{+,I\}^D} < p_{I\zeta}, \omega^{1\zeta} - \omega^{0\zeta} >_{\mathfrak{g}} + \frac{1}{2} \sum_{\zeta,\zeta_1,\zeta_2\in\{+,I\}^D} (-1)^{(|\zeta_1|+1)\cdot|\zeta_2|} c^{\zeta}_{\zeta_1,\zeta_2} \cdot$$

$$\cdot \Big(< p_{0\zeta}, [\omega^{0\zeta_1}, \omega^{0\zeta_2}] >_{\mathfrak{g}} + < p_{1\zeta}, [\omega^{1\zeta_1}, \omega^{1\zeta_2}] >_{\mathfrak{g}} + (-1)^{|\zeta_2|} < p_{I\zeta}, [\omega^{I\zeta_1}, \omega^{0\zeta_2} + \omega^{1\zeta_2}] >_{\mathfrak{g}}\Big) +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \sum_{\zeta,\zeta_1,\ldots,\zeta_{n+1}\in\{+,I\}^D} (-1)^{\sum_{1\leq i<j\leq n+1}|\zeta_i|\cdot|\zeta_j|} c^{\zeta}_{\zeta_1,\ldots,\zeta_{n+1}} < p_{I\zeta}, \prod_{i=1}^{n} \mathrm{ad}_{\omega^{I\zeta_i}} \circ (\omega^{1\zeta_{n+1}} - \omega^{0\zeta_{n+1}}) >_{\mathfrak{g}}$$

где $c^{\zeta}_{\zeta_1,\ldots,\zeta_n} = \int_{\zeta} \chi_{\zeta_1} \wedge \cdots \wedge \chi_{\zeta_n} \in \{\pm 1, 0\}$.

- *Для бутылки Клейна* KB *с клеточным разбиением $\{++, -I, I+, II\}$ и асимметричной цепной гомотопией $K = \mathrm{id} \otimes K_I + K_I \otimes \mathcal{P}'_I$ клеточное BF-действие есть*

$$S_{\mathrm{KB}} = \frac{1}{2} < p_{++}, [\omega^{++}, \omega^{++}] >_{\mathfrak{g}} + < p_{-I}, [\omega^{-I}, \omega^{++}] >_{\mathfrak{g}} + < p_{I+}, [\omega^{I+}, \omega^{++}] >_{\mathfrak{g}} +$$

$$+ < p_{II}, [\omega^{II}, \omega^{++}] >_{\mathfrak{g}} + 2 < p_{II}, \left(\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{I+}}}{2} \coth \frac{\mathrm{ad}_{\omega^{I+}}}{2}\right) \circ \omega^{-I} >_{\mathfrak{g}} \quad (348)$$

7. Эффективная BF-теория на когомологиях де Рама многообразия

С точки зрения алгебраической топологии интересным объектом является эффективное действие на когомологиях де Рама многообразия M, индуцированное из топологической BF-теории на M. Точнее, инвариантом многообразия является класс эффективного действия на когомологиях по модулю канонических преобразований или, эквивалентно, на языке qL_∞-алгебр,— гомотопический тип алгебры де Рама $\Omega^\bullet(M, \mathfrak{g})$ как qL_∞-алгебры. Древесная часть индуцированного действия на когомологиях является производящей функцией для операций Масси, и потому содержит информацию о рациональном гомотопическом типе M (см. [27],[8]) и интересный вопрос — содержит ли однопетлевая часть действия на когомологиях какую-то дополнительную информацию о многообразии? Иначе говоря, является ли гомотопический тип алгебры де Рама, как qL_∞-алгебры, более сильным инвариантом многообразия, чем гомотопический тип алгебры де Рама, как классической L_∞-алгебры (эквивалентный рациональному гомотопическому типу самого многообразия)? Ответ на этот вопрос утвердительный: мы располагаем примером пары рационально гомотопически эквивалентных многообразий, различающихся именно квантовыми операциями на когомологиях — окружность и бутылка Клейна (раздел 7.3).

В разделе 7.1 мы обсуждаем общую картину индуцирования для топологической BF-теории (соответственно, алгебры де Рама, как qL_∞-алгебры). В частности, обсуждается конструкция индуцирования эффективного действия на когомологиях через дискретное BF-действие, т.е. эффективное BF-действие на триангуляции или кубическом клеточном разбиении многообразия (350). Вычисление эффективного действия на когомологиях таким способом сводится к вычислению конечномерного БВ-интеграла, если известны действия для строительных блоков дискретной BF-теории — симплексов или кубов (например, в том порядке теории возмущений, в котором мы хотим вычислить действие на когомологиях).

В разделе 7.2 обсуждаются некоторые специальные свойства эффективного действия на когомологиях: свойство цикличности древесной части действия для случая индуцирования прямо из топологической BF-теории (не через клеточный комплекс) с помощью "ходжевсих данных индуцирования", согласованных с двойственностью Пуанкаре. Далее обсуждаются общие оценки на степени когомологий, которые могут входить в классические и квантовые операции на когомологиях. Из этих свойств наиболее важным является то, что квантовые операции зависят только лишь от 1-когомологий. Вследствие этих оценок, задача явного вычисления эффективного действия на когомологиях для многообразия с $H^1(M) = 0$ является задачей конечной сложности: квантовые операции отсутствуют, а сложность классических ограничена размерностью многообразия. Наконец, мы приводим результат, позволяющий в некоторых случаях вычислить эффективное действие на когомологиях произведения многообразий.

В разделе 7.3 мы приводим примеры явно вычислимого действия на когомологиях. Наиболее интересна здесь, как уже упоминалось, пара примеров: окружность – бутылка Клейна.

7.1. **Категория ретрактов.**

Определение 21. *Пусть* (V, d) *— произвольный коцепной комплекс. Категорией ретрактов* Ret_V *мы называем категорию, объектами которой являются подкомплексы* $V' \hookrightarrow V$*, квазиизоморфные* V*, рассматриваемые с точностью до изоморфизма. Морфизмом в* Ret_V *между объектами* V_1, V_2 *мы называем данные индуцирования* $V_1 \xrightarrow{(\iota,r,K)} V_2$*, т.е. тройку линейных отображений: вложение* $\iota : V_2 \to V_1$*, ретракция* $r : V_1 \to V_2$*, цепная гомотопия* $K : V_1 \to V_1$*, причём должны выполняться аксиомы (121–126).*

Композиция морфизмов определяется с помощью (149). Объекты Ret_V образуют частично-упорядоченное множество, причём морфизмы всегда бьют из большего объекта в меньший (нестрого меньший, т.к. есть автоморфизмы). Соответственно, в Ret_V есть два выделенных объекта: максимальный — сам коцепной комплекс V и минимальный — его когомологии $H^\bullet(V)$.

Теперь, пусть на исходном комплексе V была задана qL_∞-структура (Q_V, ρ_V) (или, эквивалентно, задано BF_∞-действие на пространстве полей $\mathcal{F}_V = T^*[-1](V[1])$). Предполагается, что дифференциал d комплекса совпадает с унарной классической операцией $l_{V(1)}$ этой qL_∞-структуры. Тогда с помощью морфизмов эта структура разносится на все объекты категории Ret_V, т.е. на каждом $V' \hookrightarrow V$ возникает индуцированная qL_∞-структура $(Q_{V'}, \rho_{V'})$, причём её явный вид зависит от того морфизма (или цепочки морфизмов), по которой мы её индуцировали из (V, Q_V, ρ_V). Как мы знаем из Утверждения 7, перенос qL_∞=структуры вдоль морфизма (индуцирование) согласован с композицией морфизмов. Также из Утверждения 9 нам известно, что любая пара qL_∞-структур, индуцированных на ретракте V' из V вдоль двух разных цепочек морфизмов, отличается на специальное каноническое преобразование (эквивалентно, соответствующие два эффективных BF_∞-действия на $\mathcal{F}_{V'}$ отличаются на специальное каноническое преобразование). Также отсюда следует, что индуцированные из V всеми возможными способами qL_∞-структуры на всех ретрактах V' эквивалентны друг другу в смысле Определения 17, и, в частности, эквивалентны индуцированной qL_∞-структуре на $H^\bullet(V)$.

Интересующий нас случай категории ретрактов — случай $V = \Omega^\bullet(M, \mathfrak{g})$, т.е. $\mathfrak{g}$-значные дифференциальные формы на многообразии M со стандартной структурой DGLA: дифференциал есть оператор де Рама и бинарная операция порождается внешним произведением в $\Omega^\bullet(M)$ и коммутатором в $\mathfrak{g}$. BF_∞-теория, соответствующая этой qL_∞-структуре есть топологическая BF-теория на многообразии M с калибровочной алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Индуцированная qL_∞-структура на когомологиях V, которые в данном случае являются просто когомологиями де Рама с коэффициентами $H^\bullet(M, \mathfrak{g})$, содержит полную информацию о гомотопическом типе алгебры де Рама на M, как qL_∞-алгебры, и представляет большой интерес с точки зрения гомотопических инвариантов многообразий. Поскольку древесная часть формулы индуцирования совпадает с обычной формулой гомотопического переноса (классической) L_∞-алгебры, индуцированные классические операции $l_{(n)}$ на $H^\bullet(M,\mathfrak{g})$ есть операции Масси на когомологиях де Рама. Поэтому, классическая часть индуцированной на когомологиях qL_∞-структуры является точным инвариантом рационального гомотопического типа многообразия M. Полная же qL_∞-структура на когомологиях, вместе с квантовыми операциями $q_{(n)}$, является строго более сильным инвариантом: мы разберём ниже пример пары рационально гомотопически эквивалентных многообразий, которые различаются по квантовым операциям на когомологиях — окружность и бутылка Клейна.

Если многообразие M компактно, не имеет края и ориентируемо, и на нём задана риманова метрика, то по метрике строится звёздочку Ходжа $*$ и оператор $d^* = -*d* : \Omega^\bullet(M) \to \Omega^{\bullet-1}(M)$. Возникает классичекое разложение Ходжа для комплекса де Рама

$$\Omega^\bullet(M) = \mathrm{Harm}^\bullet(M) \oplus \Omega^\bullet_{d-ex}(M) \oplus \Omega^\bullet_{d^*-ex}(M)$$

на точные, коточные и гармонические $\mathrm{Harm}^\bullet(M) = \ker(d\,d^* + d^*d)$ формы. Ходжевскими данными индуцирования

$$\Omega^\bullet(M) \xrightarrow{(\iota_{\mathrm{Hodge}}, r_{\mathrm{Hodge}}, K_{\mathrm{Hodge}})} H^\bullet(M)$$

мы называем вложение когомологий в $\Omega^\bullet(M)$ как гармонические формы, проекцию на гармонические формы в разложении Ходжа и оператор цепной гомотопии

$$K_{\mathrm{Hodge}} = d^*/(d\,d^* + d^*d)$$

(мы понимаем это выражение как действющее нулём на гармонических формах). Особенностью ходжевских данных индуцирования является то, что они согласованы со спариванием Пуанкаре на $\Omega^\bullet(M)$

$$(\alpha,\beta)_P = \int_M \alpha\wedge\beta$$

в следующем смысле: во-первых подпространства инфракрасных $\mathrm{Harm}^\bullet(M)$ и ультрафиолетовых $\Omega^\bullet_{d-ex}(M) \oplus \Omega^\bullet_{d^*-ex}(M)$ форм ортогональны друг другу относительно спаривания $(\bullet,\bullet)_P$. Во-вторых ходжевская цепная гомотопия является самосопряжённым оператором относительно $(\bullet,\bullet)_P$:

$$(K_{\mathrm{Hodge}}\alpha,\beta)_P = (-1)^{|\alpha|}(\alpha, K_{\mathrm{Hodge}}\beta)_P$$

в частности это значит, что подпространство $\Omega^\bullet_{d^*-ex}(M)$ является изотропным.

В категории ретрактов $\mathrm{Ret}_{\Omega^\bullet(M,\mathfrak{g})}$ мы интересуемся не всеми подкомплексами $V' \hookrightarrow V = \Omega^\bullet(M,\mathfrak{g})$, а только имеющими вид $V' = \mathfrak{g}\otimes C^\bullet$, где $C^\bullet \hookrightarrow \Omega^\bullet(M)$ и дифференциал на V' тривиален в коэффициентах $\mathfrak{g}$. Кроме того, мы рассматривам только морфизмы (ι, r, K), тривиальные в коэффициентах $\mathfrak{g}$. Кроме самого большого объекта $\Omega^\bullet(M,\mathfrak{g})$ и самого маленького объекта $H^\bullet(M,\mathfrak{g})$, в $\mathrm{Ret}_{\Omega^\bullet(M,\mathfrak{g})}$ есть ещё набор интересных промежуточных объектов $C^\bullet(\Xi,\mathfrak{g})$ — комплексы $\mathfrak{g}$-значных коцепей на триангуляции или кубическом клеточном разбиении Ξ многообразия M. Причём для каждого Ξ есть стандартный морфизм

$$\Omega^\bullet(M,\mathfrak{g}) \xrightarrow{(\iota_\Xi, r_\Xi, K_\Xi)} C^\bullet(\Xi,\mathfrak{g})$$

задаваемый для случая триангуляции Ξ вложением коцепей как форм Уитни, ретракцией на коцепи с помощью интегралов по симплексам и цепной гомотопией, склеенной из операторов Дюпона для симплексов. Соответственно, для случая кубического клеточного комплекса Ξ, данные индуцирования: вложение коцепей как кубических форм Уитни, ретракция на коцепи с помощью интегралов по кубическим клеткам, цепная гомотопия склеивается из симметризованных тензорных степеней (323) оператора Дюпона для отрезка. BF_∞-действие, соответствующее qL_∞-структуре перенесённой вдоль стандартного морфизма $(\iota_\Xi, r_\Xi, K_\Xi)$ из алгебры де Рама, называется дискретным (симплициальным или клеточным, соответственно) BF-действием для Ξ. Также для всякой триангуляции или всякого кубического клеточного разбиения Ξ есть канонический морфизм

$$C^\bullet(\Xi,\mathfrak{g}) \xrightarrow{(\iota_{\Xi\to H^\bullet}, r_{\Xi\to H^\bullet}, K_{\Xi\to H^\bullet})} H^\bullet(M,\mathfrak{g})$$

который строится аналогично морфизму Ходжа $\Omega^\bullet(M,\mathfrak{g}) \to H^\bullet(M,\mathfrak{g})$, однако не требует введения дополнительной структуры (тогда как морфизм Ходжа зависит от римановой метрики), и использует то, что в $C^\bullet(\Xi)$ есть канонический базис, связанный с геометрическими клетками. Именно, вместо d^* мы можем использовать оператор d^T, матрица которого в базисе клеток есть транспонированная матрица дифференциала. Тогда вводится аналог ходжевского лапласиана $d\,d^T + d^T d : C^\bullet(\Xi) \to C^\bullet(\Xi)$. Вложение $\iota_{\Xi\to H^\bullet}$ вкладывает когомологии в коцепи как “гармонические коцепи” $\mathrm{Harm}^\bullet(\Xi) = \ker(d\,d^T + d^T d)$, ретракция $r_{\Xi\to H^\bullet}$ есть проецирование на гармонические коцепи в разложении

$$C^\bullet(\Xi) = \mathrm{Harm}^\bullet(\Xi) \oplus C^\bullet_{d-ex}(\Xi) \oplus C^\bullet_{d^T-ex}(\Xi)$$

и цепная гомотопия есть

$$K_{\Xi\to H^\bullet} = d^T/(d\,d^T + d^T d) \tag{349}$$

Таким образом, для всякого Ξ возникает каноническое двухступенчатое индуцирование с $\Omega^\bullet(M,\mathfrak{g})$ на $H^\bullet(M,\mathfrak{g})$:

$$\Omega^\bullet(M,\mathfrak{g}) \xrightarrow{(\iota_\Xi, r_\Xi, K_\Xi)} C^\bullet(\Xi,\mathfrak{g}) \xrightarrow{(\iota_{\Xi\to H^\bullet}, r_{\Xi\to H^\bullet}, K_{\Xi\to H^\bullet})} H^\bullet(M,\mathfrak{g}) \tag{350}$$

Преимущество вычисления индуцированной qL_∞-структуры (эффективного BF_∞-действия) на когомологиях многообразия именно таким способом состоит в том, что задача вычисления континульного БВ-интеграла, определяющего индуцирование, сводится к вычислению симплициального (клеточного) действия на Ξ, которое, как мы знаем из теоремы о симплициальной (клеточной) локальности, сводится к стандартному вычислению на одном симплексе (кубе), и потом нам остаётся вычислить конечномерный БВ-интеграл, чтобы перейти от клеточных коцепей к когомологиям. Таким образом, преимущество данного метода над использованием, например, морфизма Ходжа для прямого вычисления индуцированной qL_∞-структуры на когомологиях, в том, что здесь трудная часть задачи — вычисление бесконечномерной части БВ-интеграла — стандартизована и сведена к серии универсальных вычислений, которые отчасти (в первых порядках теории возмущений для общего D, и точно для размерностей $D = 0, 1$) мы уже проделали: Теоремы 8,9,11.

Таким образом, мы выделяем в категории ретрактов $\mathrm{Ret}_{\Omega^\bullet(M,\mathfrak{g})}$ самый большой объект $\Omega^\bullet(M,\mathfrak{g})$, самый маленький объект — когомологии $H^\bullet(M,\mathfrak{g})$ и некоторый класс промежуточных объектов $C^\bullet(\Xi,\mathfrak{g})$, связанных с триангуляциями и кубическими клеточными разбиениями M. Также мы выделяем ходжевские морфизмы $\Omega^\bullet(M,\mathfrak{g}) \to H^\bullet(M,\mathfrak{g})$, зависящие от выбора метрики на M, и канонические для каждого Ξ морфизмы $\Omega^\bullet(M,\mathfrak{g}) \to C^\bullet(\Xi,\mathfrak{g})$ и $C^\bullet(\Xi,\mathfrak{g}) \to H^\bullet(M,\mathfrak{g})$. Также интерес представляют морфизмы сборки $C^\bullet(\Xi',\mathfrak{g}) \to C^\bullet(\Xi,\mathfrak{g})$, где Ξ' — подразбиение Ξ, однако мы не будем их здесь явно вводить.

7.2. **Специальные свойства эффективного BF-действия на когомологиях.**

7.2.1. *Циклическая симметрия фейнмановских деревьев для $S^0_{H^\bullet(M,\mathfrak{g})}$ для индуцирования Ходжа.* Пусть многообразие M связно, ориентируемо, компактно и не имеет края, его размерность мы обозначаем $D = \dim M$. Пусть также оно снабжено римановой метрикой, и мы интересуемся эффективным действием на когомологиях, индуцированным с помощью ходжевских данных индуцирования (ι_H, r_H, K_H). Пусть $\{h_i\}$ — базис в когомологиях де Рама $H^\bullet(M)$ и $\{h^i\}$ — двойственный базис в двойственном пространстве (гомологиях) $H_\bullet(M)$. Супер-поля для пространства полей $\mathcal{F}_{H^\bullet(M,\mathfrak{g})} = T^*[-1](H^\bullet(M,\mathfrak{g})[1])$ есть

$$\omega = \sum_i h_i \omega^i, \quad p = \sum_i p_i h^i$$

где ω^i и p_i принимают значения в $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$, соответственно, и имеют духовые числа $\mathrm{gh}(\omega^i) = 1-|i|$, $\mathrm{gh}(p_i) = |i|-2$ (мы обозначаем $|i|$ де рамовскую степень когомологии h_i). Древесная часть эффективного действия на когомологиях имеет вид

$$S^0_{H^\bullet(M,\mathfrak{g})}(\omega,p) = \sum_{T\in\mathbf{T}_{\mathrm{nonPl}}:\,|T|\geq 2} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(T)|}\cdot$$
$$\cdot \sum_{j,i_1,\ldots,i_{|T|}} < p_j r_H^*(h^j), \mathrm{Iter}_{T;-K_H[\bullet,\bullet];[\bullet,\bullet]}(\iota_H(h_{i_1})\omega^{i_1},\ldots,\iota_H(h_{i_{|T|}})\omega^{i_{|T|}}) >$$

Далее, на $\Omega^\bullet(M)$ определено спаривание Пуанкаре

$$(\alpha,\beta)_P = \int_M \alpha\wedge\beta$$

которое индуцирует невырожденное спаривание на $H^\bullet(M)$

$$(A,B)_P = (\iota_H(A),\iota_H(B))_P$$

матрицу которого мы обозначим

$$P_{ij} = (h_i,h_j)_P$$

Пусть также на $\mathfrak{g}$ есть инвариантное скалярное произведение $\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}T_aT_b$, с помощью которого мы отождествляем $\mathfrak{g}^*$ с $\mathfrak{g}$. Перепишем древесную часть эффективного действия на когомологиях через спаривание Пуанкаре $(\bullet,\bullet)_P$ вместо канонического спаривания $<\bullet,\bullet>$:

$$S^0_{H^\bullet(M,\mathfrak{g})}(\omega,p) = \sum_{T\in\mathbf{T}_{\mathrm{nonPl}}:\,|T|\geq 2} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(T)|}\cdot$$
$$\cdot \sum_{j,i_0,i_1,\ldots,i_{|T|}} \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\left(p_j P^{j\,i_0}\iota_H(h_{i_0}), \mathrm{Iter}_{T;-K_H[\bullet,\bullet];[\bullet,\bullet]}(\iota_H(h_{i_1})\omega^{i_1},\ldots,\iota_H(h_{i_{|T|}})\omega^{i_{|T|}})\right)_P \quad (351)$$

где P^{ij} — обратная матрица к P_{ij}, и мы воспользовались ортогональностью инфракрасных (гармонических) форм ультрафиолетовым (d- и d^*-точным), чтобы переписать $(h_{i_0}, r_H\mathrm{Iter}(\cdots))_P$ как $(\iota_H(h_{i_0}),\mathrm{Iter}(\cdots))_P$.

Введём на планарных корневых деревьях операцию $\mathrm{Cycl}_k : \mathbf{T}_{\mathrm{Pl}} \to \mathbf{T}_{\mathrm{Pl}}$ — операцию циклического прокручивания на k, где $0\leq k\leq |T|$. Дерево $T' = \mathrm{Cycl}_k T$ получается из T следующим образом: внутренняя вершина, соединённая с листом номер k дерева T (если обходить T против часовой стрелки, начиная с корня) назначается корнем нового дерева T', нумерация листьев сдвигается на $-k \mod (|T|+1)$ и к корню дерева T присоединяется ребро, оканчивающееся 1-валентной вершиной, которая назначается листом номер $|T|+1-k$ для T'. Соответственно изменяется и ориентация рёбер — в направлении к новому корню. В частности, Cycl_0 есть тождественная операция. Операции $\{\mathrm{Cycl}_k\}_{k=0}^{|T|}$ задают действие циклической группы $\mathbb{Z}_{|T|+1}$ на $\mathbf{T}_{\mathrm{Pl}}$.

Примечание. Для описания циклического прокручивания деревьев более удобно описание деревьев, отличающееся от введённого в разделе 4.3 добавлением к корню ребра, оканчивающегося 1-валентной вершиной (и корнем тогда называется эта 1-валентная вершина). В таком формализме корень можно считать нулевым листом (который определяет ориентацию рёбер), и операция циклического прокручивания Cycl_k просто состоит в сдвиге нумерации листьев (включая нулевой лист) на $-k \mod (|T|+1)$.

Свойства кососимметричности спаривания Пуанкаре

$$(\alpha, \beta)_P = (-1)^{|\alpha|\cdot|\beta|}(\beta, \alpha)_P$$

цикличности спаривания Пуанкаре

$$(\alpha, \beta \wedge \gamma)_P = (-1)^{|\alpha|\cdot(|\beta|+|\gamma|)}(\beta, \gamma \wedge \alpha)_P$$

и самосопряжённости ходжевской цепной гомотопии

$$(K_H\alpha, \beta) = (-1)^{|\alpha|}(\alpha, K_H\beta)$$

позволяют делать локальные перестройки выражения для де рамовской части вклада дерева в $S^0_{H^\bullet(M,\mathfrak{g})}$

$$C_T(i_0, \ldots, i_{|T|}) = \Big(\iota_H(h_{i_0}), \mathrm{Iter}_{T;-K_H(\bullet\wedge\bullet);(\bullet\wedge\bullet)}(\iota_H(h_{i_1}), \ldots, \iota_H(h_{i_{|T|}}))\Big)_P$$

приводящие к циклической симметрии:

$$C_T(i_0, \ldots, i_{|T|}) = \epsilon_{T,k}(|i_0|, \ldots, |i_{|T|}|)C_{\mathrm{Cycl}_k T}(i_k, \ldots, i_{|T|}, i_0, \ldots, i_{k-1}) \tag{352}$$

Здесь $0 \le k \le |T|$ и $\epsilon_{T,k}(|i_0|, \ldots, |i_{|T|}|) = \pm 1$ — некоторый знак, зависящий от T, k и де рамовских степеней базисных когомологий, расставленных на листьях и корне. Например:

$$C_{(**)}(i_0, i_1, i_2) = (\iota_H(h_{i_0}), \iota_H(h_{i_1}) \wedge \iota_H(h_{i_2}))_P = (-1)^{|\iota_0|\cdot(|\iota_1|+|\iota_2|)}(\iota_H(h_{i_1}), \iota_H(h_{i_2}) \wedge \iota_H(h_{i_0}))_P$$
$$= (-1)^{|\iota_0|\cdot(|\iota_1|+|\iota_2|)}C_{(**)}(i_1, i_2, i_0) = (-1)^{|\iota_0|\cdot(|\iota_1|+|\iota_2|)}C_{\mathrm{Cycl}_1(**)}(i_1, i_2, i_0)$$

Или более сложный пример:

$$C_{((**)(**))}(i_0, i_1, i_2, i_3, i_4) = (\iota_H(h_{i_0}), -K_H(\iota_H(h_{i_1}) \wedge \iota_H(h_{i_2})) \wedge -K_H(\iota_H(h_{i_3}) \wedge \iota_H(h_{i_4})))_P$$
$$= (-1)^{|i_0|\cdot(|i_1|+|i_2|+|i_3|+|i_4|)}\,(-K_H(\iota_H(h_{i_1}) \wedge \iota_H(h_{i_2})), -K_H(\iota_H(h_{i_3}) \wedge \iota_H(h_{i_4})) \wedge \iota_H(h_{i_0}))_P$$
$$= (-1)^{|i_0|\cdot(|i_1|+|i_2|+|i_3|+|i_4|)+|i_1|+|i_2|}\,(\iota_H(h_{i_1}) \wedge \iota_H(h_{i_2}), -K_H(-K_H(\iota_H(h_{i_3}) \wedge \iota_H(h_{i_4})) \wedge \iota_H(h_{i_0})))_P$$
$$= (-1)^{|i_0|\cdot(|i_1|+|i_2|+|i_3|+|i_4|)+|i_1|+|i_2|}\,(\iota_H(h_{i_1}), \iota_H(h_{i_2}) \wedge -K_H(-K_H(\iota_H(h_{i_3}) \wedge \iota_H(h_{i_4})) \wedge \iota_H(h_{i_0})))_P$$
$$= (-1)^{|i_0|\cdot(|i_1|+|i_2|+|i_3|+|i_4|)+|i_1|+|i_2|}C_{(*((**)*))}(i_1, i_2, i_3, i_4, i_0)$$
$$= (-1)^{|i_0|\cdot(|i_1|+|i_2|+|i_3|+|i_4|)+|i_1|+|i_2|}C_{\mathrm{Cycl}_1((**)(**))}(i_1, i_2, i_3, i_4, i_0)$$

Далее, поскольку инвариантное скалярное произведение на $\mathfrak{g}$ также обладает циклическим свойством

$$\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}} T_a[T_b, T_c] = \mathrm{tr}_g T_b[T_c, T_a]$$

для слагаемых в (351) циклическая симметрия имеет вид

$$\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\left(P^{j\,i_0} p_j \iota_H(h_{i_0}), \mathrm{Iter}_{T;-K_H[\bullet,\bullet];[\bullet,\bullet]}(\iota_H(h_{i_1})\omega^{i_1}, \ldots, \iota_H(h_{i_{|T|}})\omega^{i_{|T|}})\right)_P$$
$$= \epsilon_{T,k}(D-2,1,\ldots,1) \cdot \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\iota_H(h_{i_k})\omega^{i_k}, \mathrm{Iter}_{\mathrm{Cycl}_k T;-K_H[\bullet,\bullet];[\bullet,\bullet]}(\iota_H(h_{i_{k+1}})\omega^{i_{k+1}}, \ldots,$$
$$, \iota_H(h_{i_{|T|}})\omega^{i_{|T|}}, P^{j\,i_0} p_j \iota_H(h_{i_0}), \iota_H(h_{i_1})\omega^{i_1}, \ldots, \iota_H(h_{i_{k-1}})\omega^{i_{k-1}}))_P$$

для $1 \leq k \leq |T|$. Знак $\epsilon_{T,k}(D-2,1,\ldots,1)$ появляется потому, что теперь мы должны при переставлении объектов учитывать их тотальную степень $\deg + \mathrm{gh}$, которая равна 1 для $\iota_H(h_{i_j})\omega^{i_j}$ и равна $D-2$ для $P^{j\,i_0} p_j \iota_H(h_{i_0})$. Поэтому мы можем переписать (351) как

$$S^0_{H^\bullet(M,\mathfrak{g})}(\omega, p) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{T \in \mathbf{T}_{\mathrm{nonPl}}\colon |T|=n} \frac{1}{(n+1)} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(T)|} \cdot$$
$$\cdot \sum_{j,i_0,\ldots,i_n} \Big(\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\left(P^{j\,i_0} p_j \iota_H(h_{i_0}), \mathrm{Iter}_{T;-K_H[\bullet,\bullet];[\bullet,\bullet]}(\iota_H(h_{i_1})\omega^{i_1}, \ldots, \iota_H(h_{i_n})\omega^{i_n})\right)_P +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \epsilon_{T,k}(D-2,1,\ldots,1) \cdot \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\iota_H(h_{i_k})\omega^{i_k}, \mathrm{Iter}_{\mathrm{Cycl}_k T;-K_H[\bullet,\bullet];[\bullet,\bullet]}(\iota_H(h_{i_{k+1}})\omega^{i_{k+1}}, \ldots,$$
$$, \iota_H(h_{i_n})\omega^{i_n}, P^{j\,i_0} p_j \iota_H(h_{i_0}), \iota_H(h_{i_1})\omega^{i_1}, \ldots, \iota_H(h_{i_{k-1}})\omega^{i_{k-1}}))_P\Big) \quad (353)$$

Для случая, когда размерность D многообразия M нечётна, свойство цикличности фейнмановских деревьев можно элегантно сформулировать, как существование некоторой функциии $F(\omega)$, такой что зависимость $S^0_{H^\bullet(M,\mathfrak{g})}(\omega, p)$ от супер-поля p имеет вид

$$S^0_{H^\bullet(M,\mathfrak{g})}(\omega, p) = \left(\mathrm{tr}_g \sum_{i,j} p_i P^{ij} \frac{\partial}{\partial \omega^j}\right) F(\omega) \quad (354)$$

где

$$F(\omega) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{T \in \mathbf{T}_{\mathrm{nonPl}}\colon |T|=n} \frac{1}{(n+1)} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(T)|} \cdot$$
$$\cdot \sum_{i_0,\ldots,i_n} \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\left(\iota_H(h_{i_0})\omega^{i_0}, \mathrm{Iter}_{T;-K_H[\bullet,\bullet];[\bullet,\bullet]}(\iota_H(h_{i_1})\omega^{i_1}, \ldots, \iota_H(h_{i_n})\omega^{i_n})\right)_P$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{T \in \mathbf{T}_{\mathrm{nonPl}}/\mathbb{Z}_{n+1}\colon |T|=n} \frac{1}{|\mathrm{Aut}_{\mathrm{cycl}}(T)|} \cdot$$
$$\cdot \sum_{i_0,\ldots,i_n} \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\left(\iota_H(h_{i_0})\omega^{i_0}, \mathrm{Iter}_{T;-K_H[\bullet,\bullet];[\bullet,\bullet]}(\iota_H(h_{i_1})\omega^{i_1}, \ldots, \iota_H(h_{i_n})\omega^{i_n})\right)_P$$
$$= \frac{1}{6} \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\iota_H(h_{i_0})\omega^{i_0}, [\iota_H(h_{i_1})\omega^{i_1}, \iota_H(h_{i_2})\omega^{i_2}])_P +$$
$$+ \frac{1}{8} \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\iota_H(h_{i_0})\omega^{i_0}, [\iota_H(h_{i_1})\omega^{i_1}, -K_H[\iota_H(h_{i_2})\omega^{i_2}, \iota_H(h_{i_3})\omega^{i_3}]])_P +$$

$$+\frac{1}{8}\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\iota_H(h_{i_0})\omega^{i_0},[-K_H[\iota_H(h_{i_1})\omega^{i_1},\iota_H(h_{i_2})\omega^{i_2}],-K_H[\iota_H(h_{i_3})\omega^{i_3},\iota_H(h_{i_4})\omega^{i_4}]])_P+\cdots$$

где $\mathbf{T}_{\mathrm{nonPl}}/\mathbb{Z}_{n+1}$ означает множество классов эквивалентности планарных деревьев, где эквивалентными объявляются во-первых два дерева, отличающиеся на изоморфизм (корневых деревьев), и во-вторых два дерева, отличающиеся на операцию Cycl_k для какого-нибудь k. Эти классы эквивалентности мы называем циклическими непланарными деревьями — корень в них не играет выделенной роли и равноправен листьям. Под группой автоморфизмов циклического дерева $\mathrm{Aut}_{\mathrm{cycl}}(T)$ мы понимаем группу $\mathbb{Z}_{n+1}\ltimes\mathrm{Aut}(T)$. Здесь важна нечётность D во-первых потому, что знаки в (353) $\epsilon_{T,k}(D-2,1,\ldots,1)=+1$ для нечётного D для любого дерева T и любого k, и во-вторых потому, что дифференциальный оператор $\mathrm{tr}_g\sum_{i,j}p_iP^{ij}\frac{\partial}{\partial\omega^j}$ чётен при нечётном D.

Функцию $F(\omega)\in\mathrm{Fun}(H^*(M,\mathfrak{g})[1])$ для случая $D=3$ можно понять, как древесную часть эффективного действия теории Черна-Саймонса на M, индуцированного на когомологиях $H^\bullet(M,\mathfrak{g})$.

В терминах индуцированной на когомологиях L_∞-структуры свойство (354) означает, что структурные константы L_∞-операции $l_{(n)}:\Lambda^nH^\bullet(M,\mathfrak{g})\to H^\bullet(M,\mathfrak{g})$ обладают свойством

$$l_{(n)}(h_{i_1},\ldots,h_{i_n})=\sum_{i,i_0}P^{i\,i_0}h_i l^{\mathrm{cycl}}_{(n+1)}(h_{i_0},h_{i_1},\ldots,h_{i_n})$$

или, иначе,

$$\big(h_{i_0},l_{(n)}(h_{i_1},\ldots,h_{i_n})\big)_P=l^{\mathrm{cycl}}_{(n+1)}(h_{i_0},h_{i_1},\ldots,h_{i_n})$$

где $l^{\mathrm{cycl}}_{n+1}:\Lambda^{n+1}H^\bullet(M,\mathfrak{g})\to\mathbb{R}$ — некоторое $(n+1)$-линейное супер-антисимметричное отображение степени $\deg l^{\mathrm{cycl}}_{(n+1)}=2-D-n$. Таким образом, циклическая симметрия для операций $l_{(n)}$ означает, что обращение выхода в них с помощью спаривания Пуанкаре увеличивает группу симметрии операции с S_n до S_{n+1}. Операции l^{cycl}_{n+1} связаны с разложением Тэйлора для $F(\omega)$:

$$F(\omega)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}\,l^{\mathrm{cycl}}_{n+1}(\underbrace{\omega,\ldots,\omega}_{n+1})$$

и вычисляются как суммы по циклическим деревьям:

$$l^{\mathrm{cycl}}_{n+1}(h_{i_0},\ldots,h_{i_n})=(-1)^{(|i_{n-1}|+1)\cdot|i_n|+(i_{n-2}+1)\cdot(|i_{n-1}|+|i_n|)+\cdots+(|i_0|+1)\cdot(|i_1|+\cdots+|i_n|)}\frac{\partial}{\partial\omega^{i_n}}\cdots\frac{\partial}{\partial\omega^{i_0}}F(\omega)$$
$$=\sum_{T\in\mathbf{T}_{\mathrm{nonPl}}/\mathbb{Z}_{n+1}:\,|T|=n}\frac{1}{|\mathrm{Aut}_{\mathrm{cycl}}(T)|}\sum_{\pi\in S_{n+1}}\pm\Big(\iota(h_{i_{\pi(0)}}),\mathrm{Iter}_{T;-K_H(\bullet\wedge\bullet);(\bullet\wedge\bullet)}(\iota(h_{i_{\pi(1)}}),\ldots,\iota(h_{i_{\pi(n)}}))\Big)_P$$

Знаки здесь зависят от степеней когомологий на входе операции и от выбора конкретного планарного корневого представителя для циклического дерева.

7.2.2. *Оценки на допустимые степени когомологий в фейнмановских диаграммах для* $S_{H^\bullet(M,\mathfrak{g})}$. Здесь мы не будем предполагать (если не оговорено обратного), что M ориентируемо и не имеет края, также мы будем рассматривать общее (не обязательно ходжевское) индуцирование $\Omega^\bullet(M,\mathfrak{g}) \xrightarrow{(\iota,r,K)} H^\bullet(M,\mathfrak{g})$. Тем не менее, мы, как обычно, считаем, что данные индуцирования тривиальны в $\mathfrak{g}$-коэффициентах. Представим эффективное действие на когомологиях в виде суммы вкладов отдельных фейнмановских диаграмм

$$S_{H^\bullet(M,\mathfrak{g})}(\omega,p) = \sum_{T\in\mathbf{T}_{\mathrm{nonPl}}:\,|T|\geq 2} S_{H^\bullet(M,\mathfrak{g}),T}(\omega,p) + \hbar \sum_{L\in\mathbf{L}_{\mathrm{nonPl}}} S_{H^\bullet(M,\mathfrak{g}),L}(\omega)$$

где

$$S_{H^\bullet(M,\mathfrak{g}),T}(\omega,p) = \frac{1}{|\mathrm{Aut}(T)|} < r^*p, \mathrm{Iter}_{T;-K[\bullet,\bullet];[\bullet,\bullet]}(\iota(\omega),\ldots,\iota(\omega)) >=$$
$$= \frac{1}{|\mathrm{Aut}(T)|} \sum_{j,i_1,\ldots,i_{|T|}} \epsilon_T(|i_1|,\ldots,|i_{|T|}|) C_T(j;i_1,\ldots,i_{|T|}) < p_j, \mathrm{Iter}_{T;[\bullet,\bullet];[\bullet,\bullet]}(\omega^{i_1},\ldots,\omega^{i_{|T|}}) >_{\mathfrak{g}} \tag{355}$$

$$S_{H^\bullet(M,\mathfrak{g}),L}(\omega) = \frac{1}{|\mathrm{Aut}(L)|} \mathrm{Loop}_{L;-K[\bullet,\bullet]}(\iota(\omega),\ldots,\iota(\omega)) =$$
$$= \frac{1}{|\mathrm{Aut}(L)|} \sum_{i_1,\ldots,i_{|L|}} \epsilon_L(|i_1|,\ldots,|i_{|L|}|) C_L(i_1,\ldots,i_{|T|}) \, \mathrm{Loop}_{L;[\bullet,\bullet]}(\omega^{i_1},\ldots,\omega^{i_{|L|}})$$

и де рамовские части диаграмм есть

$$\begin{aligned} C_T(j;i_1,\ldots,i_{|T|}) &= < r^*h^j, \mathrm{Iter}_{T;-K(\bullet\wedge\bullet);(\bullet\wedge\bullet)}(\iota(h_{i_1}),\ldots,\iota(h_{i_{|T|}})) > \\ C_L(i_1,\ldots,i_{|L|}) &= \mathrm{Loop}_{L;-K(\bullet\wedge\bullet)}(\iota(h_{i_1}),\ldots,\iota(h_{i_{|T|}})) \end{aligned}$$

Как и прежде, мы обозначаем $\{h_i\}$ базис в когомологиях $H^\bullet(M)$ и $\{h^i\}$ — двойственный базис в гомологиях $H_\bullet(M)$. Знаки $\epsilon_T, e_L = \pm 1$ возникают из-за протаскивания полей ω^i направо, и зависят от графа T или L и степеней когомологий.

Утверждение 16. • *Для всякого дерева T с $|T| \geq 3$ листьями для того, чтобы*

$$C_T(j;i_1,\ldots,i_{|T|}) \neq 0$$

необходимо

$$|i_1| \geq 1,\ldots,|i_{|T|}| \geq 1 \tag{356}$$

$$(|i_1|-1) + (|i_2|-1) + \cdots + (|i_{|T|}|-1) = |j| - 2 \tag{357}$$

Последнее условие, в частности, означает, что должна выполняться оценка

$$(|i_1|-1) + (|i_2|-1) + \cdots + (|i_{|T|}|-1) \leq D - 2 \tag{358}$$

Для случая ходжевского индуцирования (т.е. M ориентируемо и без края, $(\iota, r, K) = (\iota_H, r_H, K_H)$) оценка улучшается до

$$(|i_1| - 1) + (|i_2| - 1) + \cdots + (|i_{|T|}| - 1) \leq D - 3 \tag{359}$$

- *Для любого однопетлевого графа L для того, чтобы*

  $$C_L(i_1, \ldots, i_{|L|}) \neq 0$$

  необходимо

  $$|i_1| = \cdots = |i_{|L|}| = 1 \tag{360}$$

- *Если многообразие M обладает тривиальными 1-когомологиями $H^1(M) = 0$, то однопетлевая часть действия на когомологиях есть ноль*

  $$S^1_{H^\bullet(M,\mathfrak{g})}(\omega) = 0 \tag{361}$$

  и древесная часть является полиномом по полям ω^i степени

  $$\deg_\omega S^0_{H^\bullet(M,\mathfrak{g})} \leq \max(2, D-2) \tag{362}$$

  для ходжевского случая оценка улучшается до

  $$\deg_\omega S^0_{H^\bullet(M,\mathfrak{g})} \leq \max(2, D-4) \tag{363}$$

Доказательство. Условие (356) вытекает из следующего наблюдения: 0-когомологии могут вкладываться в $\Omega^\bullet(M)$ только как локально-постоянные функции, а умножение на локально-постоянную функцию переводит инфракрасные формы в инфракрасные и K-точные в K-точные. Поэтому любая диаграмма кроме (**), хотя бы один лист которой раскрашен 0-когомологией, либо содержит внутреннее ребро, на котором цепная гомотопия применяется к инфракрасной форме, либо содержит K^2, а значит, значение диаграммы есть ноль.

Далее, (357) есть переформулировка того факта, что классические операции $l_{(n)}$ имеют степень $2-n$. Иначе можно сказать, что (357) следует из того, что выражение (355) имеет духовое число 0. Или ещё более явно: при умножении форм степени складываются, при применении K — уменьшеются 1. Дерево с $|T|$ листьями содержит $|T| - 2$ внутренних ребра, поэтому

$$|\mathrm{Iter}_{T;-K(\bullet\wedge\bullet);(\bullet\wedge\bullet)}(\iota(h_{i_1}), \ldots, \iota(h_{i_{|T|}}))| = |i_1| + \cdots + |i_{|T|}| - (|T| - 2) = (|i_1| - 1) + \cdots + (|i_{|T|}| - 1) + 2$$

и поэтому, чтобы $C_T(j, i_1, \ldots, i_{|T|})$ не равнялось автоматически нулю, необходимо условие (357).

Оценка (358) является прямым следствием (356,357), и того факта, что степени гомологий не превосходят размерности многообразия D. Улучшение (359) этой оценки в ходжевском случае проходит потому, что если $h^j \in H_D(M)$, то

$$C_T(j; i_1, \ldots, i_{|T|}) = \sum_{i_0} P^{j\, i_0} C_T(i_0, \ldots, i_{|T|}) = 0$$

вследствие циклической симметрии (352) и того, что двойственная по Пуанкаре когомология для h^j лежит в $H^0(M)$, и мы возвращаемся к аргументу (356).

Условие (360) вытекает из следующего рассуждения. Из подсчёта степеней в $C_L(i_1, \ldots, i_{|L|})$ вытекает, что этот вклад автоматически равен нулю, если не выполнено

$$|i_1| + \cdots + |i_{|L|}| = |L|$$

Поэтому если не все степени входящих когомологий единицы, то есть по крайней мере одно k, такое что $|i_k| = 0$. Тогда в супер-следе $C_L(i_1, \ldots, i_{|L|})$ обязательно возникает одна из двух структур

$$K(\iota(h_{i_k}) \wedge h_{i_j}) = 0$$

$$K(\iota(h_{i_k}) \wedge K(\bullet)) = 0$$

Поэтому (360) доказано.

Свойство (361) очевидно вытекает из (360): если нет 1-когомологий, то автоматически все однопетлевые фейнмановские диаграммы равны нулю. Оценка (362) следует из (358) и того, что $i_k - 1 \geq 1$ для всех $1 \leq k \leq |T|$. Её улучшение (363) вытекает из (359) и того, что $H_{D-1}(M) = 0$ по двойственности Пуанкаре (а значит, равенство в (359) не может достигаться). $\Box$

Таким образом, случай $H^1(M) = 0$ является простым для вычисления эффективного BF-действия на когомологиях: все однопетлевые диаграммы равны нулю и лишь конечное число древесных диаграмм дают вклад. Самый простой случай — если в дополнение к $H^1(M) = 0$ многообразие M является формальным: существует вложение когомологий $\iota : H^\bullet(M) \to \Omega^\bullet(M)$, такое что $\iota(H^\bullet(M))$ является подалгеброй в $\Omega^\bullet(M)$ (т.е. у когомологий есть представители, замкнутые относительно внешнего умножения). Тогда вклад в $S_{H^\bullet(M,\mathfrak{g})}$ даёт единственная диаграмма $(**)$:

$$S_{H^\bullet(M,\mathfrak{g})} = S_{H^\bullet(M,\mathfrak{g}),(**)} = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} (-1)^{(|j|+1)\cdot|k|} m^i_{jk} < p_i, [\omega^j, \omega^k] >_{\mathfrak{g}} \qquad (364)$$

где

$$m^i_{jk} = C_{(**)}(i; j, k) =< r^* h^i, \iota(h_j) \wedge \iota(h_k) >$$

— структурные константы умножения когомологий.

В случае общего формального многообразия M (где не предполагается $H^1(M) = 0$), благодаря тому, что $\iota(H^\bullet(M))$ замкнуто относительно умножения, вклад в $S_{H^\bullet(M,\mathfrak{g})}$ даёт только диаграмма $(**)$ и однопетлевые диаграммы вида $(*(*\cdots(*\bullet)\cdots))$ (колёса). Поэтому эффективное действие на когомологиях имеет вид

$$S_{H^\bullet(M,\mathfrak{g})}(\omega,p) = \frac{1}{2} < r^*p, [\iota(\omega),\iota(\omega)] > +\hbar\,\mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(M,\mathfrak{g})}\log(1+K[\iota(\omega^{(1)}),\bullet]) \tag{365}$$

(это есть частный случай формулы (166), причём для рассматриваемого случая L_∞-морфизм U линеен и совпадает с вложением $U=\iota$). Мы обозначили $\omega^{(1)} = \sum_{i:\,|i|=1} h_i\omega^i$ — часть супер-поля ω, соответствующая 1-когомологиям.

Ещё одно очевидное следствие оценки (363) — отсутсвие операций Масси у односвязных ориентируемых компактных многообразий без края размерности $D<7$.

7.2.3. *Эффективное действие на когомологиях произведения многообразий.* Пусть есть два компактных связных многообразия M_1 и M_2, и мы интересуемся эффективным BF-действием на когомологиях произведения $H^\bullet(M_1\times M_2,\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}\otimes H^\bullet(M_1)\otimes H^\bullet(M_2)$. Мы предполагаем, что заданы данные индуцирования $\Omega^\bullet(M_1)\xrightarrow{(\iota_1,r_1,K_1)} H^\bullet(M_1)$ и $\Omega^\bullet(M_2)\xrightarrow{(\iota_2,r_2,K_2)} H^\bullet(M_2)$ и мы рассматриваем семейство данных индуцирования для произведения многообразий:

$$\Omega^\bullet(M_1\times M_2)\xrightarrow{(\iota_1\otimes\iota_2,r_1\otimes r_2,K^\xi)} H^\bullet(M_1\times M_2)$$

где

$$K^\xi = K_1\otimes((1-\xi)\mathrm{id}+\xi\mathcal{P}'_2) + (\xi\mathrm{id}+(1-\xi)\mathcal{P}'_1)\otimes K_2 \tag{366}$$

параметризованное числом $\xi\in\mathbb{R}$. Пусть $\{h_i^1\}$ и $\{h_i^2\}$ — базисы в $H^\bullet(M_1)$ и $H^\bullet(M_2)$, соответственно. Также обозначим $h_\circ^1$ и $h_\circ^2$ базисные элементы, лежащие в $H^0(M_1)$ и $H^0(M_2)$, соответственно. Мы предполагаем, что $h_\circ^1, h_\circ^2$ вкладываются в $\Omega^\bullet(M_1)$, $\Omega^\bullet(M_2)$ как единичные функции. Супер-поля для пространства полей

$$\mathcal{F}_{H^\bullet(M_1\times M_2,\mathfrak{g})} = T^*[-1](H^\bullet(M_1\times M_2,\mathfrak{g})[1])$$

имеют вид

$$\omega = \sum_{i,j} h_i^1\otimes h_j^2\,\omega^{ij},\quad p = \sum_{i,j} p_{ij}\,h^{2j}\otimes\,h^{1i}$$

где ω^{ij}, p_{ij} лежат в $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$, соответственно, и имеют духовые числа $\mathrm{gh}(\omega^{ij}) = 1-|i|-|j|$, $\mathrm{gh}(p_{ij}) = |i|+|j|-2$.

Утверждение 17. • *Если $H^1(M_2)=0$, то однопетлевые части эффективных действий на когомологиях для M_1 и $M_1\times M_2$ связаны как*

$$S^1_{H^\bullet(M_1\times M_2,\mathfrak{g})} = \chi(M_2)\cdot S^1_{H^\bullet(M_1,\mathfrak{g})}|_{\omega^i\mapsto\omega^{i\circ}} \tag{367}$$

для любого значения ξ в (366). Здесь $\chi(M_2)$ — эйлерова характеристика многообразия M_2.

- *Если когомологии M_2 совпадают с когомологиями точки $H^n(M_2) = \mathbb{R}^{\delta_{n,0}}$, то эффективные действия на когомологиях M_1 и $M_1 \times M_2$ совпадают с точностью до подстановки $\omega^i \mapsto \omega^{i\circ}$, $p_i \mapsto p_{i\circ}$:*

$$S_{H^\bullet(M_1\times M_2,\mathfrak{g})} = S_{H^\bullet(M_1,\mathfrak{g})}|_{\omega^i\mapsto\omega^{i\circ},p_i\mapsto p_{i\circ}} \tag{368}$$

для любого ξ в (366).

- *Если $M_2 = \mathcal{S}^1$ — окружность с базисом $h^2_+ \in H^0(\mathcal{S}^1), h^2_I \in H^1(\mathcal{S}^1)$ в когомологиях (мы предполагаем, что $\iota_2(h^2_+) = 1, \iota_2(h^2_I) = dt$ и используем стандартную цепную гомотопию K_I для $\mathcal{S}^1$), то эффективные действия на когомологиях M_1 и $M_1\times\mathcal{S}^1$ связаны как*

$$S_{H^\bullet(M_1\times\mathcal{S}^1,\mathfrak{g})} = \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(S^0_{H^\bullet(M_1,\mathfrak{g})}|_{\omega^i\mapsto\omega^{i+}+\vartheta\omega^{iI},\, p_i\mapsto(-1)^{|i|+1}p_{iI}+\vartheta p_{i+}}\right)+\hbar\,\chi(M_1)\cdot\mathrm{tr}_g\log\left(\frac{\sinh\frac{\mathrm{ad}_{\omega\circ I}}{2}}{\frac{\mathrm{ad}_{\omega\circ I}}{2}}\right) \tag{369}$$

для специального значения $\xi = 1$ в (366), т.е. для специального выбора асимметричной цепной гомотопии $K_R = K_1\otimes\mathcal{P}'_I + \mathrm{id}\otimes K_I$, стягивающей $\Omega^\bullet(M_1\times\mathcal{S}^1)$ на $H^\bullet(M_1\times\mathcal{S}^1)$. Здесь $\chi(M_1)$ — эйлерова характеристика M_1 и ϑ — вспомогательная нечётная переменная.

Доказательство. Докажем (367). Воспользуемся тем, что $S^1_{H^\bullet(M_1,\times M_2,\mathfrak{g})}$ зависит только от части супер-поля ω, соответствующей 1-когомологиям (360), причём $H^1(M_1\times M_2) = H^1(M_1)\otimes H^0(M_2) = H^1(M_1)\otimes h^2_\circ$, благодаря тому, что у M_2 по условию нет 1-когомологий. Поэтому

$$S^1_{H^\bullet(M_1\times M_2,\mathfrak{g})}$$
$$= -\sum_{L\in\mathbf{L}_{\mathrm{nonPl}}}\frac{1}{|\mathrm{Aut}(L)|}\sum_{i_1,\ldots,i_{|L|}}\mathrm{Loop}_{L;-K^\xi[\bullet,\bullet];\Omega^\bullet(M_1\times M_2,\mathfrak{g})}(\iota_1(h^1_{i_1})\otimes 1\,\omega^{i_1\circ},\ldots,\iota_1(h^1_{i_{|L|}})\otimes 1\,\omega^{i_{|L|}\circ})$$

Вклад в каждое слагаемое даёт только раскраска всех внутренних рёбер частью $K_1\otimes((1-\xi)\mathrm{id}+\xi\mathcal{P}'_2) = K_1\otimes(\mathcal{P}'_2+(1-\xi)\mathcal{P}''_2)$ цепной гомотопии K^ξ (поскольку оператор под супер-следом должен иметь степень $(0,0)$ в биградуировке на $\Omega^\bullet(M_1)\otimes\Omega^\bullet(M_2)$, в противном случае супер-след равен нулю автоматически). Поэтому

$$S^1_{H^\bullet(M_1\times M_2,\mathfrak{g})} = -\sum_{L\in\mathbf{L}_{\mathrm{nonPl}}}\frac{1}{|\mathrm{Aut}(L)|}\cdot$$
$$\cdot\sum_{i_1,\ldots,i_{|L|}}\mathrm{Loop}_{L;-K_1[\bullet,\bullet];\Omega^\bullet(M_1,\mathfrak{g})}(\iota_1(h^1_{i_1})\omega^{i_1\circ},\ldots,\iota_1(h^1_{i_{|L|}})\omega^{i_{|L|}\circ})\cdot\mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(M_2)}(\mathcal{P}'_2+(1-\xi)\mathcal{P}''_2)^{[L]}$$
$$= S^1_{H^\bullet(M_1,\mathfrak{g})}|_{\omega^i\mapsto\omega^{i\circ}}\cdot\mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(M_2)}(\mathcal{P}'_2+(1-\xi)^{[L]}\mathcal{P}''_2) = \chi(M_2)\cdot S^1_{H^\bullet(M_1,\mathfrak{g})}|_{\omega^i\mapsto\omega^{i\circ}}$$

где $[L]$ — длина цикла в L. Тем самым (367) доказано.

Докажем теперь (368). Равенство однопетлевых частей действий следует из (367), поэтому рассмотрим древесную часть. Поскольку $H^\bullet(M_2) = \mathbb{R}h^2_\circ$ и $H^\bullet(M_1 \times M_2) = H^\bullet(M_1) \otimes h^2_\circ$, супер-поля имеют вид

$$\omega = \sum_i h^1_i \otimes h^2_\circ \, \omega^{i\circ}, \quad p = \sum_i p_{i\circ} h^{2\circ} \otimes h^{1i}$$

Таким образом

$$S^0_{H^\bullet(M_1\times M_2,\mathfrak{g})} = \sum_{T\in \mathbf{T}_{\mathrm{nonPl}}:\ |T|\geq 2} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(T)|} \cdot$$
$$\cdot \sum_{i_0,i_1,\ldots,i_{|T|}} < p_{i_0\circ} h^{2\circ}\otimes h^{1 i_0}, r_1\otimes r_2 \,\mathrm{Iter}_{T;-K^\xi[\bullet,\bullet];[\bullet,\bullet]}(\iota_1(h^1_{i_1})\omega^{i_1\circ},\ldots,\iota_1(h^1_{i_{|T|}})\omega^{i_{|T|}\circ}) >$$

Здесь снова вклад даёт только раскраска всех внутренних рёбер частями $K_1\otimes(\mathcal{P}'_2 + (1-\xi)\mathcal{P}''_2)$ цепной гомотопии K^ξ (в противном случае во втором факторе возникает структура $K_2 1 = 0$). Поэтому

$$S^0_{H^\bullet(M_1\times M_2,\mathfrak{g})} = \sum_{T\in \mathbf{T}_{\mathrm{nonPl}}:\ |T|\geq 2} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(T)|} \cdot$$
$$\cdot \sum_{i_0,i_1,\ldots,i_{|T|}} < p_{i_0\circ} h^{1 i_0}, r_1 \,\mathrm{Iter}_{T;-K_1[\bullet,\bullet];[\bullet,\bullet]}(\iota_1(h^1_{i_1})\omega^{i_1\circ},\ldots,\iota_1(h^1_{i_{|T|}})\omega^{i_{|T|}\circ}) > \cdot$$
$$\cdot < h^{2\circ}, r_2 \,\mathrm{Iter}_{T;(\mathcal{P}'_2+(1-\xi)\mathcal{P}''_2)(\bullet\wedge\bullet);(\bullet\wedge\bullet)}(\underbrace{1,\ldots,1}_{|T|}) >= S^0_{H^\bullet(M_1,\mathfrak{g})}|_{\omega^i\mapsto\omega^{i\circ},p_i\mapsto p_{i\circ}} \cdot 1$$

Поэтому (368) доказано.

Перейдём к доказательству (369). Рассмотрим сначала древесную часть эффективного действия:

$$S^0_{H^\bullet(M_1\times \mathcal{S}^1,\mathfrak{g})} = \sum_{T\in \mathbf{T}_{\mathrm{nonPl}}:\ |T|\geq 2} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(T)|} \sum_{i_0,i_1,\ldots,i_{|T|}} \sum_{j_0,j_1,\ldots,j_{|T|}\in\{+,I\}} < p_{i_0 j_0} h^{2 j_0}\otimes h^{1 i_0},$$
$$, r_1\otimes r_2 \,\mathrm{Iter}_{T;-K_R[\bullet,\bullet];[\bullet,\bullet]}(\iota_1(h^1_{i_1})\otimes\iota_2(h^2_{j_1})\,\omega^{i_1 j_1},\ldots,\iota_1(h^1_{i_{|T|}})\otimes\iota_2(h^2_{j_{|T|}})\,\omega^{i_{|T|}j_{|T|}}) >$$

Поскольку формы Уитни на окружности $\mathrm{Span}(1,dt)$ замкнуты относительно внешнего умножения, вклад здесь будут давать только раскраски всех внутренних рёбер деревьев частью $K_1\otimes\mathcal{P}'_I$ цепной гомотопии K_R, причём проектор $\mathcal{P}'_I$ можно заменить тождественным оператором:

$$S^0_{H^\bullet(M_1\times \mathcal{S}^1,\mathfrak{g})} = \sum_{T\in \mathbf{T}_{\mathrm{nonPl}}:\ |T|\geq 2} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(T)|} \sum_{i_0,i_1,\ldots,i_{|T|}} \sum_{j_0,j_1,\ldots,j_{|T|}\in\{+,I\}} < p_{i_0 j_0} h^{2 j_0}\otimes h^{1 i_0},$$
$$, r_1\otimes r_2 \,\mathrm{Iter}_{T;-K_1\otimes\mathrm{id}[\bullet,\bullet];[\bullet,\bullet]}(\iota_1(h^1_{i_1})\otimes\iota_2(h^2_{j_1})\,\omega^{i_1 j_1},\ldots,\iota_1(h^1_{i_{|T|}})\otimes\iota_2(h^2_{j_{|T|}})\,\omega^{i_{|T|}j_{|T|}}) >$$

$$= \sum_{T\in\mathbf{T}_{\mathrm{nonPl}}:\ |T|\geq 2} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(T)|} \sum_{i_0,i_1,\dots,i_{|T|}} (< p_{i_0+}h^{2+}\otimes h^{1i_0},$$

$$, r_1\otimes r_2 \ \mathrm{Iter}_{T;-K_1\otimes\mathrm{id}[\bullet,\bullet];[\bullet,\bullet]}(\iota_1(h^1_{i_1})\otimes\iota_2(h^2_+)\ \omega^{i_1+},\dots,\iota_1(h^1_{i_{|T|}})\otimes\iota_2(h^2_+)\ \omega^{i_{|T|}+}) > +$$

$$+\sum_{k=1}^{|T|} < p_{i_0I}h^{2I}\otimes h^{1i_0}, r_1\otimes r_2\ \mathrm{Iter}_{T;-K_1\otimes\mathrm{id}[\bullet,\bullet];[\bullet,\bullet]}(\iota_1(h^1_{i_1})\otimes\iota_2(h^2_+)\ \omega^{i_1+},\dots,\iota_1(h^1_{i_{k-1}})\otimes\iota_2(h^2_+)\ \omega^{i_{k-1}+},$$

$$, \iota_1(h^1_{i_k})\otimes\iota_2(h^2_I)\ \omega^{i_kI}, \iota_1(h^1_{i_{k+1}})\otimes\iota_2(h^2_+)\ \omega^{i_{k+1}+},\dots,\iota_1(h^1_{i_{|T|}})\otimes\iota_2(h^2_+)\ \omega^{i_{|T|}+}) >\Big)$$

$$= \sum_{T\in\mathbf{T}_{\mathrm{nonPl}}:\ |T|\geq 2} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(T)|}\cdot$$

$$\cdot\sum_{i_0,i_1,\dots,i_{|T|}} \Big(< p_{i_0+}h^{1i_0}, r_1\ \mathrm{Iter}_{T;-K_1[\bullet,\bullet];[\bullet,\bullet]}(\iota_1(h^1_{i_1})\ \omega^{i_1+},\dots,\iota_1(h^1_{i_{|T|}})\ \omega^{i_{|T|}+}) > +$$

$$+ < p_{i_0I}h^{1i_0}, (-1)^{i_0}\frac{\partial}{\partial\vartheta} r_1\ \mathrm{Iter}_{T;-K_1[\bullet,\bullet];[\bullet,\bullet]}(\iota_1(h^1_{i_1})\ (\omega^{i_1+}+\vartheta\omega^{i_1I}),\dots,\iota_1(h^1_{i_{|T|}})\ (\omega^{i_{|T|}+}+\vartheta\omega^{i_{|T|}I}))\Big)$$

$$= \frac{\partial}{\partial\vartheta} \sum_{T\in\mathbf{T}_{\mathrm{nonPl}}:\ |T|\geq 2} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(T)|} \sum_{i_0,i_1,\dots,i_{|T|}} < (\vartheta p_{i_0+} + (-1)^{|i_0|+1}p_{i_0I})\ h^{1i_0},$$

$$, r_1\ \mathrm{Iter}_{T;-K_1[\bullet,\bullet];[\bullet,\bullet]}\Big(\iota_1(h^1_{i_1})\ (\omega^{i_1+}+\vartheta\omega^{i_1I}),\dots,\iota_1(h^1_{i_{|T|}})\ (\omega^{i_{|T|}+}+\vartheta\omega^{i_{|T|}I})\Big) >$$

$$= \frac{\partial}{\partial\vartheta}\Big(S^0_{H^\bullet(M_1,\mathfrak{g})}|_{\omega^i\mapsto\omega^{i+}+\vartheta\omega^{iI},\ p_i\mapsto(-1)^{|i|+1}p_{iI}+\vartheta p_{i+}}\Big)$$

Тем самым, древесная часть (369) доказана. Рассмотрим однопетлевую часть:

$$S^1_{H^\bullet(M_1\times\mathcal{S}^1,\mathfrak{g})} = -\sum_{L\in\mathbf{L}_{\mathrm{nonPl}}} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(L)|}\cdot$$

$$\cdot\sum_{i_1,\dots,i_{|L|}}\ \sum_{j_1,\dots,j_{|L|}\in\{+,I\}} \mathrm{Loop}_{L;-K_R[\bullet,\bullet];\Omega^\bullet(M_1\times\mathcal{S}^1,\mathfrak{g})}(\iota_1(h^1_{i_1})\otimes\iota_2(h^2_{j_1})\ \omega^{i_1j_1},\dots,\iota_1(h^1_{i_{|L|}})\otimes\iota_2(h^2_{j_{|L|}})\ \omega^{i_{|L|}j_{|L|}})$$

Поскольку $\mathrm{Span}(1,dt)$ замкнуто относительно умножения, вклад дают только такие раскраски слагаемых в этой сумме, где все внутренние рёбра, не находящиеся в цикле, раскрашены частью $K_1\otimes\mathcal{P}'_I$ цепной гомотопии K_R. С другой стороны, вследствие Леммы 7, все рёбра цикла, наоборот, должны быть раскрашены $\mathrm{id}\otimes K_I$. Далее, из (360) следует, что раскраска листьев L должна быть такой, что $|i_k|+|j_k|=1$ для всех листьев k, т.е. допускаются только листья с раскраской $i+$ или $\circ I$. Следующее рассуждение показывает, что вклад дают только колёса $L=(*(*\cdots(*\bullet)\cdots))$: в противном случае, пусть в цикл воткнуто какое-то дерево, тогда ровно один его лист имеет раскраску $\circ I$ и остальные — раскраску типа $i+$ (следствие Леммы 7). Поэтому (в первом факторе) возникает одна из следующих структур:

$$K_1(\iota_1(h^1_i)\wedge\iota_1(h^1_\circ))=0$$

$$K_1(\iota_1(h^1_\circ)\wedge K_1(\bullet))=0$$

Следовательно, вклад в однопетлевое действие дают только колёса:

$$S^1_{H^\bullet(M_1\times\mathcal{S}^1,\mathfrak{g})} = -\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(M_1\times\mathcal{S}^1,\mathfrak{g})}(K_I[dt\;\omega^{\circ I},\bullet])^n$$

$$= -\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(M_1)}1\cdot\mathrm{Str}_{\Omega^\bullet(\mathcal{S}^1)}(K_I(dt\wedge\bullet))^n\cdot\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}_{\omega^{\circ I}})^n = \chi(M_1)\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_n}{n\cdot n!}\,\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}_{\omega^{\circ I}})^n$$

$$= \chi(M_1)\cdot\mathrm{tr}_g\log\left(\frac{\sinh\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{\circ I}}}{2}}{\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{\circ I}}}{2}}\right)$$

И тем самым, (369) доказано. □

7.3. **Примеры.**

7.3.1. *Окружность, тор, сфера.* Точка pt даёт тривиальный пример индуцирования на когомологии, поскольку $H^\bullet(pt,\mathfrak{g})\cong\Omega^\bullet(pt,\mathfrak{g})\cong\mathfrak{g}$. Если обозначить базисную 0-когомологию $h_\circ\in H^0(pt)$ и считать, что она отождествляется в $\Omega^\bullet(pt)$ с единицей (условие нормировки), то

$$S_{H^\bullet(pt,\mathfrak{g})} =< p_\circ,\frac{1}{2}[\omega^\circ,\omega^\circ] >_{\mathfrak{g}}$$

(см. обсуждение симплициального BF-действия для 0-симплекса в начале раздела 5.5).

Первый нетривиальный пример индуцирования на когомологии даёт окружность $\mathcal{S}^1$. Результат для окружности нам уже известен, поскольку в разделе 5.5.3 было получено явное выражение (278) для эффективного действия для клеточного разбиения окружности $\Xi=\{[+],[01]\}$ с одной 0-клеткой и одной 1-клеткой. Поскольку коцепи $C^\bullet(\Xi,\mathfrak{g})$ для этого клеточного разбиения обладают нулевым дифференциалом, мы можем отождествить $H^\bullet(\mathcal{S}^1,\mathfrak{g})\cong C^\bullet(\Xi,\mathfrak{g})$, отождествляя базисные когомологии h_+,h_I с базисными коцепями e_+,e_{01}. Поэтому эффективное действие на когомологиях окружности есть

$$S_{H^\bullet(s^1,\mathfrak{g})} =< p_+,\frac{1}{2}[\omega^+,\omega^+] >_{\mathfrak{g}} + < p_I,[\omega^I,\omega^+] >_{\mathfrak{g}} +\hbar\,\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\log\left(\frac{\sinh\frac{\mathrm{ad}_{\omega^I}}{2}}{\frac{\mathrm{ad}_{\omega^I}}{2}}\right) \qquad (370)$$

Конструкция из раздела 5.5.3, приведшая к этому результату, соответствует следующему выбору данных индуцирования $\Omega^\bullet(\mathcal{S}^1,\mathfrak{g})\xrightarrow{(\iota,r,K)}H^\bullet(\mathcal{S}^1,\mathfrak{g})$ (склеенному из данных индуцирования для отрезка на коцепи стандартной триангуляции):

$$\begin{aligned}\iota:&\qquad \alpha^+h_++\alpha^Ih_I\mapsto\alpha^+\cdot 1+\alpha^I dt\\ r:&\qquad f(t)+g(t)dt\mapsto f(0)+\left(\int_{\mathcal{S}^1}g(\tilde t)d\tilde t\right)dt\\ K=K_I:&\qquad f(t)+g(t)dt\mapsto\int_0^t g(\tilde t)d\tilde t-t\int_{\mathcal{S}^1}g(\tilde t)d\tilde t\end{aligned}$$

Мы также можем более явно продемонстрировать, как работает конструкция (350,349), для случая окружности $M=\mathcal{S}^1$ и её клеточного разбиения (триангуляции) $\Xi=\{[0]=[2],[1],[01],[12]\}$ с двумя 0-симплексами $[0],[1]$ и двумя 1-симплексами $[01],[12]$ (имеется ввиду, что [2] — второе название 0-симплекса [0]). Симплициальное действие на Ξ вычисляется из известных ответов для укороченного действия для 0-симплекса и 1-симплекса и (187):

$$\begin{aligned} S_\Xi =&< p_0, \frac{1}{2}[\omega^0,\omega^0] >_{\mathfrak{g}} + < p_1, \frac{1}{2}[\omega^1,\omega^1] >_{\mathfrak{g}} + \\ &+ < p_{01}, \frac{1}{2}[\omega^{01},\omega^0+\omega^1] + \left(\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}{2}\coth\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}{2}\right)\circ(\omega^1-\omega^0) >_{\mathfrak{g}} + \hbar\,\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\log\left(\frac{\sinh\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}{2}}{\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}{2}}\right) + \\ &+ < p_{12}, \frac{1}{2}[\omega^{12},\omega^1+\omega^0] + \left(\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{12}}}{2}\coth\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{12}}}{2}\right)\circ(\omega^0-\omega^1) >_{\mathfrak{g}} + \hbar\,\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\log\left(\frac{\sinh\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{12}}}{2}}{\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{12}}}{2}}\right) \end{aligned} \tag{371}$$

Дифференциал на $C^\bullet(\Xi,\mathfrak{g})$ имеет вид

$$d:\quad \alpha^0 e_0 + \alpha^1 e_1 + \alpha^{01}e_{01} + \alpha^{12}e_{12} \mapsto (\alpha^1-\alpha^0)e_{01} + (\alpha^0-\alpha^1)e_{12}$$

Матрица дифференциала d (в базисе клеток, упорядоченном как $\{e_0,e_1,e_{01},e_{12}\}$), транспонированная к ней (аналог d^* для ходжевского случая) и матрица дискретного оператора Лапласа $d\,d^T + d^T d$ имеют вид

$$d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad d^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad d\,d^T + d^T d = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Поэтому разложение Ходжа для коцепей триангуляции Ξ есть

$$C^\bullet(\Xi) = \underbrace{\mathrm{Span}(e_0+e_1, e_{01}+e_{12})}_{\mathrm{Harm}^\bullet(\Xi)} \oplus \underbrace{\mathrm{Span}(e_{01}-e_{12})}_{C^\bullet_{d-ex}(\Xi)} \oplus \underbrace{\mathrm{Span}(e_1-e_0)}_{C^\bullet_{d^T-ex}(\Xi)}$$

Данные индуцирования с коцепей триангуляции на когомологии окружности $C^\bullet_{\Xi,\mathfrak{g}} \xrightarrow{(\iota_{\Xi\to H^\bullet}, r_{\Xi\to H^\bullet}, K_{\Xi\to H^\bullet})} H^\bullet(\mathcal{S}^1,\mathfrak{g})$ однозначно (с точностью до выбора нормировки базиса h_+, h_I в когомологиях) определяются разложением Ходжа:

$$\begin{aligned} \iota_{\Xi\to H^\bullet}:&\quad \alpha^+h_+ + \alpha^I h_I \mapsto \alpha^+(e_0+e_1) + \alpha^I\frac{1}{2}(e_{01}+e_{12}) \\ r_{\Xi\to H^\bullet}:&\quad \alpha^0 e_0 + \alpha^1 e_1 + \alpha^{01}e_{01} + \alpha^{12}e_{12} \mapsto \frac{1}{2}(\alpha^0+\alpha^1)h_+ + (\alpha^{01}+\alpha^{12})h_I \\ K_{\Xi\to H^\bullet}:&\quad \alpha^0 e_0 + \alpha^1 e_1 + \alpha^{01}e_{01} + \alpha^{12}e_{12} \mapsto \frac{1}{4}(\alpha_{01}-\alpha_{12})(e_1-e_0) \end{aligned}$$

Эффективное действие на когомологиях $H^\bullet(\mathcal{S}^1,\mathfrak{g})$ можно вычислить с помощью (166). Нетрудно видеть, что L_∞-морфизм (162) между когомологиями и коцепями триангуляции обрывается на линейном члене (поскольку гармонические коцепи образуют подалгебру в L_∞-алгебре коцепей, порождённой древесной частью (371)):

$$U(\omega^+ h_+ + \omega^I h_I) = \iota_{\Xi\to H^\bullet}(\omega^+ h_+ + \omega^I h_I) = (e_0+e_1)\omega^+ + \frac{1}{2}(e_{01}+e_{12})\omega^I \qquad (372)$$

Оператор (167) (который следует понимать как часть оператора $d+\mathcal{I}(\omega_\Xi)$ — оператора дискретной ковариантной производной на коцепях, на фоне дискретной супер-связности ω_Ξ) вычисляется дифференцированием древесной части действия (371):

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(\omega_\Xi) : \alpha^0 e_0 + \alpha^1 e_1 + \alpha^{01} e_{01} + \alpha^{12} e_{12} \mapsto e_0[\omega^0,\alpha^0] + e_1[\omega^1,\alpha^1] + \\
+ e_{01}\Bigg(\frac{1}{2}[\omega^{01},\alpha^0+\alpha^1] + \frac{1}{2}[\alpha^{01},\omega^0+\omega^1] + \left(\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}{2}\coth\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{01}}}{2} - 1\right)\circ(\alpha^1-\alpha^0) + \\
+ \sum_{n=2}^\infty \frac{B_n}{n!}\sum_{k=1}^n (\mathrm{ad}_{\omega^{01}})^{k-1}\mathrm{ad}_{\alpha^{01}}(\mathrm{ad}_{\omega^{01}})^{n-k}\circ(\omega^1-\omega^0)\Bigg) + \\
+ e_{12}\Bigg(\frac{1}{2}[\omega^{12},\alpha^1+\alpha^0] + \frac{1}{2}[\alpha^{01},\omega^0+\omega^1] + \left(\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{12}}}{2}\coth\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{12}}}{2} - 1\right)\circ(\alpha^0-\alpha^1) + \\
+ \sum_{n=2}^\infty \frac{B_n}{n!}\sum_{k=1}^n (\mathrm{ad}_{\omega^{12}})^{k-1}\mathrm{ad}_{\alpha^{12}}(\mathrm{ad}_{\omega^{12}})^{n-k}\circ(\omega^0-\omega^1)\Bigg)\end{aligned}$$

Для случая, когда симплициальная супер-связность ω_Ξ приходит из супер-связности на когомологиях $\omega_\Xi = U(\omega_{H^\bullet})$ (а именно этот случай нужен для (166)), выражение для оператора $\mathcal{I}$ упрощается:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(U(\omega^+ h_+ + \omega^I h_I)) : \quad \alpha^0 e_0 + \alpha^1 e_1 + \alpha^{01} e_{01} + \alpha^{12} e_{12} \mapsto e_0[\omega^+,\alpha^0] + e_1[\omega^+,\alpha^1] + \\
+ e_{01}\left(\frac{1}{4}[\omega^I,\alpha^0+\alpha^1] - [\omega^+,\alpha^{01}] + \left(\frac{\mathrm{ad}_{\omega^I}}{4}\coth\frac{\mathrm{ad}_{\omega^I}}{4} - 1\right)\circ(\alpha^1-\alpha^0)\right) + \\
+ e_{12}\left(\frac{1}{4}[\omega^I,\alpha^1+\alpha^0] - [\omega^+,\alpha^{12}] + \left(\frac{\mathrm{ad}_{\omega^I}}{4}\coth\frac{\mathrm{ad}_{\omega^I}}{4} - 1\right)\circ(\alpha^0-\alpha^1)\right)\end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned}K_{\Xi\to H^\bullet}\mathcal{I}(U(\omega^+ h_+ + \omega^I h_I)) : \quad \alpha^0 e_0 + \alpha^1 e_1 + \alpha^{01} e_{01} + \alpha^{12} e_{12} \mapsto \\
\mapsto (e_1-e_0)\left(-\frac{1}{4}[\omega^+,\alpha^{01}-\alpha^{12}] + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{ad}_{\omega^I}}{4}\coth\frac{\mathrm{ad}_{\omega^I}}{4} - 1\right)\circ(\alpha^1-\alpha^0)\right)\end{aligned}$$

Поэтому логарифм кручения (169) есть

$$\begin{aligned}\log\tau(\omega_{H^\bullet}) = \mathrm{Str}_{C^\bullet(\Xi,\mathfrak{g})}\log(1+K_{\Xi\to H^\bullet}\mathcal{I}(U(\omega_{H^\bullet}))) \\
= \mathrm{Str}_{C^\bullet_{d^T-ex}(\Xi,\mathfrak{g})}\log(1+K_{\Xi\to H^\bullet}\mathcal{I}(U(\omega_{H^\bullet}))) = \mathrm{tr}_\mathfrak{g}\log\left(\frac{\mathrm{ad}_{\omega^I}}{4}\coth\frac{\mathrm{ad}_{\omega^I}}{4}\right) \qquad (373)\end{aligned}$$

Наконец, подставляя (371,372,373) в (166), получаем

$$S_{H^\bullet(\mathcal{S}^1,\mathfrak{g})} = S_{C^\bullet(\Xi,\mathfrak{g})}|_{\omega_\Xi \mapsto U(\omega_{H^\bullet}), p_\Xi \mapsto r^*_{\Xi\to H^\bullet} p_{H^\bullet}} + \hbar\ \log\tau$$

$$= < p_+, \frac{1}{2}[\omega^+,\omega^+] >_{\mathfrak{g}} + < p_I, [\omega^I,\omega^+] >_{\mathfrak{g}} + \hbar\, 2\,\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}} \log\left(\frac{\sinh\frac{\mathrm{ad}_{\omega^I}}{4}}{\frac{\mathrm{ad}_{\omega^I}}{4}}\right) + \hbar\,\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\log\left(\frac{\mathrm{ad}_{\omega^I}}{4}\coth\frac{\mathrm{ad}_{\omega^I}}{4}\right)$$

$$= < p_+, \frac{1}{2}[\omega^+,\omega^+] >_{\mathfrak{g}} + < p_I, [\omega^I,\omega^+] >_{\mathfrak{g}} + \hbar\,\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\log\left(\frac{\sinh\frac{\mathrm{ad}_{\omega^I}}{2}}{\frac{\mathrm{ad}_{\omega^I}}{2}}\right)$$

И мы снова пришли к результату (370). Заметим, что некоторое чудо (характерное именно для размерности 1) состоит в том, что два разных способа индуцирования дают не просто эквивалентные результаты (отличающиеся на каноническое преобразование), а в точности одинаковые.

Ещё одна серия примеров явно вычислимого действия на когомологиях — тор $\mathbb{T}^D$ размерности $D \geq 2$ с асимметричной цепной гомотопией (последовательно стягивающей окружности в $\mathbb{T}^D$ в произвольном порядке). Это вычисление было проделано в разделе 6.4, и, поскольку было вычислено эффективное действие (347) для клеточного разбиения $\Xi = \{+, I\}^{\times D}$, обладающего нулевым дифференциалом на клеточных коцепях, имеет место изоморфизм $C^\bullet(\Xi,\mathfrak{g}) \cong H^\bullet(\mathbb{T}^D,\mathfrak{g})$. Поэтому мы можем буквально отождествить клеточное действие (347) с действием на когомологиях и положить супер-поля для когомологий тождественно равными супер-полям для клеточного разбиения: $\omega_{H^\bullet} = \omega_\Xi,\ p_{H^\bullet} = p_\Xi$. И точно также результат (346) мы можем понять как действие для $\mathbb{T}^2$ на когомологиях с симметричной цепной гомотопией.

Далее, задача вычисления эффективного действия на когомологиях для сферы $\mathcal{S}^D$ произвольной размерности $D \geq 2$ является тривиальной, благодаря (364): сфера является формальным многообразием с тривиальными 1-когомологиями. Обозначая базис в когомологиях сферы $h_\circ \in H^0(\mathcal{S}^D),\ h_\Phi \in H^D(\mathcal{S}^D)$, получаем из (364)

$$S_{H^\bullet(\mathcal{S}^D,\mathfrak{g})} = < p_\circ, \frac{1}{2}[\omega^\circ,\omega^\circ] >_{\mathfrak{g}} + < p_\Phi, [\omega^\Phi,\omega^\circ] >_{\mathfrak{g}}$$

То есть, для случая сферы действие на когомологиях производит обычную структуру алгебры Ли на $H^\bullet(\mathcal{S}^D,\mathfrak{g})$, все классические и квантовые операции кроме $l_{(2)}$ равны нулю (также, как и для точки, и для тора в асимметричной калибровке).

Большое количество примеров точно вычислимого действия на когомологиях можно получить из Утверждения 17. Например, для произведения окружности на сферу $M = \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^2$ древесная часть действия вычисляется из (365), а однопетлевая — из (367). Используя базис h_+, h_I в $H^\bullet(\mathcal{S}^1)$ и базис $h_\circ, h_\Phi$ в $H^\bullet(\mathcal{S}^2)$, получаем

$$S_{H^\bullet(\mathcal{S}^1\times\mathcal{S}^2,\mathfrak{g})} = < p_{+\circ}, \frac{1}{2}[\omega^{+\circ},\omega^{+\circ}] >_{\mathfrak{g}} + < p_{I\circ}, [\omega^{I\circ},\omega^{+\circ}] >_{\mathfrak{g}} + < p_{+\Phi}, [\omega^{+\Phi},\omega^{+\circ}] >_{\mathfrak{g}} +$$

$$+ < p_{I\Phi}, [\omega^{I\Phi},\omega^{+\circ}] + [\omega^{I\circ},\omega^{+\Phi}] >_{\mathfrak{g}} + \hbar\, 2\,\mathrm{tr}_g \log\left(\frac{\sinh\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{I\circ}}}{2}}{\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{I\circ}}}{2}}\right)$$

Коэффициент 2 в однопетлевой части происходит из эйлеровой характеристики сферы $\mathcal{S}^2$.

7.3.2. *Бутылка Клейна.* Эффективное действие на когомологиях бутылки Клейна можно вычислить с помощью конструкции (350,349) и пользуясь полученным в разделе 6.4 результатом (348) для клеточного действия для специального клеточного разбиения $\Xi = \{++, -I, I+, II\}$ бутылки Клейна.

Дифференциал на коцепях $C^\bullet(\Xi, \mathfrak{g})$ имеет вид

$$d: \quad \alpha^{++}e_{++} + \alpha^{-I}e_{-I} + \alpha^{I+}e_{I+} + \alpha^{II}e_{II} \mapsto 2\alpha^{-I}e_{II}$$

Матрица дифференциала d, транспонированная к ней d^T и матрица клеточного лапласиана $d\,d^T + d^T d$ в клеточном базисе $\{e_{++}, e_{-I}, e_{I+}, e_{II}\}$ имеют вид

$$d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad d^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad d\,d^T + d^T d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Следовательно, разложение Ходжа для клеточных коцепей на Ξ есть

$$C^\bullet(\Xi) = \underbrace{\mathrm{Span}(e_{++}, e_{I+})}_{\mathrm{Harm}^\bullet(\Xi)} \oplus \underbrace{\mathrm{Span}(e_{II})}_{C^\bullet_{d-ex}(\Xi)} \oplus \underbrace{\mathrm{Span}(e_{-I})}_{C^\bullet_{d^*-ex}(\Xi)}$$

Обозначим h_{++}, h_{I+} базисные 0- и 1-когомологию бутылки Клейна, причём нормируем их так, чтобы они отождествлялись при вложении в коцепи с e_{++} и e_{I+}, соответственно. Тогда данные индуцирования однозначно определены разложением Ходжа:

$$\begin{aligned} \iota_{\Xi\to H^\bullet}: &\quad \alpha^{++}h_{++} + \alpha^{I+}h_{I+} \mapsto \alpha^{++}e_{++} + \alpha^{I+}e_{I+} \\ r_{\Xi\to H^\bullet}: &\quad \alpha^{++}e_{++} + \alpha^{-I}e_{-I} + \alpha^{I+}e_{I+} + \alpha^{II}e_{II} \mapsto \alpha^{++}h_{++} + \alpha^{I+}h_{I+} \\ K_{\Xi\to H^\bullet}: &\quad \alpha^{++}e_{++} + \alpha^{-I}e_{-I} + \alpha^{I+}e_{I+} + \alpha^{II}e_{II} \mapsto \frac{1}{2}\alpha^{II}e_{-I} \end{aligned}$$

Далее, $\mathfrak{g}e_{++} \oplus \mathfrak{g}e_{I+}$ является подалгеброй L_∞-алгебры на коцепях Ξ, порождённой древесной частью действия (348), и поэтому L_∞-морфизм между когомологиями и коцепями Ξ линеен:

$$U(\omega_{H^\bullet}) = \iota_{\Xi\to H^\bullet}(\omega_{H^\bullet}) = e_{++}\omega^{++} + e_{I+}\omega^{I+}$$

Оператор (167) вычисляется дифференцированием древесной части (348):

$$\mathcal{I}(\omega_\Xi): \quad \alpha^{++}e_{++}+\alpha^{-I}e_{-I}+\alpha^{I+}e_{I+}+\alpha^{II}e_{II} \mapsto e_{++}[\omega^{++}, \alpha^{++}]+e_{-I}([\omega^{-I}, \alpha^{++}]-[\omega^{++}, \alpha^{-I}])+$$
$$+\, e_{I+}([\omega^{I+}, \alpha^{++}] - [\omega^{++}, \alpha^{I+}]) + e_{II}([\omega^{II}, \alpha^{++}] + [\omega^{++}, \alpha^{II}])+$$

$$+\,2e_{II}\left(\left(\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{I+}}}{2}\coth\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{I+}}}{2}-1\right)\circ\alpha^{-I}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_n}{n!}\sum_{k=1}^{n}(\mathrm{ad}_{\omega^{I+}})^{k-1}\mathrm{ad}_{\alpha^{I+}}(\mathrm{ad}_{\omega^{I+}})^{n-k}\circ\omega^{-I}\right)$$

Следовательно

$$K_{\Xi\to H^\bullet}\mathcal{I}(U(\omega_{H^\bullet})):\quad \alpha^{++}e_{++}+\alpha^{-I}e_{-I}+\alpha^{I+}e_{I+}+\alpha^{II}e_{II}\mapsto$$
$$\mapsto e_{-I}\left(\frac{1}{2}[\omega^{++},\alpha^{II}]+\left(\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{I+}}}{2}\coth\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{I+}}}{2}-1\right)\circ\alpha^{-I}\right)$$

И значит, логарифм кручения есть

$$\log\tau(\omega_{H^\bullet})\;=\;\mathrm{Str}_{C^\bullet_{d^T-ex}(\Xi,\mathfrak{g})}\log(1+K_{\Xi\to H^\bullet}\mathcal{I}(U(\omega_{H^\bullet})))\;=\;-\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\log\left(\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{I+}}}{2}\coth\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{I+}}}{2}\right)$$

(знак возник из-за того, что оператор, от которого вычисляется супер-след, нетривиален на 1-формах). Следовательно, эффективное действие на когомологиях бутылки Клейна имеет вид

$$S_{H^\bullet(\mathrm{KB},\mathfrak{g})}=S_{C^\bullet(\Xi,\mathfrak{g})}|_{\omega_\Xi\to U(\omega_{H^\bullet}),\,p_\Xi\to r^*_{\Xi\to H^\bullet}p_{H^\bullet}}+\hbar\,\log\tau$$
$$=<p_{++},\frac{1}{2}[\omega^{++},\omega^{++}]>_{\mathfrak{g}}+<p_{I+},[\omega^{I+},\omega^{++}]>_{\mathfrak{g}}-\hbar\,\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\log\left(\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{I+}}}{2}\coth\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{I+}}}{2}\right)\quad(374)$$

Результат (374) очень интересен в сравнении с (370): когомологии окружности и бутылки Клейна изоморфны $H^\bullet(\mathcal{S}^1,\mathfrak{g})\cong H^\bullet(\mathrm{KB},\mathfrak{g})$ и древесные части эффективных действий на когомологиях (370,374) совпадают при отождествлении $h_+=h_{++},h_I=h_{I+}$ (иначе говоря, индуцированные L_∞-структуры на когомологиях, или операции Масси, совпадают, что эквивалентно рациональной гомотопической эквивалентности многообразий). Однако, однопетлевые части эффективных действий на когомологиях (иначе, квантовые операции Масси) не совпадают. Тем самым, у нас есть пример пары рационально гомотопически эквивалентных многообразий, различаемых квантовыми операциями на когомологиях. Это означает, что гомотопический тип алгебры де Рама многообразия, как qL_∞-алгебры (в смысле Определения 17), является вообще говоря более тонким инвариантом многообразия, чем гомотопический тип алгебры де Рама, как классической L_∞-алгебры (который эквивалентен рациональному гомотопическому типу самого многообразия).

Можно поинтересоваться, не являются ли на самом деле действия (374) и (370) эквивалентными, т.е., не существует ли канонического преобразования, переводящего одно в другое? Ответ на этот вопрос отрицательный по следующей причине: рассмотрим плотности меры на соответствующих qL_∞-алгебрах

$$\rho_{H^\bullet(\mathcal{S}^1,\mathfrak{g})}\quad=\quad e^{S^1_{H^\bullet(\mathcal{S}^1,\mathfrak{g})}}=\det{}_{\mathfrak{g}}\left(\frac{\sinh\frac{\mathrm{ad}_{\omega^I}}{2}}{\frac{\mathrm{ad}_{\omega^I}}{2}}\right),$$

$$
\begin{aligned}
\rho_{H^\bullet(\mathrm{KB},\mathfrak{g})} &= e^{S^1_{H^\bullet(\mathrm{KB},\mathfrak{g})}} = \det\nolimits_{\mathfrak{g}}\left(\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{I+}}}{2}\coth\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{I+}}}{2}\right)^{-1} \\
&= \rho_{H^\bullet(\mathcal{S}^1,\mathfrak{g})}|_{\omega^I\mapsto\omega^{I+}}\cdot\left(\det\nolimits_{\mathfrak{g}}\cosh\frac{\mathrm{ad}_{\omega^{I+}}}{2}\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

Можно заметить, что плотность для окружности является регулярным по ω^I выражением, обращающимся в ноль, если какое-нибудь собственное число ad_{ω^I} имеет вид $2\pi ik$ при $k\neq 0$. В то же время плотность для бутылки Клейна обращается в бесконечность, если какое-то собственное число $\mathrm{ad}_{\omega^{I+}}$ есть $\pi i(2k+1)$ при $k\in\mathbb{Z}$. Поэтому действия для окружности и бутылки Клейна не могут быть переведены друг в друга каноническим преобразованием с регулярным по ω генератором.

Факт, что $\rho_{H^\bullet(\mathrm{KB},\mathfrak{g})}$ взрывается при некоторых значениях ω^{I+} (далеко от нуля), не случаен, но связан с тем, что пространство модулей плоских связностей на бутылке Клейна $\mathrm{Hom}(\pi_1(\mathrm{KB}),G)$ содержит сингулярности, причём ближайшее к нулю значение ω^{I+}, при котором плотность взрывается, в точности соответствует ближайшей к нулю особенности пространства модулей плоских связностей. В то же время, пространство модулей плоских связностей на окружности $\mathrm{Hom}(\pi_1(\mathcal{S}^1),G)=\mathrm{Hom}(\mathbb{Z},G)\cong G$ является гладким многообразием, что соответствует регулярному поведению плотности для окружности $\rho_{H^\bullet(\mathcal{S}^1,\mathfrak{g})}$.

Список литературы

[1] D. H. Adams, *R-torsion and linking numbers from simplicial abelian gauge theories*, arXiv:hep-th/9612009

[2] T. Agoh, K. Dilcher, *Convolution identities and lacunary recurrences for Bernoulli numbers,* Journal of Number Theory 124, 1 (2006), 105-122

[3] M. Aleksandrov, M. Kontsevich, A. Schwarz and O. Zaboronsky, *The geometry of the master equation and topological quantum field theory,* Int. J. Mod. Phys. A 12 (1997), 1405-1430

[4] V. Alexandrov, D. Krotov, A. Losev, V. Lysov, *On pure spinor superfield formalism,* arXiv:0705.2191

[5] Ф. А. Березин, *Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными,* МГУ (1983)

[6] I. Batalin, G. Vilkovisky, *Gauge algebra and quantization,* Physics Letters 102B, 27 (1981)

[7] I. Batalin, G. Vilkovisky, *Quantization of gauge theories with linearly dependent generators,* Phys. Rev. D29, 2567 (1983)

[8] A. Bousfield, V. Guggenheim, *On PL de Rham theory and rational homotopy type,* Mem. Amer. Math. Soc. 179 (1976)

[9] A. S. Cattaneo, P. Cotta-Ramusino, J. Froehlich, M. Martellini, *Topological BF theories in 3 and 4 dimensions*, J. Math. Phys. 36 (1995) 6137-6160

[10] A. S. Cattaneo and G. Felder, *A path integral approach to the Kontsevich quantization formula*, arXiv:math.QA/9902090

[11] A. S. Cattaneo and C. A. Rossi, *Higher-dimensional BF theories in the Batalin-Vilkovisky formalism: the BV action and generalized Wilson loops,* arXiv:math.QA/0010172

[12] X. Cheng, E. Getzler, *Transferring homotopy commutative algebraic structures,* arXiv:math.AT/0610912

[13] K. Costello, *Renormalisation and the Batalin-Vilkovisky formalism,* arXiv:math.QA/0706.1533

[14] J. Dupont, *Simplicial de Rham cohomology and characteristic classes of flat bundles,* Topology 15 (1976), 233-245

[15] E. Getzler, *Lie theory for nilpotent L_∞-algebras,* math.AT/0404003

[16] H. Ikemori, *Extended form method for antifield-BRST formalism for BF theories,* arXiv:hep-th/9205111

[17] H. Khudaverdian, *Semidensities on odd symplectic supermanifolds,* arXiv:math.DG/0012256

[18] A. A. Kirillov, *Elements of the Theory of Representations*, vol. 220 of Grundlehren Math. Wiss., Springer, Berlin, 1976

[19] M. Kontsevich, *Deformation quantization of Poisson manifolds*, q-alg/9709040

[20] M. Kontsevich, Y. Soibelman, *Homological mirror symmetry and torus fibrations*, arXiv:math/0011041

[21] R. Lawrence, D. Sullivan, *A free differential Lie algebra for the interval,* arXiv:math.AT/0610949

[22] D. Krotov, A. Losev, *Quantum field theory as effective BV theory from Chern-Simons,* arXiv:hep-th/0603201

[23] S. Merkulov, *PROP profile of deformation quantization and graph complexes with loops and wheels,* arXiv:math/0412257

[24] P. Mnev, *Notes on simplicial BF theory*, arXiv:hep-th/0610326

[25] A. Schwarz, *Geometry of Batalin-Vilkovisky quantization,* Commun. Math. Phys. 155 (1993) 249-260

[26] P. Ševera, *On the origin of the BV operator on odd symplectic supermanifolds,* arXiv:math/0506331

[27] D. Sullivan, *Infinitesimal computations in topology,* Publications Mathematiques de l'IHÉS, 47 (1977), 269-331

[28] J. C. Wallet, *Algebraic set-up for the gauge fixing of BF and super BF systems,* Phys. Lett. B 235 (1990) 71-78

[29] H. Whitney, *Geometric integration theory,* Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957

[30] E. Witten, *Quantum field theory and the Jones polynomial,* Commun. Math. Phys. 121, 3 (1989) 351-399

Публикации автора по теме диссертации.

[31] П. Н. Мнёв, *О симплициальной супер-BF модели,* Записки научных семинаров ПОМИ 331 (2006), 84-90

[32] П. Н. Мнёв, *О симплициальной BF-теории,* Доклады АН 418, 3 (2008), 1-5