САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра физики высоких энергий
и элементарных частиц

Мнёв Павел Николаевич

Недоразвитая турбулентность

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА
Научный руководитель: профессор Ю. М. Письмак

Санкт-Петербург
2002

Наша задача состоит в том, чтобы описать турбулентность, возникающую в потоке вязкой несжимаемой жидкости (воды), протекающей через решетку. В предлагаемой модели данного процесса мы считаем, что течение жидкости описывается уравнением Навье-Стокса, а влияние решетки мы заменяем на случайную объемную силу, действующую в плоскости (или в слое, толщина которого устремляется к нулю).

Таким образом, начальная постановка задачи такая:

$$(\partial_t + (\vec{v}(x)\cdot\nabla))\vec{v}(x) = \nu\Delta\vec{v}(x) - \frac{1}{\rho}\nabla p(x) + \vec{\eta}(x) \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\vec{v}(x) = 0 \tag{2}$$

$$\vec{v}(x) \to v_0\vec{e}_3 \quad \text{при} \quad x_3 \to -\infty \tag{3}$$

Здесь мы считаем, что жидкость течет из $x_3 \to -\infty$ со скоростью $v_0\vec{e}_3$, $\vec{e}_3$ — единичный вектор, направленный вдоль оси x_3, ν — вязкость жидкости, ρ — плотность, $p(x)$ — давление, $\vec{v}(x)$ — скорость течения в точке $x = (t, \vec{x}) = (x_0, \vec{x})$. Обозначение x_0 для времени вводится для удобства записи преобразования Фурье. Случайную внешнюю силу мы обозначили $\vec{\eta}(x)$. То, что написано — это, конечно, постановка не стохастической, а детерминированной задачи гидродинамики. То есть, мы можем задать какую-то внешнюю силу $\vec{\eta}(x)$ и, решая уравнение Навье-Стокса, найти поле скорости жидкости $\vec{v}(x)$. Стохастическую задачу мы получим, когда зададим свойства случайной силы. Например, решим, что она подчиняется гауссовому распределению с нулевым средним и некоторым заданным парным коррелятором.

Приведем теперь задачу к безразмерному виду, то есть, сделаем следующие подстановки:

$$x = \frac{\nu}{v_0}x', t = \frac{\nu}{v_0^2}t', \vec{v} = v_0\vec{v}', \vec{\eta} = \frac{v_0^3}{\nu}\vec{\eta}', \frac{p}{\rho} = v_0^2\frac{p'}{\rho'}$$

Штрихи у новых безразмерных переменных мы не будем писать, чтобы не загромождать формулы. Теперь уравнения (1)-(3) переписываются в виде

$$(\partial_t + (\vec{v}(x)\cdot\nabla))\vec{v}(x) = \Delta\vec{v}(x) - \frac{1}{\rho}\nabla p(x) + \vec{\eta}(x) \tag{4}$$

$$\nabla\cdot\vec{v}(x) = 0 \tag{5}$$

$$\vec{v}(x) \to \vec{e}_3 \quad \text{при} \quad x_3 \to -\infty \tag{6}$$

Дальше мы переходим от поля $\vec{v}(x)$ к сдвинутому полю $\vec{\phi}(x) = \vec{v}(x) - \vec{e}_3$ (которое имеет смысл флуктуационной составляющей скорости) и берем от уравнения Навье-Стокса поперечную часть:

$$(\partial_0 + \partial_3 - \Delta)\phi_i(x) = [\mathcal{P}_{ij}\eta_j](x) - [\mathcal{P}_{ij}\phi_l\partial_l\phi_j](x) \tag{7}$$

$$\phi_i(x) \to 0, \quad x_3 \to -\infty \tag{8}$$

Здесь $\mathcal{P}_{ij}$ — трехмерный поперечный проектор,

$$\mathcal{P}_{ij}(x,y) = \left[\delta_{ij}\delta(\vec{x}-\vec{y}) + \partial_i\partial_j\frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|}\right]\delta(x_0-y_0)$$

— его ядро в координатном представлении.

Следующий шаг — сделать преобразование Фурье

$$\phi_i(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int dk\, e^{ikx}\phi_i(k)$$

(здесь $kx = k_0x_0 + \vec{k}\cdot\vec{x}$ — евклидово скалярное произведение). Уравнение (7) тогда переписывается как

$$\phi_i(k) = G(k)\mathcal{P}_{ij}(\vec{k})\eta_j(k) - G(k)\mathcal{P}_{ij}(\vec{k})\frac{ik_l}{(2\pi)^4}\int dk'\,\phi_l(k-k')\phi_j(k'), \tag{9}$$

где $G(k) = \frac{1}{ik_0+ik_3+\vec{k}^2}$ — функция Грина дифференциального оператора из (7), $\mathcal{P}_{ij}(\vec{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\vec{k}^2}$ — трехмерный поперечный проектор в импульсном представлении. В координатном представлении

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{e^{ikx}dk}{ik_0+ik_3+\vec{k}^2} = \frac{\theta(x_0)}{(4\pi x_0)^{3/2}}\exp\left(-\frac{x_\perp^2+(x_3-x_0)^2}{4x_0}\right) \tag{10}$$

Введем еще

$$G_{1\,ij}(x) = \int dy G(x-y)\mathcal{P}_{ij}(y)$$
$$= \int dy \frac{\theta(x_0)}{(4\pi x_0)^{3/2}}\exp\left(-\frac{(x_\perp-y_\perp)^2+(x_3-x_0-y_3)^2}{4x_0}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\delta_{ij}\delta(\vec{y}) + \partial_j\partial_j\frac{1}{4\pi|\vec{y}|}\right)$$

Интегральное уравнение на ϕ (9) в координатном представлении записывается как

$$\phi_i(x) = \int dy G_{1\,ij}(x-y)\eta_j(y) - \int dy G_{1\,ij}(x-y)\phi_l(y)\partial_l\phi_j(y) \tag{11}$$

Функция Грина (10) — единственная функция Грина оператора $\partial_0 + \partial_3 - \Delta$, затухающая при $x_3 \to -\infty$. Однако, если мы выберем произвольную $\vec{\eta}(x)$, может оказаться, что решение уравнения (11) не удовлетворяет условию (8). Чтобы этого избежать достаточно наложить на $\vec{\eta}(x)$ условие убывания на бесконечности.

Для того, чтобы поставить стохастическую задачу, нам нужно задать коррелятор случайной силы. Мы предполагаем, что коррелятор должен быть сосредоточен на плоскости $x_3 = 0$ (плоскость решетки) и в одновременном секторе, кроме того он должен быть инвариантен относительно трансляций и поворотов в плоскости решетки. Если учесть все условия кроме изотропии, получим

$$\langle\eta_i(x)\eta_j(y)\rangle = \delta(x_0-y_0)\delta(x_3)\delta(y_3)(2\pi)^{-2}\int d\vec{k}_\perp e^{i\vec{k}_\perp\cdot(\vec{x}_\perp-\vec{y}_\perp)}N_{ij}(\vec{k}_\perp), \tag{12}$$

или, в импульном представлении,

$$\langle\eta_i(k)\eta_j(k')\rangle = \delta(k_0+k_0')\delta(\vec{k}_\perp+\vec{k}'_\perp)(2\pi)^3 N_{ij}(\vec{k}_\perp) \tag{13}$$

Здесь $\vec{x}_\perp = (x_1, x_2)$, $\vec{k}_\perp = (k_1, k_2)$, $k_\perp = |\vec{k}_\perp|$, $N_{ij}(\vec{k}_\perp)$ — "функция накачки". Теперь попробуем выяснить, какие условия на $N_{ij}(\vec{k}_\perp)$ накладывает изотропность коррелятора. Введем временно обозначение

$$f_{ij}(\vec{x}_\perp-\vec{y}_\perp) = (2\pi)^{-2}\int d\vec{k}_\perp e^{i\vec{k}_\perp\cdot(\vec{x}_\perp-\vec{y}_\perp)}N_{ij}(\vec{k}_\perp),$$

или

$$\langle\eta_i(x)\eta_j(y)\rangle = \delta(x_0-y_0)\delta(x_3)\delta(y_3)f_{ij}(\vec{x}_\perp-\vec{y}_\perp)$$

Чтобы понять, что означает вращательная инвариантность коррелятора, представим себе, что мы интересуемся средним значением произведения проекции случайной силы в точке x на вектор $\vec{n}$ и проекции силы в точке y на какой-то свой вектор $\vec{n}'$:

$$\langle(\vec{n}\cdot\vec{\eta}(x))(\vec{n}'\cdot\vec{\eta}(y))\rangle = \delta(x_0-y_0)\delta(x_3)\delta(y_3)\vec{n}\cdot\hat{f}(\vec{x}_\perp-\vec{y}_\perp)\vec{n}' \tag{14}$$

Справа здесь имеется ввиду матричное действие f_{ij} на вектор $\vec{n}'$. Изотропия в нашем случае означает, что если мы повернем одновременно вокруг оси x_3 вектора $\vec{x}_\perp - \vec{y}_\perp$,

$\vec{n}$ и $\vec{n}'$, то выражение в левой части (14) не должно измениться. Поэтому для любого поворота вокруг x_3 $\hat{R}$

$$\vec{n} \cdot \hat{f}(\vec{x}_\perp)\vec{n}' = \hat{R}\vec{n} \cdot \hat{f}(\hat{R}\vec{x}_\perp)\hat{R}\vec{n}',$$

а, поскольку это имеет место при любых $\vec{n}, \vec{n}'$, мы можем написать

$$\hat{f}(\hat{R}\vec{x}_\perp) = \hat{R}\hat{f}(\vec{x}_\perp)\hat{R}^T$$

В терминах функции накачки $N_{ij}(\vec{k}_\perp)$ это свойство переписывается очевидным образом:

$$\hat{N}(\hat{R}\vec{k}_\perp) = \hat{R}\hat{N}(\vec{k}_\perp)\hat{R}^T$$

Отсюда вытекает, что мы можем выразить $N_{ij}(k_1, k_2)$ через $N_{ij}(k_\perp, 0)$. Для этого в качестве $\hat{R}$ мы должны использовать поворот, переводящий вектор $(k_\perp, 0)$ в вектор (k_1, k_2). Такой поворот один:

$$\hat{R} = \frac{1}{k_\perp}\begin{pmatrix} k_1 & -k_2 & 0 \\ k_2 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & k_\perp \end{pmatrix}$$

Получаем:

$$\hat{N}(k_1, k_2) = \frac{1}{k_\perp^2}\begin{pmatrix} k_1 & -k_2 & 0 \\ k_2 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & k_\perp \end{pmatrix} \hat{N}(k_\perp, 0) \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & 0 \\ -k_2 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & k_\perp \end{pmatrix} \tag{15}$$

Однако, мы учли еще не все симметрии коррелятора: мы забыли симметричность $\langle \eta_j(k')\eta_i(k)\rangle = \langle \eta_i(k)\eta_j(k')\rangle$ или, что то же самое, $N_{ji}(-\vec{k}_\perp) = N_{ij}(\vec{k}_\perp)$. Из (15) видим, что

$$\hat{N}(-k_\perp, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \hat{N}(k_\perp, 0) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

С другой стороны, должно быть $\hat{N}(-k_\perp, 0) = \hat{N}^T(k_\perp, 0)$. Поэтому

$$\hat{N}(k_\perp, 0) = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ N_{12} & N_{22} & N_{23} \\ -N_{13} & -N_{23} & N_{33} \end{pmatrix}$$

Тем самым мы получили, что в общем случае коррелятор выражается через 6 произвольных функций $N_{11}(k_\perp), N_{12}(k_\perp), N_{22}(k_\perp), N_{13}(k_\perp), N_{23}(k_\perp), N_{33}(k_\perp)$. Фактически мы будем считать, что эти функции отличаются лишь коэффициентами:

$$\langle \eta_i(k)\eta_j(k')\rangle =$$
$$= (2\pi)^3\delta(k_0 + k_0')\delta(\vec{k}_\perp + \vec{k}'_\perp)\frac{N(k_\perp)}{k_\perp^2}\begin{pmatrix} k_1 & -k_2 & 0 \\ k_2 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & k_\perp \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ -d & -e & f \end{pmatrix} \cdot$$
$$\cdot \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & 0 \\ -k_2 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & k_\perp \end{pmatrix}$$

Здесь посередине стоит матрица коэффициентов, $N(k_\perp)$ — функция накачки. Мы будем считать

$$N(k_\perp) = k_\perp^\alpha(k_\perp^2 + m^2)^{-\beta},$$

где m — параметр решетки, создающей турбулентность, α и β — какие-то показатели.

Теперь, наконец, стохастическая задача поставлена — задан коррелятор случайной силы, и мы можем найти коррелятор флуктуационной составляющей скорости в главном приближении, пользуясь уравнением (9):

$$\begin{aligned}
&\langle\phi_i(k)\phi_j(k')\rangle = \\
&= G(k)G(k')\mathcal{P}_{il}(\vec{k})\langle\eta_l(k)\eta_m(k')\rangle\mathcal{P}_{mj}(\vec{k}') = \\
&= (2\pi)^3\delta(k_0+k_0')\delta(\vec{k}_\perp+\vec{k}_\perp')\cdot \\
&\cdot\frac{1}{ik_0+ik_3+\vec{k}^2}\cdot\frac{1}{-ik_0+ik_3'+\vec{k}'^2}\cdot\frac{k_\perp^\alpha(k_\perp^2+m^2)^{-\beta}}{k_\perp^2\vec{k}^2\vec{k}'^2}T_{ij}(\vec{k}_\perp,k_3,k_3'),
\end{aligned} \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned}
&\hat{T}(\vec{k}_\perp,k_3,k_3') = \\
&\begin{pmatrix} k_2^2+k_3^2 & -k_1k_2 & -k_1k_3 \\ -k_1k_2 & k_1^2+k_3^2 & -k_2k_3 \\ -k_1k_3 & -k_2k_3 & k_1^2+k_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 & -k_2 & 0 \\ k_2 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & k_\perp \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ -d & -e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & 0 \\ -k_2 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & k_\perp \end{pmatrix}\cdot \\
&\cdot\begin{pmatrix} k_2^2+k_3'^2 & -k_1k_2 & k_1k_3' \\ -k_1k_2 & k_1^2+k_3'^2 & k_2k_3' \\ k_1k_3' & k_2k_3' & k_1^2+k_2^2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{17}$$

Учитывая, что нам нужно будет считать преобразование Фурье от $\langle\phi_i(k)\phi_j(k')\rangle$, тензор $\hat{T}$ имеет смысл разложить на две части:

$$\hat{T} = \cdots\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & c & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}\cdots+\cdots\begin{pmatrix} 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & e \\ -d & -e & 0 \end{pmatrix}\cdots = \hat{T}_1+k_\perp\hat{T}_2$$

Матричные элементы $T_{1\,ij}$ — полиномы 6-й степени от k_1,k_2,k_3,k_3'; элементы $T_{2\,ij}$ — полиномы 5-й степени. Нас интересует коррелятор в координатном представлении

$$\langle\phi_i(x)\phi_j(x')\rangle = \tilde{T}_{1\,ij}F_\alpha(x,x')+\tilde{T}_{2\,ij}F_{\alpha+1}(x,x'), \tag{18}$$

где $\tilde{T}_{1\,ij}$ и $\tilde{T}_{2\,ij}$ получаются из $T_{1\,ij}$ и $T_{2\,ij}$ заменой

$$k_1,k_2,k_3,k_3' \to -i\partial_1,-i\partial_2,-i\partial_3,-i\partial_3';$$

$$\begin{aligned}
F_\alpha =&(2\pi)^{-8}\int dk\,dk'\,e^{i(kx+k'x')}(2\pi)^3\delta(k_0+k_0')\delta(\vec{k}_\perp+\vec{k}_\perp')\cdot \\
&\cdot\frac{1}{ik_0+ik_3+\vec{k}^2}\cdot\frac{1}{-ik_0+ik_3'+\vec{k}'^2}\cdot\frac{k_\perp^\alpha(k_\perp^2+m^2)^{-\beta}}{k_\perp^2\vec{k}^2\vec{k}'^2}
\end{aligned} \tag{19}$$

Интеграл (19) расходится в области малых импульсов, поэтому формулы (18) и (19) следует понимать в том смысле, что дифференциальные операторы применяются непосредственно к подынтегральному выражению. После этого интеграл уже должен сходиться.

Положим для определенности $x_0 > x_0'$. Тогда в (19) три интегрирования снимаются δ-функциями, интеграл по k_0 берется по вычетам:

$$\begin{aligned}
F_\alpha =& (2\pi)^{-4}\cdot \\
&\cdot\int d\vec{k}_\perp\,dk_3\,dk_3'\exp\left(-(ik_3+\vec{k}^2)(x_0-x_0')+i\vec{k}_\perp\cdot(\vec{x}_\perp-\vec{x}_\perp')+ik_3x_3+ik_3'x_3'\right)\cdot \\
&\cdot\frac{1}{ik_3+ik_3'+k_3^2+k_3'^2+2k_\perp^2}\cdot\frac{k_\perp^\alpha(k_\perp^2+m^2)^{-\beta}}{k_\perp^2\vec{k}^2\vec{k}'^2}
\end{aligned}$$

Следующий шаг — свести интеграл по импульсам к интегралу по параметрам $A_1 \dots A_5$. Для этого мы делаем следующие замены:

$$\frac{1}{ik_3 + ik_3' + k_3^2 + k_3'^2 + 2k_\perp^2} = \int_0^\infty dA_1\, e^{-A_1(ik_3 + ik_3' + k_3^2 + k_3'^2 + 2k_\perp^2)},$$

$k_\perp^{\alpha-2} = \frac{1}{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}\int_0^\infty dA_2\, A_2^{-\frac{\alpha}{2}} e^{-A_2 k_\perp^2}$, $(k_\perp^2 + m^2)^{-\beta} = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^\infty dA_3\, A_3^{\beta-1} e^{-A_3(k_\perp^2+m^2)}$, $\frac{1}{\vec{k}^2} = \int_0^\infty dA_4\, e^{-A_4 \vec{k}^2}$, $\frac{1}{\vec{k}'^2} = \int_0^\infty dA_5\, e^{-A_5 \vec{k}'^2}$. После этого мы получаем гауссов интеграл по импульсам. Теперь мы сузим рассмотрение на случай $x_0 = x_0'$ и заменим, пользуясь трансляционной инвариантностью $\vec{x}_\perp - \vec{x}'_\perp$ на $\vec{x}_\perp$. Тогда мы получаем

$$\begin{aligned} F_\alpha = &\frac{1}{16\pi^2\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})\Gamma(\beta)} \cdot \\ &\cdot \int_0^\infty dA_1 \cdots dA_5\, A_2^{-\frac{\alpha}{2}} A_3^{\beta-1} e^{-m^2 A_3} (2A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5)^{-1} \cdot \\ &\cdot (A_1 + A_4)^{-\frac{1}{2}} (A_1 + A_5)^{-\frac{1}{2}} \cdot \\ &\cdot \exp\left\{-\frac{1}{4}\left[\frac{x_\perp^2}{2A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5} + \frac{(x_3 - A_1)^2}{A_1 + A_4} + \frac{(x_3' - A_1)^2}{A_1 + A_5}\right]\right\} \end{aligned} \quad (20)$$

Дальше мы искусственно вставляем в (20) $\int_0^\infty dC\, \delta(2A_1 + A_3 + A_4 + A_5 - C)$ и получаем

$$F_\alpha = \frac{1}{16\pi^2\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})\Gamma(\beta)} \int_0^\infty dC\, I(x_\perp^2, C) I_1(C) \quad (21)$$

Здесь введены функции

$$I(x_\perp^2, C) = \int_0^\infty dA_2\, A_2^{-\frac{\alpha}{2}} (A_2 + C)^{-1} \exp\left(-\frac{x_\perp^2}{4(C + A_2)}\right)$$

и

$$\begin{aligned} I_1(C) = &\int_0^\infty dA_1 dA_3 dA_4 dA_5\, \delta(2A_1 + A_3 + A_4 + A_5 - C) A_3^{\beta-1} e^{-m^2 A_3} \cdot \\ &\cdot (A_1 + A_4)^{-\frac{1}{2}} (A_1 + A_5)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{4}\left[\frac{(x_3 - A_1)^2}{A_1 + A_4} + \frac{(x_3' - A_1)^2}{A_1 + A_5}\right]\right\} \end{aligned}$$

Представление (21) примечательно тем, что в нем зависимость от $x_\perp^2$ и от x_3, x_3' оказалась разделена между I и I_1. Для I при $C \ll x_\perp^2$ имеет место асимптотика

$$I \simeq 2^\alpha \Gamma(\frac{\alpha}{2}) x_\perp^{-\alpha},$$

а при $C \gg x_\perp^2$ удобно пользоваться рядом Тейлора

$$I = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n \Gamma(1-\frac{\alpha}{2})\Gamma(n+\frac{\alpha}{2})}{4^n n!^2} \frac{x_\perp^{2n}}{C^{n+\frac{\alpha}{2}}}$$

Асимптотики (при $C \to \infty$) для I_1 также можно найти. Для этого удобно представление

$$I_1(C) = \int_0^C dD\, (C - D)^{\beta-1} e^{-m^2(C-D)} I_2(D), \quad (22)$$

где введена новая функция

$$I_2(D)=\int_0^\infty dA_1dA_4dA_5\,\delta(2A_1+A_4+A_5-D)\cdot$$
$$\cdot(A_1+A_4)^{-\frac12}(A_1+A_5)^{-\frac12}\exp\left\{-\frac14\left[\frac{(x_3-A_1)^2}{A_1+A_4}+\frac{(x_3'-A_1)^2}{A_1+A_5}\right]\right\}=$$
$$=\frac12\int_{-D}^{D}dA_-\int_{|A_-|}^{D}dA_+\,(D^2-A_-^2)^{-\frac12}\exp\left\{-\frac18\left[\frac{(D-A_+-2x_3)^2}{D+A_-}+\frac{(D-A_+-2x_3')^2}{D-A_-}\right]\right\}=$$
$$=D^{\frac12}\int_{-1}^{1}dx\int_0^{D^{\frac12}\frac{1-|x|}{2}}dy\,(1-x^2)^{-\frac12}\exp\left\{-\frac12\left[\frac{(y-D^{-\frac12}x_3)^2}{1+x}+\frac{(y-D^{-\frac12}x_3')^2}{1-x}\right]\right\}\simeq$$
$$\simeq\sqrt{\pi}D^{\frac12}\quad\text{при}\quad D\gg\max\left\{1,x_3^2,x_3'^2\right\}$$

Нам потребуются кроме того некоторые производные I_2. Они получаются аналогично и мы приведем их без вывода:

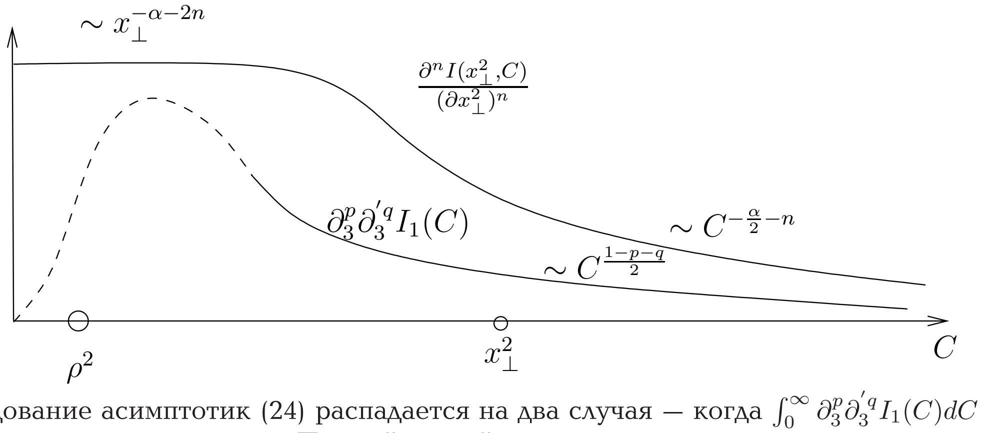
$$\begin{gathered}I_2\simeq\sqrt{\pi}D^{\frac12},\ \partial_3I_2\simeq\partial_3'I_2\simeq\frac{\pi}{2},\ \partial_3^2I_2\simeq\partial_3'^2I_2\simeq-\partial_3\partial_3'I_2\simeq-\frac{\sqrt{\pi}}{2}D^{-\frac12}\\ \partial_3^2\partial_3'I_2\simeq\partial_3\partial_3'^2\simeq-\sqrt{\pi}D^{-\frac32},\ \partial_3^2\partial_3'^2I_2\simeq\frac74\sqrt{\pi}D^{-\frac32}\end{gathered}\tag{23}$$

— все при том же условии $D\gg\max\left\{1,x_3^2,x_3'^2\right\}$. Пользуясь тем, что все эти асимптотики степенные, мы, в пределе $C\gg\rho^2$, где $\rho^2=\max\left\{1,\frac{1}{m^2},x_3^2,x_3'^2\right\}$, имеем право заменить в (22) $I_2(D)$ на значение в конечной точке интервала интегрирования, на $I_2(C)$. Тем самым

$$\partial_3^p\partial_3'^qI_1(C)\simeq m^{-2\beta}\Gamma(\beta)\partial_3^p\partial_3'^qI_2(C)$$

Наша задача сейчас — найти асимптотику коррелятора $\langle\phi_i(x)\phi_j(y)\rangle$ при $|\vec{x}_\perp-\vec{y}_\perp|\to\infty$. Для этого (см. (18)) нужно знать асимптотики производных F_α при $x_\perp^2\to\infty$:

$$\partial_3^p\partial_3'^q\frac{\partial^n}{(\partial x_\perp^2)^n}F_\alpha=\frac{1}{16\pi^2\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})\Gamma(\beta)}\int_0^\infty dC\,\frac{\partial^nI(x_\perp^2,C)}{(\partial x_\perp^2)^n}\partial_3^p\partial_3'^qI_1(C)\tag{24}$$



Исследование асимптотик (24) распадается на два случая — когда $\int_0^\infty\partial_3^p\partial_3'^qI_1(C)dC$ расходится и когда он сходится. Первый случай реализуется при

$$(p,q)=(0,0),\,(1,0),\,(0,1),\,(2,0),\,(0,2),\,(1,1)\tag{25}$$

Тогда (24) убывает медленнее, чем $x_\perp^{-\alpha-2n}$, и мы можем замнить в (24) $\partial_3^p\partial_3'^qI_1(C)$ на асимптотику при $C\gg\rho^2$. Второй же случай имеет место для

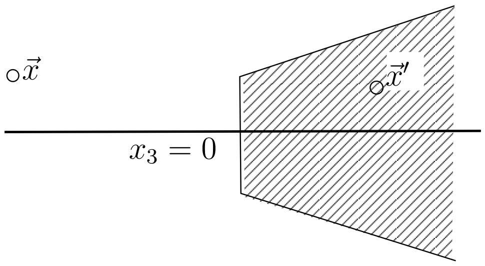
$$(p,q)=(2,1),\,(1,2),\,(2,2)\tag{26}$$

При этом (24) убывает как $x_\perp^{-\alpha-2n}$ и мы можем заменить $\frac{\partial^n I(x_\perp^2,C)}{(\partial x_\perp^2)^n}$ на асимптотику при $C \ll x_\perp^2$.

В случае (25) интеграл (24) после указанной замены ,берется точно:

$$\partial_3^p \partial_3'^q \frac{\partial^n}{(\partial x_\perp^2)^n} F_\alpha \simeq \frac{\epsilon_{pq} 2^{p+q+\alpha} \Gamma(\frac{\alpha+p+q-3}{2})}{256\pi\Gamma(\frac{5-p-q-\alpha}{2})} m^{-2\beta} \frac{\partial^n}{(\partial x_\perp^2)^n} x_\perp^{3-p-q-\alpha} \tag{27}$$

при $x_\perp \gg \rho$. Здесь введено ϵ_{pq}, определяемое как $\epsilon_{02} = \epsilon_{20} = -1$ и $\epsilon_{pq} = 1$ в остальных случаях. Область действия асимптотик можно себе представлять следующим образом: если фиксировать $\vec{x}$, $\vec{x}'$ должно попасть в заштрихованную область.



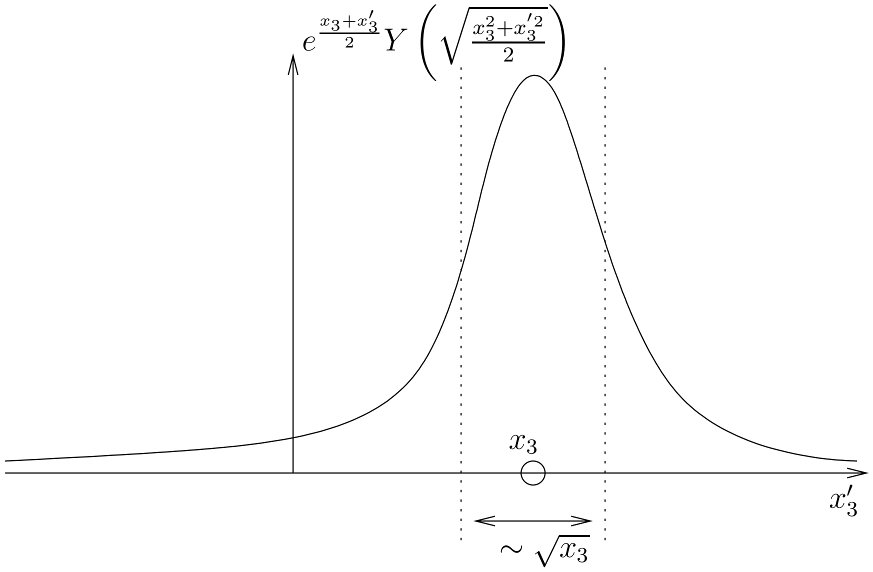
Переходя к случаю (26), рассмотрим вариант $p = q = 2$. После описанной замены интеграл (24) снова упрощается:

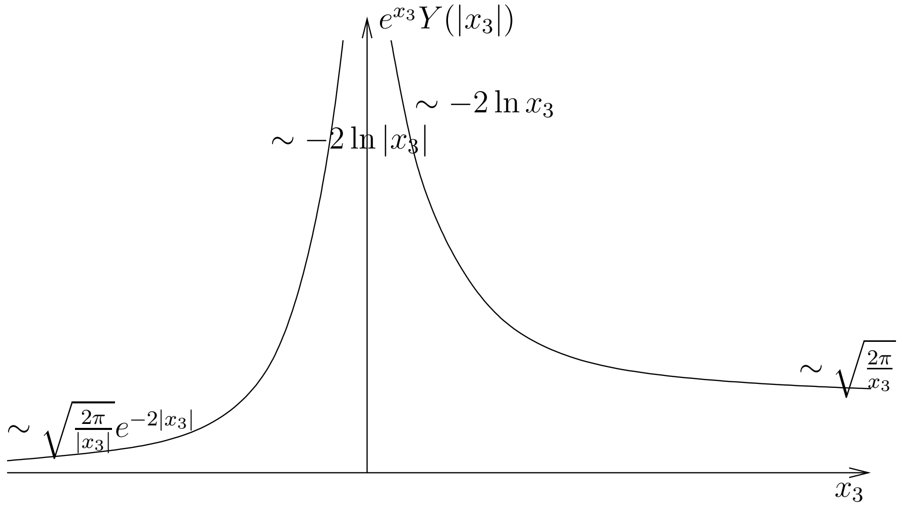
$$\partial_3^2 \partial_3'^2 F_\alpha = \frac{2^\alpha \Gamma(\frac{\alpha}{2})}{16\pi^2 \Gamma(1-\frac{\alpha}{2})} m^{-2\beta} x_\perp^{-\alpha} e^{\frac{x_3+x_3'}{2}} Y\left(\sqrt{\frac{x_3^2+x_3'^2}{2}}\right), \tag{28}$$

где

$$Y(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda\,\mathrm{ch}t} dt$$

Функция $Y(\lambda)$ имеет следующие асимптотики: $Y(\lambda) \simeq \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} e^{-\lambda}$ при $\lambda \to \infty$ и $Y(\lambda) \simeq -2\ln\lambda$ при $\lambda \to 0$. Асимптотика (28), как и (27), работает в области $x_\perp \gg \rho$.





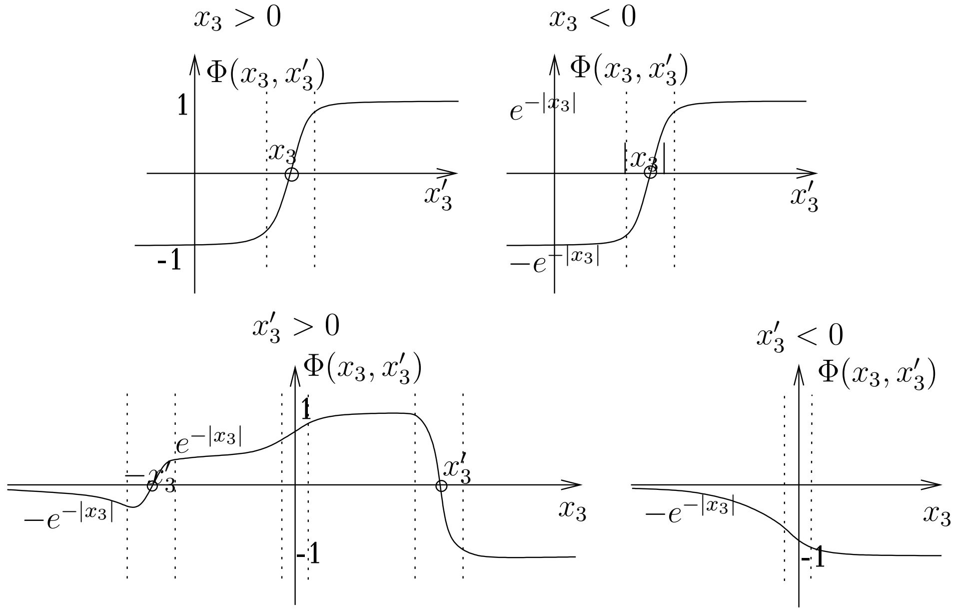
Оставшиеся случаи $p = 2$, $q = 1$ и $p = 1$ $q = 2$ разбираются аналогично:

$$
\begin{aligned}
\partial_3^2 \partial_3' F_\alpha &\simeq \frac{2^\alpha \Gamma(\frac{\alpha}{2})}{8\pi\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})} m^{-2\beta} x_\perp^{-\alpha} \Phi(x_3, x_3') \\
\partial_3 \partial_3^{'2} F_\alpha &\simeq \frac{2^\alpha \Gamma(\frac{\alpha}{2})}{8\pi\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})} m^{-2\beta} x_\perp^{-\alpha} \Phi(x_3', x_3),
\end{aligned}
\tag{29}
$$

с той же областью применимости. Здесь

$$
\Phi(x_3, x_3') = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{dA_1}{\sqrt{A_1}} \exp\left(-\frac{(x_3 - A_1)^2}{4A_1}\right) \mathrm{erf}\left(\frac{x_3' - A_1}{2\sqrt{A_1}}\right)
$$

Функцию $\Phi(x_3, x_3')$ можно грубо описать как функцию скачка на линии $x_3 = x_3'$. Если быть более точным, то вот ее асимптотики: $\Phi(x_3, x_3') \simeq 1$ при $x_3 \gg 1,\ x_3' - x_3 \gg \sqrt{x_3}$; $\Phi(x_3, x_3') \simeq -1$ при $x_3 \gg 1,\ x_3 - x_3' \gg \sqrt{x_3}$; $\Phi(x_3, x_3') \simeq e^{-|x_3|}$ при $-x_3 \gg 1,\ x_3' - |x_3| \gg \sqrt{|x_3|}$; $\Phi(x_3, x_3') \simeq -e^{-|x_3|}$ при $-x_3 \gg 1,\ |x_3| - x_3' \gg \sqrt{|x_3|}$.

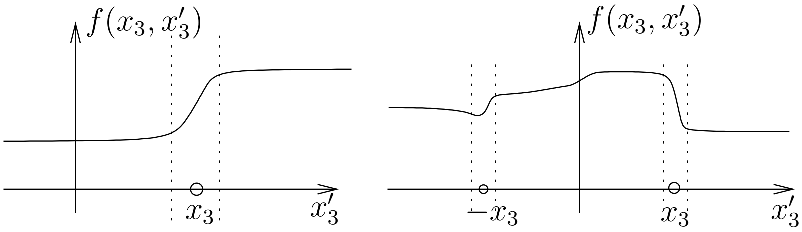


Теперь мы знаем асимптотики всех нужных нам производных от F_α в секторе $x_\perp \gg \rho$. То есть, у нас есть конструктор, из которого мы можем построить искомые асимптотики коррелятора скорости. Вклады в коррелятор у нас есть трех типов: типа (27), со скоростью убывания $x_\perp^{-\alpha-3}$ ведущие себя как константа по x_3, x_3'; типа (29), убывающие с той же скоростью и содержащие скачки с константы на константу при переходе через слой $|x_3' - x_3| \lesssim \sqrt{x_3}$, и, наконец, вклады типа (28), убывающие более медленно, $\sim x_\perp^{-\alpha-2}$, но заметно отличные от нуля лишь в слое $|x_3' - x_3| \lesssim \sqrt{x_3}$, так как $e^{\frac{x_3+x_3'}{2}} Y(\sqrt{\frac{x_3^2+x_3'^2}{2}}) \simeq \sqrt{\frac{2\pi}{x_3}} e^{-\frac{(x_3-x_3')^2}{8x_3}}$ при $x_3 \gg 1,\ |x_3 - x_3'| \ll x_3$.

Для того, чтобы точно знать, какие слагаемые есть в конкретных компонентах коррелятора, нам нужны явные формулы для $T_{1\,ij}(\vec{k}_\perp, k_3, k_3')$ и $T_{2\,ij}(\vec{k}_\perp, k_3, k_3')$:

$$
\begin{aligned}
&T_{1\,ij} = a(k_3^2 k_{\perp i} - k_3 k_\perp^2 e_{3i})(k_3'^2 k_{\perp j} - k_3' k_\perp^2 e_{3j}) + b\Big[(k_3^2 k_{\perp i} - k_3 k_\perp^2 e_{3i})(k_\perp^2 + k_3'^2)(\vec{e}_3 \times \vec{k}_\perp)_j + \\
&+ (k_\perp^2 + k_3^2)(\vec{e}_3 \times \vec{k}_\perp)_i (k_3'^2 k_{\perp j} - k_3' k_\perp^2 e_{3j})\Big] + c(k_\perp^2 + k_3^2)(k_\perp^2 + k_3'^2)(\vec{e}_3 \times \vec{k}_\perp)_i (\vec{e}_3 \times \vec{k}_\perp)_j + \\
&+ f k_\perp^2 (k_\perp^2 e_{3i} - k_3 k_{\perp i})(k_\perp^2 e_{3j} + k_3' k_{\perp j}) \\
&T_{2\,ij} = d\Big[(k_3^2 k_{\perp i} - k_3 k_\perp^2 e_{3i})(k_\perp^2 e_{3j} + k_3' k_{\perp j}) - (k_\perp^2 e_{3i} - k_3 k_{\perp i})(k_3'^2 k_{\perp j} - k_3' k_\perp^2 e_{3j})\Big] + \\
&+ e\Big[(k_\perp^2 + k_3^2)(\vec{e}_3 \times \vec{k}_\perp)_i (k_\perp^2 e_{3j} + k_3' k_{\perp j}) - (k_\perp^2 e_{3i} - k_3 k_{\perp i})(k_\perp^2 + k_3'^2)(\vec{e}_3 \times \vec{k}_\perp)_j\Big]
\end{aligned}
\tag{30}
$$

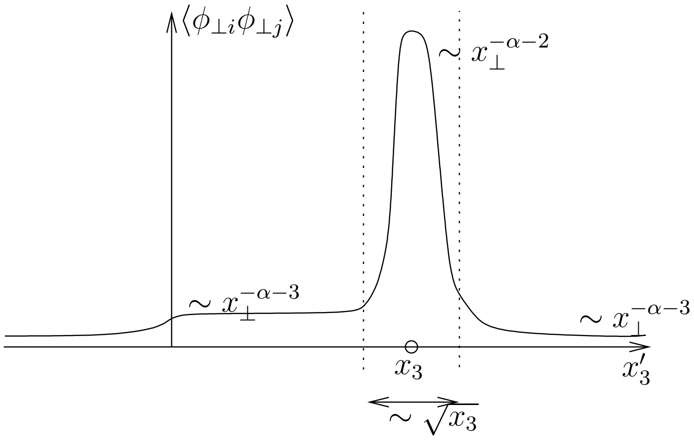
Отсюда видно, что $\tilde{T}_{1\,33}$ и $\tilde{T}_{2\,33}$ — дифференциальные операторы 2-го порядка по ∂_3, ∂_3'. Поэтому $\langle \phi_3(x)\phi_3(x')\rangle \sim \mathrm{const} \cdot x_\perp^{-\alpha-3}$ при $x_\perp \gg \rho$. Здесь есть только вклады типа (27), не содержащие зависимости от x_3, x_3'. Компоненты $\tilde{T}_{1\,13}$, $\tilde{T}_{1\,23}$, $\tilde{T}_{1\,31}$, $\tilde{T}_{1\,32}$ содержат производные $\partial_3^2 \partial_3'$, $\partial_3 \partial_3'^2$. Поэтому $\langle \phi_1\phi_3\rangle$, $\langle \phi_2\phi_3\rangle$, $\langle \phi_3\phi_1\rangle$, $\langle \phi_3\phi_2\rangle \sim x_\perp^{-\alpha-3} f(x_3, x_3')$. Здесь есть вклады типа (27) и (29), а значит, функция $f(x_3, x_3') = \mathrm{const} + \mathrm{const}\cdot\Phi(x_3, x_3') + \mathrm{const}\cdot\Phi(x_3', x_3)$ содержит скачки с константы на константу.



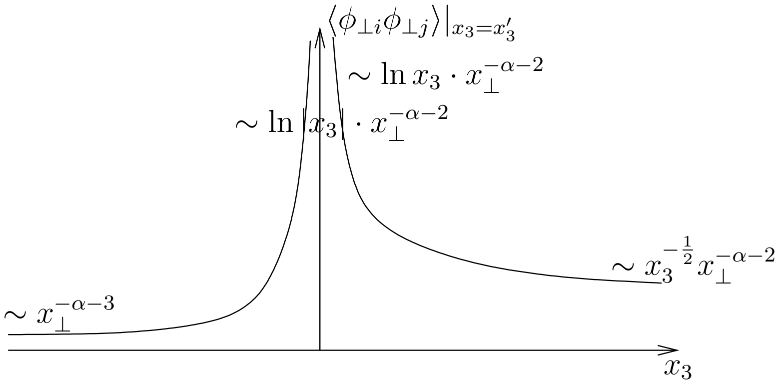
Наиболее интересно поведение оставшихся четырех компонент коррелятора, $\langle \phi_{\perp i}\phi_{\perp j}\rangle$ (символы $\perp i$, $\perp j$ означают либо 1, либо 2). Дело в том, что в $\tilde{T}_{1\,\perp i\,\perp j}$ входит $\partial_3^2 \partial_3'^2$, а в $\tilde{T}_{2\,\perp i\,\perp j}$ — $\partial_3^2 \partial_3'$ и $\partial_3 \partial_3'^2$. Здесь появятся вклады всех видов — (27), (29), (28). Поэтому

$$
\langle \phi_{\perp i}\phi_{\perp j}\rangle \sim x_\perp^{-\alpha-3} f(x_3, x_3') + \mathrm{const}\ x_\perp^{-\alpha-2} e^{\frac{x_3+x_3'}{2}} Y\left(\sqrt{\frac{x_3^2 + x_3'^2}{2}}\right) \tag{31}
$$

Функция $f(x_3, x_3')$ здесь, как и выше, содержит скачки. Ясно, что если, скажем, зафиксировать x_3 и двигать x_3', то (31) будет иметь резкий пик в точке $x_3' = x_3$ с шириной $\sim \sqrt{x_3}$. Значение коррелятора в верхней точке пика $\sim x_\perp^{-\alpha-2}$, а вне пика основной вклад в коррелятор дают выражения типа (27), (29), имеющие порядок $\sim x_\perp^{-\alpha-3}$.



Кроме того, второе слагаемое в (31) дает сингулярный вклад в области $x_3,\, x_3' \to 0$ (см. асимптотики $Y(\lambda)$). При $x_3,\, x_3' \to -\infty$ вклады от $\partial_3^2\partial_3'^2 F_\alpha$, $\partial_3^2\partial_3' F_\alpha$, $\partial_3\partial_3'^2 F_\alpha$ экспоненциально затухают и остается не зависящий от x_3, x_3' фон от первого слагаемого в (31).



Нужно заметить, что асимптотики разных вкладов у нас сосчитаны с разной точностью: вклады от (27), (29) имеют порядок $x_\perp^{-\alpha-3}$ с ошибкой $O(x_\perp^{-\alpha-4})$, а для (28) порядок вкладов — $x_\perp^{-\alpha-2}$ с ошибкой $O(x_\perp^{-\alpha-3})$. Поэтому для полноты картины следует вычислить поправку к (28):

$$\begin{aligned}\partial_3^2\partial_3'^2 F_\alpha \simeq & \frac{2^\alpha \Gamma(\frac{\alpha}{2})}{16\pi^2\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})} m^{-2\beta} x_\perp^{-\alpha} e^{\frac{x_3+x_3'}{2}} Y\left(\sqrt{\frac{x_3^2+x_3'^2}{2}}\right) - \\ & - \frac{7\cdot 2^\alpha\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})}{16\pi\Gamma(\frac{1-\alpha}{2})} m^{-2\beta} x_\perp^{-\alpha-1} + O(x_\perp^{-\alpha-2})\end{aligned}$$

Видно, что эта поправка никак не меняет качественной картины и лишь дает добавку к “фону"в корреляторе.

В заключение приведем явный ответ для асимптотики коррелятора $\langle\phi_i\phi_j\rangle$ в частном случае

$$\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ -d & -e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Заметим еще раз, что рассматривается одновременный коррелятор $x_0 = x_0'$. Кроме того, пользуясь трансляционной инвариантностью, мы полагаем $\vec{x}'_\perp = 0$:

$$
\begin{aligned}
&\langle\phi_i(x)\phi_j(x')\rangle \simeq \\
&\simeq \frac{2^\alpha\Gamma(\frac{3+\alpha}{2})}{4\pi\Gamma(\frac{1-\alpha}{2})} m^{-2\beta} x_\perp^{-\alpha-3}
\begin{pmatrix}
(4+3\alpha)-(3+\alpha)\frac{x_2^2}{x_\perp^2} & 0 & 0 \\
0 & (4+3\alpha)-(3+\alpha)\frac{x_1^2}{x_\perp^2} & 0 \\
0 & 0 & -(1+\alpha)
\end{pmatrix} + \\
&+ \frac{2^\alpha\Gamma(2+\frac{\alpha}{2})}{\pi\Gamma(-\frac{\alpha}{2})} m^{-2\beta} x_\perp^{-\alpha-3}
\begin{pmatrix}
0 & 0 & -\frac{x_1}{x_\perp}\left(\frac{1}{4}+\Phi(x_3,x'_3)\right) \\
0 & 0 & -\frac{x_2}{x_\perp}\left(\frac{1}{4}+\Phi(x_3,x'_3)\right) \\
\frac{x_1}{x_\perp}\left(\frac{1}{4}+\Phi(x'_3,x_3)\right) & \frac{x_2}{x_\perp}\left(\frac{1}{4}+\Phi(x'_3,x_3)\right) & 0
\end{pmatrix} + \\
&+ \frac{2^\alpha\Gamma(1+\frac{\alpha}{2})}{4\pi^2\Gamma(-\frac{\alpha}{2})} m^{-2\beta} x_\perp^{-\alpha-2} e^{\frac{x_3+x'_3}{2}} Y\left(\sqrt{\frac{x_3^2+x_3'^2}{2}}\right)
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Понятно, что если не полагать $\vec{x}'_\perp = 0$, то следует везде в этом выражении заменить $x_{\perp i}$ на $x_{\perp i} - x'_{\perp i}$. Странной особенностью данного случая является то, что в пределах точности наших асимптотик $\langle\phi_1\phi_2\rangle = \langle\phi_2\phi_1\rangle = 0$. Остальные элементы коррелятора демонстрируют поведение, описанное выше для общего случая.