Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

ИВАНОВ Сергей Владимирович

ГЕОМЕТРИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ МЕТРИК И ОБЪЕМЫ ПРЕДЕЛЬНЫХ ФИНСЛЕРОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

01.01.04 – геометрия и топология

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
1995

Работа выполнена в Лаборатории геометрии и топологии Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

Научный руководитель — доктор физико-математических наук БУРАГО Юрий Дмитриевич.

Официальные оппоненты — доктор физико-математических наук АНОСОВ Дмитрий Викторович, кандидат физико-математических наук КОБЕЛЬСКИЙ Виктор Леонидович.

Ведущая организация — Институт математики Сибирского отделения РАН.

Защита состоится ________________ 199 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета К 063.57.45 по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в Санкт-Петербургском государственном университете (адрес совета: 198904, С.-Петербург, Ст. Петергоф, Библиотечная пл., д. 2, математико-механический факультет СПГУ). Защита будет проходить по адресу: 191011, С.-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, 3-й этаж, зал 311 (помещение ПОМИ РАН).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке им. А. М. Горького СПГУ (Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9).

Автореферат разослан ________________ 199 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физико-математических
наук, доцент Р. А. ШМИДТ

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В диссертации решается ряд задач, относящихся к изучению глобальных и асимптотических свойств периодических римановых метрик, т. е. метрик, инвариантных относительно дискретного ко-компактного действия бесконечной абелевой группы. Важным примером таких метрик являются поднятия в универсальное накрывающее пространство римановых метрик, заданных на торе произвольной размерности.

Различные вопросы, связанные с периодическими метриками, изучались на протяжении всего развития римановой геометрии, но лишь в недавнее время начал развиваться целостный подход ко всей проблематике. При этом выявились ее связи с геометрией выпуклых тел, нормированных пространств (пространств Минковского) и финслеровых многообразий. Финслеровы многообразия также изучаются в диссертации с целью сравнения их объемов с объемами близких к ним римановых многообразий.

Одним из результатов работы является доказательство известной гипотезы Э. Хопфа: всякая риманова метрика без сопряженных точек на торе произвольной размерности является плоской. Эта гипотеза является одним из первых вопросов, возникающих при изучении компактных римановых многообразий без сопряженных точек, и исследовалась начиная с работы Э. Хопфа [9], в которой она была доказана в размерности 2. Для старших размерностей гипотеза доказывалась при различных дополнительных предположениях относительно метрики, см., например, [5], [7], [10]. Из истинности гипотезы Хопфа для торов следует аналогичное утверждение для большого класса многообразий, см. [6].

Другим предметом исследования в работе являются асимптотические объемы периодических метрик. Асимптотический объем метрики характеризует скорость роста объемов ее шаров при стремлении радиусов к бесконечности. Оценки асимптотических объемов и связанные с ними оценки изосистолических констант имеют важные применения в римановой геометрии, см. [8]. Для универсальных накрывающих торов М. Громовым в [8] были получены не зависящие от метрики нижние оценки асимптотического объема, которые затем были улучшены и доведены в размерности 2 до точных в работах И. К. Бабенко [1], [2]. В диссертации доказывается нижняя оценка для асимптотических объемов периодических метрик на многообразиях определенного класса, в который входят и универсальные накрывающие торов. При этом для универсальных накрывающих торов полученная оценка усиливает упомянутые выше результаты и является точной во всех размерностях.

Помимо периодических метрик, в работе рассматриваются последовательности римановых многообразий, сходящиеся к финслеровым многообразиям по Громову–Хаусдорфу или, как частный случай, в смысле равномерной сходимости расстояний между точками. Такие последовательности естественно возникают при изучении асимптотических свойств периодических метрик, см. [4]. В диссертации исследуется вопрос (связанный с оценками асимптотических объемов периодических метрик) об ограничениях на объем предельного финслерова многообразия при известных объемах сходящихся к нему римановых. При естественных топологических требованиях к сходимости по Громову–Хаусдорфу, которые всегда выполняются в случае равномерной сходимости метрик, доказывается оценка объема предельного пространства, имеющая вид утверждения о полунепрерывности объема снизу. Особенно интересным является то, что эта оценка не предполагает никаких дифференциальных или метрических ограничений на сходящиеся римановы многообразия.

Цель работы состоит в изучении глобальной геометрии периодических римановых метрик и связанных с этим вопросов о предельных финслеровых многообразиях. Главными предметами исследования являются поведение геодезических "на бесконечности" и объемы "больших" множеств в пространстве с периодической метрикой, и, соответственно, объемы областей в предельном финслеровом многообразии последовательности римановых многообразий.

Методы исследования. Доказательства проводятся чисто геометрическими методами с привлечением базовых фактов динамики и геометрической теории меры. Аппарат дифференциальной геометрии практически не используется, Главным техническим средством является аппроксимация метрик конечномерными нормированными пространствами с помощью теоремы Д. Ю. Бураго [3]. Важную роль играет также решение одной экстремальной задачи из области геометрии выпуклых тел.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми. Впервые получены доказательство гипотезы Хопфа о торе без сопряженных точек во всех размерностях, точные нижние оценки асимптотических объемов универсальных накрывающих торов во всех размерностях, верхняя оценка объема предельного финслерова многообразия для последовательностей римановых многообразий.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты и методы могут быть использованы при дальнейшем изучении периодических метрик и предельных финслеровых многообразий, и в других исследованиях по римановой и финслеровой геометрии.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на геометрическом семинаре Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН (руководитель проф. Ю. Д. Бураго) в 1993–1994 гг., на геометрическом семинаре Университета Пенсильвании, США (руководитель В. Циллер) в 1994 г., на геометрическом семинаре Университета Иллинойса, США (руководитель Р. Бишоп) в 1994 г., и на геометрическом семинаре Института Куранта, Нью-Йорк (руководитель С. Капелл) в 1994 г.

Публикации. По теме диссертации опубликованы две работы, список которых приведен в конце автореферата.

Объем и структура работы. Диссертация изложена на 78 страницах и состоит из введения и восьми параграфов. Библиография содержит 40 названий.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении содержатся основные определения и обзор результатов работы. В первые трех параграфах вводятся технические средства, используемые в дальнейших доказательствах. Основные результаты содержатся в параграфах 4, 5 и 7. В параграфах 6 и 8 обсуждаются вопросы, связанные с формулировками основных теорем.

Основная часть результатов работы получена совместно с Д. Ю. Бураго.

Пусть Γ — конечно порожденная абелева группа (которую следует считать бесконечной, иначе все рассматриваемые вопросы оказываются бессодержательными). Пространством с Γ-периодической метрикой называется метрическое пространство (M, ρ), на котором задано свободное (без неподвижных точек), дискретное и ко-компактное действие группы Γ изометриями. Пространство M всюду предполагается гладким многообразием, а метрика ρ — римановой, хотя некоторые из описываемых конструкций применимы и к более общим метрическим пространствам.

Для пространства M с Γ-периодической метрикой ρ обозначим через $\overline{M}$ его факторпространство M/Γ по действию группы, и пусть $\pi\colon M \to \overline{M}$ — отображение факторизации. Топологические условия, наложенные на действие группы Γ в определении периодической метрики, эквивалентны тому, что $\overline{M}$ компактно, а π является накрытием (в частности, $\overline{M}$ является гладким многообразием вместе с M). При этом Γ действует на M как группа автоморфизмов этого накрытия. Изометричность действия означает, что существует риманова метрика $\bar\rho$ на $\overline{M}$, такая, что отображение $\pi\colon (M,\rho) \to (\overline{M},\bar\rho)$ является локальной изометрией (римановым накрытием). При этом метрика ρ однозначно восстанавливается по метрике $\bar\rho$ как поднятие в накрывающее пространство.

Одним из примеров периодических метрик служат поднятия в универсальное накрывающее пространство римановых метрик, заданных на n-мерном торе $T^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$. Такое поднятие представляет собой риманову метрику в $\mathbf{R}^n$, инвариантную относительно действия решетки $\mathbf{Z}^n$ параллельными переносами.

Пусть $n = \operatorname{rank}\Gamma$ (ранг группы Γ). Тогда Γ представляется в виде прямой суммы $\mathbf{Z}^n \oplus T(\Gamma)$, где $T(\Gamma)$ обозначает периодическую часть ("кручение") группы Γ. Роль кручения в рассматриваемых вопросах незначительна, более того, всякую Γ-периодическую метрику можно представить и как $\mathbf{Z}^n$-периодическую, если ограничиться только действием подгруппы $\mathbf{Z}^n \subset \Gamma$.

Вместе с каждой Γ-периодической метрикой рассматривается конечномерное векторное пространство $V = \Gamma \otimes \mathbf{R} \simeq \mathbf{R}^n$. При рассмотрении универсального накрывающего тора T^n можно отождествить V с самим пространством $M \simeq \mathbf{R}^n$. Каждому элементу $k \in \Gamma$ канонически соответствует вектор $k \otimes 1 \in V$, который для удобства тоже обозначается через k. Такие вектора образуют решетку в V, аналогичную целочисленной решетке в $\mathbf{R}^n$. Группа Γ канонически действует на V параллельными переносами.

Для дальнейших формулировок понадобится следующее утверждение:

Предложение 1.1. *Существует хотя бы одно непрерывное отображение $\varphi\colon M \to V$, коммутирующее с действием группы, т. е. такое, что $\varphi(x+k) = \varphi(x) + k$ для любых $x \in M$ и $k \in \Gamma$.*

Такие $\varphi\colon M \to V$ называются в работе выпрямляющими отображениями. Каждое выпрямляющее отображение $\varphi\colon M \to V$ является поднятием в накрывающие пространства некоторого отображения $\bar{\varphi}\colon \overline{M} \to V/\Gamma \simeq T^n$, причем гомотопический тип $\bar{\varphi}$ не зависит от произвола в выборе φ.

Одним из важнейших асимптотических инвариантов периодической метрики ρ является ее предельная норма $\|\cdot\|$, заданная на V. Имеет место аппроксимационная теорема Д. Ю. Бураго о равномерной близости пространств (M, ρ) и $(V, \|\cdot\|)$. Сравнение метрики с ее предельной нормой лежит в основе всей техники, используемой в диссертации.

Предельная норма и аппроксимационная теорема обсуждаются в §1. Там же вводятся специальные липшицевы функции на M (функции типа Буземана), которые соответствуют линейным функционалам на пространстве V. В §2 рассматриваются предельные направления геодезических пространства M — вектора пространства V, характеризующие направление и скорость ухода геодезических на бесконечность. Функция предельного направления определена почти всюду на фазовом пространстве геодезического потока (т. е. на расслоении единичных касательных векторов многообразия). В конце §2 доказываются некоторые свойства этой функции, связывающие ее значения с предельной нормой метрики и функциями типа Буземана. (Эти свойства используются затем в рассуждениях §4.)

В §3 рассматривается произвольное n-мерное нормированное пространство $(V, \|\cdot\|)$. Пусть D — его единичный шар, F — его единичная сфера. Среди всевозможных эллипсоидов, содержащихся в D, имеется единственный эллипсоид максимального объема, называемый вписанным эллипсоидом. Пусть Q — квадратичная форма, определяемая этим эллипсоидом (такая, что эллипсоид является ее единичным шаром). Будем называть линейный функционал $L\colon V \to \mathbf{R}$ опорным к D в точке $p \in F$, если $\|L\| := \sup L|_D = 1$ и при этом $L(p) = 1$. Результаты §3 состоят в том, что форма Q может быть представлена в виде конечной суммы $\sum a_i L_i^2$, где L_i — линейные функционалы, опорные к D в точках касания с вписанным эллипсоидом, a_i — положительные коэффициенты, сумма которых равна n.

Например, если D — стандартный куб, описанный около единичного шара в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$, то такое разложение формы Q представляет собой обычное разложение квадрата длины вектора в сумму квадратов координат. В общем случае число слагаемых в разложении можно ограничить числом $n(n+1)/2+1$. Это разложение, применяемое для предельной нормы периодической метрики, активно используется в дальнейшем при доказательстве основных теорем.

В §4 доказывается

Теорема 4.1 (“гипотеза Хопфа”). *Всякая риманова метрика без сопряженных точек на n-мерном торе является плоской.*

По определению, риманова метрика на многообразии M не имеет сопряженных точек, если для любой точки $x \in M$ экспоненциальное отображение $\exp_x : T_xM \to M$ является всюду невырожденным (т. е. локальным диффеоморфизмом). Метрика называется плоской, если она локально изометрична евклидовой метрике $\mathbf{R}^n$. Плоские метрики могут быть также описаны как метрики постоянной нулевой кривизны.

Доказательство теоремы 4.1 проводится не для самого тора, а для его универсального накрывающего, которое представляет собой пространство $\mathbf{R}^n$ с $\mathbf{Z}^n$-периодической римановой метрикой, тоже не имеющей сопряженных точек. Из односвязности и отсутствия сопряженных точек следует, что всякая геодезическая в таком пространстве является кратчайшей. Именно это условие, а не исходное дифференциальное определение отсутствия сопряженных точек, используется при доказательстве. Само доказательство основано на оценках интегральных характеристик функции предельного направления геодезических и сравнении их с аналогичными характеристиками для евклидова пространства с помощью результатов §3.

В §5 изучаются асимптотические объемы периодических метрик. Асимптотический объем Γ-периодической метрики ρ на M определяется формулой

$$\Omega(M,\rho) = \lim_{r\to\infty} \frac{\mathrm{Vol}(\mathrm{Ball}_x(r))}{r^n},$$

где $\mathrm{Ball}_x(r)$ обозначает шар радиуса r с центром в точке x, Vol — риманов объем метрики ρ, $n = \operatorname{rank}\Gamma$. Предел в формуле всегда существует и является конечным и положительным.

Предположим, что размерность M тоже равна n. Рассмотрим непрерывное отображение $\bar\varphi : \overline{M} \to V/\Gamma \simeq T^n$, поднятие которого является выпрямляющим отображением. Гомотопический тип $\bar\varphi$ определен однозначно топологией M и действием Γ. Пусть $\deg_\Gamma(M)$ обозначает гомологическую степень этого отображения. Если M — универсальное накрывающее тора, то $\bar{\varphi}$ гомотопно тождественному отображению, так что эта степень равна 1.

Теорема 5.2. *Пусть* $\dim M = \operatorname{rank} \Gamma = n$, $\deg_\Gamma(M) \neq 0$. *Тогда для любой* Γ*-периодической римановой метрики* ρ *на* M *выполняется неравенство*

$$\Omega(M, \rho) \geqslant \omega_n \,,$$

где ω_n *— объем стандартного единичного шара в* $\mathbf{R}^n$.

Равенство достигается тогда и только тогда, когда (M, ρ) *изометрично евклидову пространству* $\mathbf{R}^n$.

Как видно из формулировки, теорема 5.2 дает точную нижнюю оценку асимптотического объема для метрики универсального накрывающего тора любой размерности.

Доказательство основано на неравенстве, похожем на известное неравенство Безиковича, оценивающее снизу объем римановой метрики, заданной на кубе, произведением расстояний между парами противоположных граней. Неравенство, с помощью которого доказывается теорема 5.2, отличается от неравенства Безиковича тем, что вместо расстояний между гранями рассматриваются функции типа Буземана (имеющие смысл дистанционных функций "бесконечно удаленных гиперплоскостей"), и, что более существенно, тем, что число этих "гиперплоскостей" может быть большим, чем размерность.

Это неравенство применяется к направлениям гиперплоскостей, соответствующих функционалам L_i из §3, и это позволяет сравнить асимптотические объемы данной периодической метрики и соответствующего евклидова пространства.

В §6 рассматривается аналогичный вопрос об асимптотических изопериметрических константах. Для пространства (M, ρ) асимптотическая изопериметрическая константа $\sigma(M, \rho)$ определяется как верхний предел

$$\sigma(M, \rho) = \limsup_{\mathrm{Vol}(\Omega) \to \infty} \sigma(M, \rho, \Omega) \,,$$

где

$$\sigma(M, \rho, \Omega) = \frac{\mathrm{Vol}(\Omega)^{1/n}}{\mathrm{Sq}(\partial\Omega)^{1/(n-1)}}$$

для каждой ограниченной области $\Omega \subset M$. Здесь Vol обозначает n-мерный, а Sq — $(n-1)$-мерный объем в (M, ρ).

Оказывается, что, в отличие от асимптотического объема, асимптотическая изопериметрическая константа универсального накрывающего n-мерного тора, где $n \geqslant 3$, может быть сколь угодно малой (теорема 6.3). Тем не менее, в двумерном случае и, более общо, в классе конформно плоских метрик, для универсального накрывающего тора имеет место аналог теоремы 5.2: $\sigma(M, \rho) \geqslant \sigma(\mathbf{R}^n)$, причем равенство достигается только для плоских метрик (теорема 6.2).

В §7 рассматривается сходимость по Громову–Хаусдорфу римановых метрик к финслеровой. Там же обсуждается связь этой сходимости с геометрией периодических метрик. В этом параграфе не накладывается никаких ограничений гладкости, все финслеровы и римановы структуры считаются просто непрерывными.

Любую финслерову метрику можно получить как предел последовательности римановых метрик на том же многообразии (в смысле равномерной сходимости функций расстояния). Более того, некоторая модификация понятия периодической метрики приводит к специальному классу последовательностей "квазипериодических" римановых метрик на гладком многообразии, для которых предельными метриками являются всевозможные финслеровы метрики, и только они (см. [4]). В малой окрестности точки, где финслерова метрика близка к метрике нормированного пространства, она соотносится с приближающими ее квазипериодическими метриками примерно так же, как предельная норма $\mathbf{Z}^n$-периодической метрики в $\mathbf{R}^n$ — с самой метрикой. Рассмотрению периодических метрик на пространствах с различной топологией (не только универсальных накрывающих торов) соответствует использование сходимости по Громову–Хаусдорфу вместо равномерной сходимости римановых метрик к финслеровой.

Отображение (не обязательно непрерывное) $f\colon X \to Y$ между метрическими пространствами называется хаусдорфовой аппроксимацией погрешности ε, где ε — положительное число, если выполняются два условия:

1) $f(X)$ образует ε-сеть в Y,

2) $|\rho(f(x_1), f(x_2)) - \rho(x_1, x_2)| \leqslant \varepsilon$ для любых $x_1, x_2 \in X$.

Последовательность метрических пространств X_k сходится по Громову–Хаусдорфу к метрическому пространству X тогда и только тогда, когда существует последовательность хаусдорфовых аппроксимаций $\varphi_k\colon M_k \to M$ с погрешностями $\varepsilon_k \to 0$. Более того, если X является гладким компактным многообразием, то аппроксимации φ_k

в этой последовательности всегда можно считать непрерывными. Далее употребление слов "последовательность хаусдорфовых аппроксимаций" всегда подразумевает непрерывность и то, что погрешности аппроксимаций стремятся к нулю.

Для метрик, заданных на одном и том же многообразии M, их равномерная сходимость как функций на $M \times M$ является частным случаем сходимости по Громову–Хаусдорфу. Хаусдорфовыми аппроксимациями могут при этом служить тождественные отображения.

Под объемом финслерова многообразия понимается его мера Хаусдорфа соответствующей размерности. На самом деле следующая теорема верна при любом определении финслерова объема, лишь бы он монотонно зависел от метрики и совпадал с римановым объемом для римановых многообразий. В этой теореме все многообразия предполагаются компактными и, возможно, имеющими край.

Теорема 7.2. *Пусть (M_k, ρ_k) — последовательность римановых многообразий одинаковой размерности n, сходящаяся по Громову–Хаусдорфу к финслерову многообразию (M, ρ) той же размерности, причем существует последовательность хаусдорфовых аппроксимаций $\varphi_k \colon M_k \to M$ ненулевой степени. Тогда*

$$\operatorname{Vol}(M, \rho) \leqslant \liminf_{k\to\infty} \operatorname{Vol}(M_k, \rho_k)\,,$$

причем в случае равенства метрика ρ является римановой.

Под степенью отображения φ_k, как и ранее, понимается гомологическая степень. В случае многообразий с краем для наличия у отображения степени требуется, чтобы все точки края M_k отображались в край M.

Применение теоремы 7.2 к равномерной сходимости метрик дает немедленное

Следствие 7.3. *Пусть ρ_k — последовательность римановых метрик на многообразии M, и ρ_k равномерно сходятся к финслеровой метрике ρ. Тогда*

$$\operatorname{Vol}(M, \rho) \leqslant \liminf_{k\to\infty} \operatorname{Vol}(M, \rho_k)\,,$$

причем в случае равенства метрика ρ является римановой.

Доказательство теоремы 7.2 опирается на тот же аналог неравенства Безиковича, что и доказательство теоремы 5.2, с той лишь разницей, что вместо функций типа Буземана используются дистанционные функции специально выбираемых точек. Вместо предельной нормы рассматриваются нормированные пространства, локально аппроксимирующие финслерову метрику.

В §8 рассматривается возможность замены в теореме 7.2 условия ненулевой степени аппроксимаций другими топологическими требованиями, а именно, ограничениями топологических типов самих многообразий M_k. В двумерном случае ответ положительный: заключение теоремы 7.2 выполняется при сходимости двумерных многообразий всегда, когда их род и число компонент края ограничены сверху. На самом деле сходимость по Громову–Хаусдорфу двумерных многообразий ограниченного рода удается свести к равномерной сходимости метрик после топологической перестройки многообразий в исчезающе малых (по диаметру) областях. Римановость метрик при этом не обязательна, но существенно то, что они являются внутренними.

В размерностях, больших 2, наоборот, имеются неожиданные примеры сходимости по Громову–Хаусдорфу римановых метрик на сфере к любой наперед заданной римановой метрике на сфере или на диске, с объемами, стремящимися к нулю. Хаусдорфовы аппроксимации в этих примерах оказываются топологически эквивалентными стандартному проектированию сферы на диск. (Для сравнения: в двумерном случае сферы вообще не могут сходиться к диску.) Сопоставление со следствием 7.3 показывает, что в старших размерностях сходимость по Громову–Хаусдорфу римановых метрик, заданных на одном и том же многообразии (в данном случае, на трехмерной сфере) может существенно отличаться от равномерной сходимости.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. К. Бабенко, *Асимптотический объем торов и геометрия выпуклых тел*, Мат. Заметки **44** (1988), no. 2, 177–190.
2. И. К. Бабенко, *Объемная жесткость двумерных многообразий*, Мат. Заметки **48** (1990), no. 1, 10–14.
3. D. Burago, *Periodic metrics*, Advances in Soviet Math. **9** (1992), 205–206.
4. D. Burago, *Periodic metrics*, in “Seminar on Dynamical Systems”, Progress in Nonlinear Differential Equations (H. Brezis, ed.), vol. 12, Birkhauser, 1994, pp. 90–96.
5. C. Croke, A. Fathi, *An inequality between energy and intersections*, Bull. London Math. Soc. **22** (1990), 489–494.

6. C. Croke, V. Shroeder, *The fundamental group of compact manifold without conjugate points*, Comment. Math. Helv. **61** (1986), 161–175.
7. L. Green, *A theorem of E. Hopf*, Mich. Math. J. **5** (1958), 31–34.
8. M. Gromov, *Filling Riemannian manifolds*, J. Diff. Geom. **18** (1983), 1–147.
9. E. Hopf, *Closed surfaces without conjugate points*, Proc. Nat. Acad. Sci **34** (1948), 47–51.
10. A. Knauf, *Closed orbits and converse KAM theory*, Nonlinearity **3** (1990), 961–973.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

11. D. Burago, S. Ivanov, *Riemannian tori without conjugate points are flat*, Geom. Func. Anal. **4** (1994), no. 3, 259–269.
12. D. Burago, S. Ivanov, *On asymptotic volume of tori*, Geom. Func. Anal. **5** (1995), no. 5, 800–808.