Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

Иванов Сергей Владимирович

Объемы и площади в метрической геометрии

01.01.04 — Геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург
2009

Работа выполнена в лаборатории геометрии и топологии Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В.А.Стеклова Российской академии наук.

Официальные оппоненты:	член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор ТАЙМАНОВ Искандер Асанович (Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН)
	доктор физико-математических наук, профессор ВЕРШИК Анатолий Моисеевич (лаборатория теории представлений и вычислительной математики Санкт- Петербургского отделения математического института им. В.А.Стеклова РАН)
	доктор физико-математических наук ПЕСТОВ Леонид Николаевич (Югорский НИИ информационных технологий)
Ведущая организация:	Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

Защита состоится «......» .... 2009 г. в .... часов на заседании совета Д 212.232.29 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., 28, математико-механический факультет.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 191011, Университетская наб., 7/9.

Защита будет проходить в Санкт-Петербургском отделении Математического института имени В.А.Стеклова РАН по адресу: Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27.

Автореферат разослан «......» .... 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физ.-мат. наук, профессор В.М.Нежинский

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В диссертации исследуются некоторые вопросы об объемах и площадях римановых, финслеровых и более общих липшицевых метрик, а также поверхностей в банаховых пространствах, и доказываются приложения в различных областях. Актуальность темы определяется перечисляемыми ниже мотивирующими вопросами, на которые в диссертации даются частичные или полные ответы.

1. Минимальные заполнения. В 1983 году М. Громов [10] ввел понятие *заполняющего объема* метрики на замкнутом многообразии S. Вычисление заполняющего объема для одной метрики дает "универсальное" неравенство (выполняющееся для всех компактных римановых многообразий M с данным краем $\partial M = S$), оценивающее объем снизу через расстояния между точками края. Компактное риманово многообразие с краем называется *минимальным заполнением*, если оно реализует заполняющий объем своего края.

В терминах заполняющих объемов естественно формулируется многие результаты римановой геометрии, от классических неравенств Безиковича, Лёвнера и Пу, доказанных в начале 1950-х годов, до современных приложений в асимптотической и систолической геометрии, которые можно найти, например, в книгах [12] и [14]. Хотя основной областью применения заполняющих объемов является риманова геометрия, они также применяются в теории динамических систем (см., например, [4]) и в некоторых обратных краевых задачах, см. ниже.

Большинство известных результатов о заполняющих объемах представляет собой оценки сверху или снизу, а не вычисление точных значений. В отличие от результатов такого типа, в настоящей работе основное внимание уделяется точным значениям заполняющих объемов, или, что то же самое, нахождению минимальных заполнений. До недавнего времени список известных минимальных заполнений ограничивался областями в некоторых симметрических пространствах. Однако, есть основания полагать, что класс гладких римановых метрик, являющихся минимальными заполнениями, гораздо шире. А именно, имеется следующая гипотеза: если риманова метрика g на диске D^n такова, что любые две точки внутри диска соединяются единственной геодезической, и эта геодезическая минимальна, то (D^n, g) — минимальное заполнение (в классе римановых метрик на D^n).

В число результатов диссертации входит доказательство этой гипотезы в размерности 2, а также для метрик, достаточно близких к евклидовой.

2. Граничная жесткость. Пусть (M, g) — компактное риманово многообразие с краем, d_g — функция риманова расстояния. Задача граничной жесткости состоит в следующем: верно ли, что ограничение d_g на край определяет метрику g однозначно (с точностью до изометрии)? Другими словами, требуется восстановить метрику g внутри многообразия, зная только геодезические расстояния между точками края.

Эта задача является геометрическим аналогом обратной задачи кинематики, различные варианты которой изучаются с начала 20-го века. Первоначальной мотивировкой служили вопросы геофизики, а именно задача определения внутренней структуры Земли по времени прохождения сейсмических волн (G. Herglotz, 1905 [13], E. Wiechert и K. Zoeppritz, 1907 [17]).

Риманова метрика g на компактном многообразии с краем называется *гранично жесткой*, если она однозначно (с точностью до изометрии, тождественной на краю) восстанавливается по своими граничным расстояниям. Далеко не каждая риманова метрика является гранично жесткой, в качестве примера можно рассмотреть стандартную полусферу. Р. Мичел сформулировал естественный набор предположений, при которых граничная жесткость выглядит правдоподобной: риманова метрика g на диске D^n называется *простой* (по Мичелу), если край диска строго является выпуклым относительно g, любые две точки в M соединяются единственной геодезической метрики g, и геодезические не имеют сопряженных точек. Известная гипотеза Мичела состоит в том, что любая простая метрика является гранично жесткой.

Гипотеза Мичела в размерности 2 была недавно доказана Л. Пестовым и Г. Ульманом [16], до этого различными авторами (R. Michel, M. Gromov, C. Croke, J.-P. Otal) были доказаны некоторые частные случаи этого результата. В старших размерностях известно немного примеров гранично жестких метрик, и все они обладают свойствами симметрии. Это компактные области в $\mathbf{R}^n$ (M. Gromov [10]), во внутренности полусферы S^n_+ (R. Michel [15]), в симметрических пространствах отрицательной кривизны (G. Besson, G. Courtois и S. Gallot [4]) и в расщепляющихся пространствах вида $X \times \mathbf{R}$, где X — полное односвязное риманово многообразие без сопряженных точек (C. Croke и B. Kleiner [9]).

В диссертации гипотеза Мичела рассматривается как частный случай усиленной гипотезы о минимальном заполнении: простая метрика g на D^n является единственным (с точностью до изометрии) минимальным заполнением своего края $(\partial D^n, d_g)$.

В диссертации эта усиленная гипотеза и, как следствие, гипотеза Мичела, доказывается в размерности 2 и для метрик, достаточно близких к евклидовой метрике области в $\mathbf{R}^n$. Двумерный результат не столь интересен, так как в нем единственность минимального заполнения выводится из результата Пестова и Ульмана о граничной жесткости. Для почти плоских метрик, наоборот, граничная жесткость доказывается непосредственным анализом случая равенства в доказательстве минимальности.

3. Асимптотические объемы и систолические неравенства. Рассмотрим периодическую риманову метрику g в $\mathbf{R}^n$, то есть метрику, инвариантную относительно стандартного действия группы $\mathbf{Z}^n$ параллельными переносами. Зафиксируем точку $x_0 \in \mathbf{R}^n$ и рассмотрим метрические шары $B_R(x_0)$ метрики g с центрами в x_0 и радиусами $R \to \infty$. Объемы этих шаров растут как полином степени n, точнее,

$\mathrm{vol}_g(B_R(x_0)) \sim c(g) \cdot R^n$ при $R \to \infty$ для некоторой константы $c(g) > 0$. Число $c(g)$ называется *асимптотическим объемом* метрики g и обозначается $\mathrm{AsVol}(\mathbf{R}^n, g)$.

М. Громов [10] доказал, что асимптотический объем любой периодической римановой метрики g в $\mathbf{R}^n$ оценивается снизу константой, зависящей только от n, и высказал гипотезу, что минимальное значение асимптотического объема достигается для евклидовой метрики. Для $n = 2$ эту гипотезу доказал И. К. Бабенко в 1990 г. Одним из результатов диссертации является доказательство этой гипотезы для всех n.

Заполняющие и асимптотические объемы тесно связаны с систолической геометрией. История этой области начинается с неравенства Лёвнера (1952 г.): для любой римановой метрики g на двумерном торе T^2 существует нестягиваемая петля γ, длина которой $L(\gamma)$ удовлетворяет оптимальному неравенству $L(\gamma)^2 \le \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{area}(T^2, g)$.

В работе [10] М. Громов доказал аналогичное неравенство с (неоптимальной) константой, зависящей от размерности, для всех гомологически существенных многообразий, в частности, для n-мерного тора T^n при любом n. Позднее в книге [12] он получил оптимальные константы в обобщенном неравенства Лёвнера на T^n — как и ожидалось, оптимальные значения реализуются плоскими метриками. Доказательство Громова опирается на теорему 9.3.1 диссертации (которая к этому моменту уже была опубликована). Тот же метод позволил доказать обобщенное неравенство Лёвнера не только для торов, но и для некоторых других многообразий, у которых первое число Бетти равно размерности. Одним из результатов диссертации является дальнейшее обобщение этого неравенства на многообразия, у которых первое число Бетти не превосходит размерности.

4. Финслеровы метрики и поверхности в банаховых пространствах. Для исследования заполняющих и асимптотических объемов очень полезными оказываются различные варианты конструкции Куратовского, позволяющей изометрически вложить любое метрическое пространство в банахово пространство. Простейший вариант этой конструкции применительно к минимальным заполнениям состоит в следующем. Пусть S — замкнутое $(n-1)$-мерное многообразие с метрикой d, и пусть $F_d : S \to C^0(S) \subset L^\infty(S)$ — стандартное изометрическое вложение Куратовского: образ $F_d(x)$ точки $x \in S$ есть дистанционная функция $d(x, \cdot)$. Если n-мерное риманово многообразие (M, g) заполняет пространство (S, d), то отображение F_d допускает нерастягивающее (относительно g) продолжение $F : M \to L^\infty(S)$. Поскольку это отображение нерастягивающее, оно не увеличивает объем.

Отсюда следует, что заполняющий объем пространства (S, d) оценивается снизу инфимумом площадей n-мерных липшицевых поверхностей в пространстве $L^\infty(S)$, затягивающих данную границу $F_d(S)$. М. Громов [10] показал, что отношение заполняющего объема к этому инфимуму площадей ограничено константой, зависящей только от размерности. Это наблюдение лежит в основе его фундаментальных результатов о сравнении заполняющего объема, заполняющего радиуса и $(n-1)$-мерного объема самого пространства (S, d).

Одним из результатов диссертации является уточнение вышеупомянутого результата о сравнении заполняющих объемов и площадей, а именно избавление от константы: при правильном выборе определения площади заполняющий объем пространства (S, d) в точности равен инфимуму площадей поверхностей в $L^\infty(S)$ с данным краем $F_d(S)$. Как следствие, минимальные заполнения соответствуют поверхностям, минимизирующими площадь при фиксированной границе. Это позволяет использовать для исследования заполняющих объемов методы вариационного исчисления.

Определение площади поверхности в пространствах вида $L^\infty(S)$ является нетривиальным вопросом, которому посвящены главы 3 и 4 диссертации. Поскольку норма в $L^\infty(S)$ не евклидова, даже для гладко вложенной поверхности индуцируемая на ней метрика, вообще говоря, является не римановой, а финслеровой. Это показывает, что рассматриваемые вопросы, даже при решении чисто римановых задач, удобно рассматривать в более общем контексте финслеровой геометрии.

В отличие от риманова случая, в финслеровой геометрии существуют различные определения объема, наиболее часто используются объем по Буземану и объем по Холмсу–Томпсону В теории заполняющих объемов традиционным является использование объема по Бенсону [3], который, следуя Громову, обычно обозначают через $mass*$. Этот объем очень прост в использовании (в частности, легко определяется для любого метрического пространства), но является слишком грубым инвариантом для нахождения точных значений заполняющих объемов. В этом одна из причин неоптимальности констант в вышеупомянутых результатах Громова.

В общей теории, развиваемой в главах 3–6 диссертации, определение объема не фиксируется, но предполагается, что оно удовлетворяет естественным требованием, главным из которых является монотонная зависимость от метрики. Выбор конкретного определения зависит от рассматриваемой задачи. В упоминавшихся выше приложениях используется объем по Холмсу–Томпсону и введенный в главе 3 объем по Лёвнеру, который оказывается особенно хорошо приспособленным для решения римановых задач, требующих вспомогательных финслеровых построений.

5. Минимальность плоских поверхностей. Пусть V — конечномерное нормированное векторное пространство. $P \subset V$ — линейное подпространство, размерности n, где $2 \le n < \dim V$. Пусть D — область в P с гладкой или кусочно линейной границей (можно считать, что D — аффинный образ стандартного n-мерного шара $D^n \subset \mathbf{R}^n$). Верно ли, что D минимизирует n-мерную площадь среди всех n-мерных поверхностей в V с тем же краем?

Этот вопрос, несмотря на кажущуюся очевидность, остается открытым с середины 20-го века, когда он был явно сформулирован Буземаном [6]. (На самом деле он включает в себя несколько вопросов, так как имеются различные определения площади в нормированном пространстве, соответствующие различным определениям финслерова объема. Формулировка Буземана относилась к площади по Холмсу–Томпсону, которая определялась в терминах проекционных функций выпуклых тел.)

В случае гиперповерхностей (то есть для $n = \dim V - 1$) минимальность плоских областей известна и следует из классических теорем Минковского и Буземана о выпуклости тел сечений и проекций. В коразмерностях, больших 1, для стандартных определений площади известно немногое: положительные ответы для некоторых специальных типов норм и контрпримеры к более сильным утверждениям о выпуклой продолжимости. Одним из результатов диссертации является положительный ответ на вопрос Буземана при $n = 2$ (для поверхностей, параметризованных диском).

Минимальность плоских поверхностей (или, на языке вариационного исчисления, полуэллиптичность интегранда площади) играет ключевую роль в вопросах о минимальных заполнениях и асимптотических объемах. А именно, это свойство является необходимым (а иногда и достаточным) для финслеровых обобщений обсуждавшихся выше результатов. Эквивалентность полуэллиптичности площади и ряда свойств, важных для метрической геометрии, является результатом главы 6 диссертации. Большая часть упомянутых выше результатов о римановых метриках является следствием этих свойств и полуэллиптичности объема по Лёвнеру. Кроме упомянутых выше результатов, из свойств объема по Лёвнеру также следует полунепрерывность объема относительно сходимости по Громову–Хаусдорфу (при некоторых топологических ограничениях), которая доказывается в главе 8.

6. Критерии полуэллиптичности. Понятие полуэллиптичности для произвольных n-мерных параметрических интеграндов было введено Ф. Альмгреном [2] и играет важную роль в вариационном исчислении и геометрической теории меры. Для интеграндов, инвариантных относительно параллельных переносов (к которым относятся площади в нормированных пространствах) полуэллиптичность — то же самое, что минимальность плоских поверхностей. Точнее, свойство полуэллиптичности состоит в том, что плоские поверхности минимизирую площадь в классе липшицевых цепей с целыми или вещественными коэффициентами. Таким образом, имеются разные варианты определения полуэллиптичности: над $\mathbf{Z}$ и над $\mathbf{R}$ (а также над другими кольцами, но они в диссертации не рассматриваются). Для удобства мы вводим еще одно понятие "топологическая полуэллиптичность" которая означает минимальность в классе поверхностей, параметризованных диском D^n (при $n \geq 3$ это эквивалентно полуэллиптичности над $\mathbf{Z}$).

Определение полуэллиптичности сложно для непосредственной проверки, поэтому важно иметь критерии, позволяющие доказывать полуэллиптичность конкретных интеграндов. Практически единственным известным критерием является выпуклая продолжимость, то есть условие, что интегранд продолжается до выпуклой функции на n-кратном внешнем произведении $\Lambda^n V$. Проекционные функции выпуклых тел не обладают этим свойством, и именно этим вызвана сложность обсуждавшегося выше вопроса о минимальности плоских поверхностей.

Поэтому интересен вопрос о наличии других критериев, то есть о том, эквивалентны ли полуэллиптичность и выпуклая продолжимость. В диссертации доказано, что ответ положителен для полуэллиптичности над $\mathbf{R}$ и отрицателен для полуэллиптичности над $\mathbf{Z}$. Интересным следствием первого из этих результатов является обобщение на старшие коразмерности классической теоремы Минковского о существовании многогранной поверхности с данными направлениями и площадями граней.

Цель работы. Целью является изучение общих вопросов о римановых и финслеровых объемах и площадях липшицевых поверхностей в банаховых пространствах, а также приложения в различных областях, таких, как теория заполняющих объемов, асимптотическая геометрия, систолическая геометрия, геометрия многогранников, вариационное исчисление, краевые обратные задачи.

Методы исследований. Используются методы дифференциальной геометрии, гомотопической топологии, функционального анализа, вариационного исчисления, геометрии выпуклых тел.

Научная новизна. Получены следующие новые результаты.

- доказана минимальность заполнения для римановых и финслеровых метрик без сопряженных точек на двумерном диске;
- установлено соответствие между минимальными заполнениями и минимизирующими площадь поверхностями в пространстве L^∞, из которого, в частности, следует минимальность заполнения и граничная жесткость для римановых метрик, достаточно близких к евклидовым;
- доказана гипотеза Громова о минимальном значении асимптотического объема периодической римановой метрики в $\mathbf{R}^n$;
- получено обобщение оптимального систолического неравенства Лёвнера на многообразия, у которых первое число Бетти не превосходит размерности;
- доказана полунепрерывность риманова объема снизу относительно сходимости по Громову–Хаусдорфу при ограничениях на топологию;
- доказан двумерный случай гипотезы Буземана о минимальности плоских поверхностей в нормированных пространствах;
- выяснены соотношения между свойствами полуэллиптичности над $\mathbf{R}$ и $\mathbf{Z}$ и выпуклой продолжимости для параметрического интегранда произвольной размерности и коразмерности;
- получено обобщение на старшие коразмерности теоремы Минковского о существовании многогранника с данными направлениями и площадями граней.

Теоретическая и практическая ценность. Работа имеет теоретический характер. Ее результаты и методы могут применяться в дальнейших исследованиях по геометрии римановых и финслеровых многообразий, а также липшицевых поверхностей в банаховых пространствах.

Апробация работы. Результаты докладывались на международных конференциях "Geometric Rigidity and Hyperbolic Dynamics" (Oberwolfach Institute, Германия, 1996); "Geometry" (Obervolfach Institute, Германия, 1996); "Dynamical Systems and Relalated Topics (Penn State University, США, 1997); "2nd Russian-German Geometry Meeting" (ин-т Эйлера, Санкт-Петербург, 2002); "Semi-annual Workshop on Dynamical Systems and Relalated Topics" (Penn State University, США, 2004); "Geometrie" (Oberwolfach Institute, Германия, 2006); "3rd Russian-German Geometry Meeting" (ин-т Эйлера, Санкт-Петербург, 2007); "International Meeting on Metric Geometry" (Sun Yat-sen University, г. Гуанчжоу, Китай, 2007); "Metric and Alexandrov Geometry" (Capital Normal University, г. Пекин, Китай, 2008); а также на семинарах в ПОМИ РАН, University of Maryland, University of North Caroline, University of Illinois, University of Pennsylvania, Courant Institute, Penn State University, University of Freiburg, University of Washington в 1994–2008 г.

Публикации. В российский журналах, рекомендованных ВАК, и зарубежных журналах, входящих в систему цитирования Web of Science: Science Citation Index Expanded, опубликованы 16 статей [18]–[33] по теме диссертации. Основные результаты диссертации содержатся в статьях [20], [21], [25], [27], [28], [29] и [33]. В работах [20], [27], [28] и [29], написанных в соавторстве, результаты являются неразделимым продуктом совместной творческой деятельности авторов, а вклад в доказательства распределяется между ними следующим образом. В статье [20] соискателю принадлежат лемма 1 о представлении эллипсоида, лемма 3 о сжимающей проекции и лемма об изометрии, а остальные леммы принадлежат соавтору. В статье [27] соискателю принадлежит вывод гипотезы A о точной нижней грани асимптотического объема и гипотезы C о минимальности плоского заполнения из гипотезы B о полуэллиптичности финслерова объема, а также §5, в котором разбирается случай двумерного симплектического объема; остальные импликации и §6 принадлежат соавтору. В работе [28] соискателю принадлежит геометрическая часть доказательств, а топологическая часть принадлежит соавтору. В работе [29] соискателю принадлежит лемма 3.1 об оценке заполняющей площади, второй шаг доказательства теоремы 2 (устранение особенностей) и лемма 4.2 об оценках площадей проекций; остальные леммы принадлежат соавтору.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 10 глав, разбитых на параграфы, и списка литературы, содержащего 93 наименования. Общий объем диссертации составляет 216 страниц.

Содержание диссертации

Диссертация состоит из введения и 10 глав, разбитых на параграфы. Главы 1 и 3 посвящены, в основном, обсуждению определений и не претендуют на оригинальность. В главах 2 и 4–6 изучаются общие вопросы, не зависящие от выбора определения объема. В главах 7–10 содержатся приложения к конкретным вопросам римановой и финслеровой геометрии.

Глава 1. Плотности и площади

Это вводная глава, ее цель — зафиксировать термины и обозначения, а также доказать ряд вспомогательных фактов. Основным объектом рассмотрения является n-мерный параметрический интегранд θ в конечномерном векторном пространстве V, где $\dim V \geq n$, и определяемый им функционал A_θ, играющий роль "площади поверхности" и называемый *θ-площадью.* Для наших целей достаточно рассмотрения интеграндов, инвариантных относительно параллельных переносов, которые называются *n-плотностями.* Изложение основано на полиэдральных структурах, так как они позволяют иметь дело с разрывными n-плотностями. Для непрерывных n-плотностей полиэдральные определения эквивалентны стандартным, основанным на липшицевых цепях или спрямляемых потоках.

Для векторного пространства V и натурального n обозначим через $G_n(V)$ и $G_n^+(V)$ грассмановы многообразия неориентированных и ориентированных n-мерных линейных подпространств пространства V. Обозначим $G_{n,N} = G_n(\mathbf{R}^N)$, $G_{n,N}^+ = G_n^+(\mathbf{R}^N)$. Через $\Lambda^n V$ обозначим n-кратное внешнее произведение $V \wedge \cdots \wedge V$, через $\Lambda_s^n V$ — *грассманов конус* порядка n, то есть подмножество произведения $\Lambda^n V$, состоящее из n-векторов вида $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$. Такие n-векторы называются *простыми.* При наличии евклидовой структуры на V множество единичных простых n-векторов отождествляется с $G_n^+(V)$.

В §1.1 вводятся бескоординатные определения для стандартных понятий из теории меры и вариационного исчисления. Если X — n-мерное векторное пространство, то инвариантные относительно параллельных переносов локально конечные меры на X находятся во взаимно однозначном соответствии с нормами на пространстве $\Lambda^n X \simeq \mathbf{R}$, а именно, норма n-вектора $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$ равна мере параллелепипеда, порожденного векторами $v_1, \dots, v_n$. Мы называем такую норму на $\Lambda^n X$ *плотностью* соответствующей меры.

Аналогично, *плотностью меры* (или просто плотностью) на n-мерном гладком многообразии M будем называть неотрицательную измеримую функцию $\nu : \Lambda^n TM \to \mathbf{R}$, сужение которой на каждый слой симметрично и положительно однородно. Такую структуру можно интегрировать по многообразию точно так же, как дифференциальную n-форму, при этом интеграл не зависит от ориентации.

Пусть V — конечномерное векторное пространство, $\dim V \geq n$.

Определение. *n-мерной плотностью* (или просто *n-плотностью*) в пространстве V будем называть любую локально ограниченную неотрицательную борелевскую функцию $\theta : \Lambda^n_s V \to \mathbf{R}$, удовлетворяющую условию положительной однородности: $\theta(t\sigma) = t\theta(\sigma)$ для всех $\sigma \in \Lambda^n_s V$ и $t \geq 0$.

Такая функция θ называется *симметричной*, если $\theta(-\sigma) = \theta(\sigma)$ для всех $\sigma \in \Lambda^n_s V$.

Естественные примеры n-плотностей симметричны и непрерывны. Разрывные и несимметричные n-плотности нужны для вспомогательных построений в некоторых доказательствах в главе 2.

Самыми важными примерами для наших целей являются плотности финслеровых площадей: если на V задана норма $\|\cdot\|$ и зафиксирован некоторый функционал n-мерного финслерова объема (см. ниже), значение θ на простом n-векторе $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_n$ полагается равным финслерову объему параллелепипеда, порожденного векторами $v_1, v_2, \dots, v_n$, относительно нормы $\|\cdot\|$.

Липшицевой поверхностью размерности n в пространстве V будем называть локально липшицево отображение $f : M \to V$, где M — n-мерное гладкое многообразие. Поверхность называется *ориентированной*, если ее область определения ориентирована. По теореме Радемахера, любая липшицева поверхность $f : M \to V$ дифференцируема почти всюду. Ее дифференциал df есть почти всюду определенное измеримое отображение из TM в V, линейное на слоях. Он естественно индуцирует измеримое отображение $f_* : \Lambda^n TM \to \Lambda^n_s V$.

Определение. Пусть θ — n-плотность в V, $f : M \to V$ — n-мерная липшицева поверхность. Если θ симметрична, определим *θ-площадь* $A_\theta(f|_U)$ измеримого множества $U \subset M$ на поверхности f равенством $A_\theta(f|_U) = \int_U \theta \circ f_*$. Величину $A_\theta(f) = A_\theta(f|_M)$ будем называть *θ-площадью* поверхности f.

В случае несимметричной n-плотности θ-площадь определяется аналогично, при этом поверхность должна быть ориентированной.

В §1.2 вводятся термины и обозначения, связанные с симплициальными структурами, и доказываются вспомогательные утверждения о параметризации цепей псевдомногообразиями и приближении их поверхностями. *n-мерным симплексом* (или просто *n-симплексом*) в пространстве V будем называть выпуклую оболочку набора $n+1$ точек из V, называемых *вершинами* симплекса, вместе с указанием порядка этих точек. По определению, *n-мерная цепь* в пространстве V — это формальная линейная комбинация вида $\sum_{i=1}^N a_i \Delta_i$, где $a_i \in \mathbf{R}$, Δ_i — n-симплексы в V. Такие цепи образуют векторное пространство, обозначаемое через $S_n(V)$. Множество цепей с коэффициентами из кольца $\mathbf{K} \subset \mathbf{R}$ обозначается через $S_n(V; \mathbf{K})$. Граница ∂s

цепи $s \in S_n(V)$ определяется стандартным образом. Каждое кусочно линейное отображение n-мерного многообразия (более общо, псевдомногообразия) в пространство V естественным образом параметризует целочисленную цепь. Для n-плотности θ и цепи $s \in S_n(V)$ естественным образом определяется θ-площадь $A_\theta(s)$.

В §1.3 вводится ключевое понятие полуэллиптичности n-плотности θ.

Определение. Пусть $\mathbf{K} \subset \mathbf{R}$ — подкольцо (например, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ или $\mathbf{K} = \mathbf{Z}$). n-плотность θ в пространстве V называется *полуэллиптической* над $\mathbf{K}$ если любой n-симплекс Δ имеет минимальную θ-площадь среди всех цепей $s \in S_n(V; \mathbf{K})$, для которых $\partial s = \partial \Delta$.

θ называется *топологически полуэллиптической*, если любой невырожденный n-симплекс $\Delta \subset V$ имеет минимальную θ-площадь среди всех кусочно линейных поверхностей, параметризованных симплексом Δ так, что параметризация тождественна на краю.

θ называется *выпукло продолжимой*, если существует такая выпуклая положительно однородная функция $\tilde{\theta} : \Lambda^n V \to \mathbf{R}_+$, что $\tilde{\theta}|_{\Lambda^n_s V} = \theta$.

Хорошо известно, что выпуклая продолжимость n-плотности влечет ее полуэллиптичность над $\mathbf{R}$, которая в свою очередь влечет полуэллиптичность над $\mathbf{Z}$. Полуэллиптичность над $\mathbf{Z}$ влечет топологическую полуэллиптичность, а при $n \geq 3$ эти два свойства эквивалентны. Из топологической полуэллиптичности n-плотности следует ее непрерывность, это доказывается в следствии 1.3.8.

В оставшихся двух параграфах главы рассматриваются вспомогательные понятия заполняющей θ-площади и полуэллиптической оболочки n-плотности θ, а также эквивалентные переформулировки понятий полуэллиптичности на языке липшицевых поверхностей. В частности, в предложении 1.5.1 доказывается, что непрерывная симметричная n-плотность θ топологически полуэллиптична тогда и только тогда, когда любой аффинный диск $E : D^n \to V$ имеет минимальную θ-площадь среди всех липшицевых поверхностей вида $f : D^n \to V$ таких, что $f|_{\partial D^n} = E|_{\partial D^n}$. (Аффинным диском называется любое невырожденное аффинное отображение стандартного евклидова шара D^n или образ шара при таком отображении.)

Глава 2. Полуэллиптичность над R и Z

Целью этой главы является выяснение соотношений между различными видами полуэллиптичности. В случае $n = \dim V - 1$ хорошо известно, что все виды полуэллиптичности эквивалентны выпуклости плотности (заметим, что в этом случае все n-векторы простые, то есть $\Lambda^n_s V = \Lambda^n V$ — векторное пространство). В главе рассматриваются аналогичные вопросы для старших коразмерностей. Результаты этой главы получены совместно с Д. Бураго и опубликованы в статье [29].

В §2.1 вводится вспомогательное понятие результирующего n-вектора цепи. Для n-симплекса Δ с вершинами $p_0, p_1, \dots, p_n$ определим результирующий n-вектор $\mathbf{I}(\Delta) \in \Lambda_s^n V$ равенством $\mathbf{I}(\Delta) = \frac{1}{n!} \bigwedge_{i=1}^{n} (p_i - p_0)$. Другими словами, если Δ невырожден, то $\mathbf{I}(\Delta)$ — единственный простой n-вектор, лежащий в n-мерном подпространстве, сонаправленном с Δ и имеющий такую же и площадь, как Δ; если же Δ вырожден, то $\mathbf{I}(\Delta) = 0$. Результирующий вектор $\mathbf{I}(s)$ цепи $s \in S_n(V)$ определяется по линейности. Аналогично определяется результирующий вектор любой ориентированной n-мерной липшицевой поверхности. Легко проверить, что результирующий вектор цепи или поверхности однозначно определяется границей этой цепи или поверхности. В §2.2 доказывается

Теорема (2.2.3)**.** *n-плотность θ в пространстве V полуэллиптична над $\mathbf{R}$ тогда и только тогда, когда она выпукло продолжима.*

Доказательство основано на идеях, аналогичных доказательству Федерера [11] двойственности стабильных норм в гомологиях и когомологиях римановых многообразий. Несмотря на естественность формулировки и относительно типовой метод доказательства, результат, по-видимому, является новым. В §2.3 доказывается

Теорема (2.3.1)**.** *Пусть $n < N$, $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ — попарно различные ориентированные n-мерные линейные подпространства в $\mathbf{R}^N$, и пусть числа $a_1, \dots, a_m > 0$ таковы, что $\sum a_i \overline{\alpha}_i = 0$, где $\overline{\alpha}_i \in \Lambda_s^n \mathbf{R}^N$ — единичный простой n-вектор, соответствующий подпространству α_i.*

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует замкнутая ориентированная n-мерная кусочно линейная поверхность в $\mathbf{R}^N$, удовлетворяющая следующим условиям.

1. Для каждого $i = 1, \dots, m$ сумма (евклидовых) площадей всех граней, сонаправленных с α_i, равна a_i.

2. Сумма площадей всех граней, не сонаправленных ни с одним из подпространств α_i, меньше ε.

Эта теорема обобщает на старшие коразмерности классическую теорему Минковского о существовании выпуклого многогранника с данными направлениями и площадями $(N-1)$-мерных граней. Условие $\sum a_i \overline{\alpha}_i = 0$ является необходимым и соответствует условию из теоремы Минковского: сумма единичных внешних нормалей, умноженных на площади граней, равна нулю.

Теорема 2.3.1 не является прямым обобщением теоремы Минковского, так как она не гарантирует выпуклости (которая не имеет смысла в старших коразмерностях) и требует наличия “дополнительных” граней сколь угодно малой площади. Эти дополнительные грани необходимы, так как уже в $\mathbf{R}^4$ можно построить такой набор плоскостей α_i и коэффициентов a_i, что условие $\sum a_i \overline{\alpha}_i = 0$ выполнено, но плоскости попарно трансверсальны (не имеют общих прямых). Из таких направлений невозможно построить кусочно линейную поверхность (без дополнительных граней), так как соседние грани поверхности должны иметь общие ребра.

В §2.4 вводится понятие взвешенного гауссова образа n-мерной поверхности в $\mathbf{R}^N$.

Определение. *Взвешенным гауссовым образом* n-мерной ориентированной липшицевой поверхности $f : M \to \mathbf{R}^N$ назовем борелевскую меру G_f на $G^+_{n,N} = G^+_n(\mathbf{R}^N)$, определяемую равенством $G_f(U) = \big|\{x \in M : T_x f \in U\}\big|$ для каждого борелевского подмножества $U \subset G^+_{n,N}$, где модуль означает n-мерную евклидову площадь на поверхности (индуцируемую параметризацией f).

Если поверхность f кусочно линейна, то определение принимает более простой вид. А именно, в этом случае G_f сосредоточена на конечном множестве, и мера точки $\alpha \in G^+_{n,N}$ равна сумме площадей всех граней поверхности, сонаправленных с α.

Результирующий n-вектор $\mathbf{I}(f)$ поверхности естественно определяется мерой G_f. Поскольку $\mathbf{I}(f)$ определяется границей поверхности, фиксирование границы задает соответствующее линейное ограничение на меру G_f. Теорема 2.3.1 означает, что это необходимое условие является и достаточным для существования замкнутой поверхности, взвешенный гауссов образ которой сколь угодно близок к данной мере.

В §2.5 рассматривается аналогичный вопрос для поверхностей с заданным краем, лежащим в n-мерном подпространстве. Оказывается, что в этом случае существуют дополнительные нелинейные ограничения на взвешенный гауссов образ.

Рассмотрим пространство $\mathbf{R}^4 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Ориентированную плоскость (e_1, e_2) будем обозначать через e_{12} и называть *горизонтальной* плоскостью, а ориентированную плоскость (e_3, e_4) будем обозначать через e_{34} и называть *вертикальной* плоскостью. Введем на $G^+_2(\mathbf{R}^4)$ стандартную угловую метрику. Для $\alpha \in G^+_2(\mathbf{R}^4)$ через $U_\varepsilon(\alpha)$ будем обозначать ε-окрестность плоскости α в этой метрике. Одно из нелинейных ограничений на гауссов образ содержится в следующей теореме.

Теорема (2.5.1)**.** *Пусть f — компактная связная ориентированная двумерная липшицева поверхность в $\mathbf{R}^4$, край которой — положительно ориентированная простая замкнутая кривая в горизонтальной плоскости. Тогда взвешенный гауссов образ G_f этой поверхности удовлетворяет неравенству*

$$G_f(G^+_{2,4} \setminus U_\varepsilon(e_{12}) \setminus U_\varepsilon(e_{34})) \geq \frac{1}{300} G_f(e_{34})$$

для $\varepsilon = 10^{-10}$.

Следствие (2.5.5)**.** *Рассмотрим в $\mathbf{R}^4$ простые единичные 2-векторы*

$$\begin{aligned} w_1 &= \tfrac{1}{2}(e_1 + e_3) \wedge (e_2 + e_4), \\ w_2 &= \tfrac{1}{2}(e_1 - e_3) \wedge (e_2 - e_4), \\ w_3 &= e_4 \wedge e_3, \end{aligned}$$

и пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — соответствующие им ориентированные плоскости. Существуют такая окрестность U множества $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ в $G^+_{2,4}$ и такая константа $c > 0$, что верно следующее.

Для любой компактной ориентированной двумерной кусочно линейной поверхности f в $\mathbf{R}^4$, граница которой — положительно ориентированная простая кривая в координатной плоскости e_{12}, ограничивающая единичную площадь, имеет место неравенство

$$G_f(G^+_{2,4} \setminus U) \geq c,$$

где G_f — взвешенный гауссов образ поверхности.

Это следствие демонстрирует, что аналог теоремы 2.3.1 для поверхностей с фиксированным краем неверен. Действительно, $w_1 + w_2 + w_3 = e_1 \wedge e_2$, поэтому линейное ограничение на $\mathbf{I}(f)$ не противоречит существованию поверхности, край которой ограничивает единичную область в e_{12}, а направления граней, за исключением сколь угодно малой площади, параллельны ориентированным плоскостям $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

В §2.6 из этого наблюдения и теоремы 2.2.3 выводится

Теорема (2.6.1)**.** *Существует непрерывная симметричная 2-плотность в $\mathbf{R}^4$, полуэллиптичная над $\mathbf{Z}$, но не над $\mathbf{R}$.*

Глава 3. Финслеровы объемы

Это еще одна вводная глава, в ней собраны предварительные сведения о финслеровых метриках и финслеровых объемах и доказаны необходимые для дальнейшего вспомогательные факты. Всюду в дальнейшем через ω_n обозначается евклидов объем единичного шара в $\mathbf{R}^n$.

В §3.1 рассматриваются конечномерные нормированные пространства. Норма $\|\cdot\|$ на векторном пространстве V однозначно определяется своим единичным шаром $B = \{x \in V : \|x\| \leq 1\}$, который является симметричным относительно 0 выпуклым телом. Хорошо известно, что среди всех эллипсоидов, содержащихся в B, существует единственный эллипсоид максимального объема. Он называется *эллипсоидом Джона* тела B. Эллипсоидом Джона нормы $\|\cdot\|$ будем называть эллипсоид Джона ее единичного шара. Он является единичным шаром некоторой положительно определенной квадратичной формы $Q \geq \|\cdot\|^2$.

Важную роль играет специальное представление формы Q через опорные элементы тела B (предложение 3.1.1), аналогичное известному представлению Болла, но учитывающее симметрию. Это представление было впервые использовано в совместной с Д. Бураго работе [19] для доказательства гипотезы Хопфа о торах без сопряженных точек.

В §3.2 собраны предварительные сведения из финслеровой геометрии. *Симметричная финслерова структура* (далее просто *финслерова структура*) на гладком многообразии M — это непрерывная функция $\varphi : TM \to \mathbf{R}_+$ такая, что для любой точки $x \in M$ сужение $\varphi_x = \varphi|_{T_xM}$ является нормой на T_xM. Финслеровы структуры также называют *финслеровыми метриками*. Многообразие, снабженное финслеровой структурой, называется *финслеровым многообразием*.

Примерами финслеровых многообразий являются римановы многообразия, конечномерные нормированные пространства и гладкие поверхности в них. Так же, как в римановом случае, для финслерова многообразия (M, φ) определяется длина $L_\varphi(\gamma)$ гладкой кривой γ и функция расстояния $d_\varphi : M \times M \to \mathbf{R}$. Гладкость и строгая выпуклость финслеровой метрики обеспечивают наличие гладких геодезических и геодезического потока.

В §3.3 и §3.4 обсуждается понятие объема для финслеровых метрик. Мы не фиксируем определение объема, но требуем, чтобы он удовлетворял некоторым естественным требованиям. А именно, n-мерный финслеров объем сопоставляет каждому n-мерному финслерову многообразию (M, φ) борелевскую меру vol_φ на M так, что выполняются следующие свойства: мера vol_φ монотонно зависит от φ, сохраняется при изометриях и совпадает с мерой Лебега в случае евклидова пространства.

Для определения n-мерного финслерова объема достаточно задать его только для n-мерных нормированных пространств . Объем в n-мерном нормированном пространстве $(V, \|\cdot\|)$ пропорционален мере Лебега (так как сохраняется при параллельных переносах), поэтому задается нормой на одномерном пространстве $\Lambda^n V$. Эти соображения приводят к следующему определению.

Определение. Пусть n — фиксированное натуральное число. Будем говорить, что задан *функционал n-мерного финслерова объема* (или просто n-мерного объема), если каждому n-мерному нормированному пространству $(V, \|\cdot\|)$ сопоставлена норма $\mathrm{vol}_{\|\cdot\|}$ на $\Lambda^n V$ так, что выполняются следующие свойства.

1. Монотонность: если $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|'$ — две нормы на одном векторном пространстве и $\|\cdot\| \le \|\cdot\|'$, то $\mathrm{vol}_{\|\cdot\|} \le \mathrm{vol}_{\|\cdot\|'}$.

2. Инвариантность относительно изометрий: если $(V, \|\cdot\|)$ и $(V', \|\cdot\|')$ — n-мерные нормированные пространства, $f : V \to V'$ — линейная изометрия между ними, то $\mathrm{vol}_{\|\cdot\|}(\sigma) = \mathrm{vol}_{\|\cdot\|'}(f_*(\sigma))$ для всех $\sigma \in \Lambda^n V$, где звездочка обозначает естественное действие изоморфизма на n-формах.

3. Если $|\cdot|$ — евклидова норма, то $\mathrm{vol}_{|\cdot|}$ — соответствующий евклидов объем.

Если задан функционал $\|\cdot\| \mapsto \mathrm{vol}_{\|\cdot\|}$ n-мерного финслерова объема, то объем vol_φ на финслеровом многообразии (M, φ) естественно определяется интегрированием плотности, а именно $\mathrm{vol}_\varphi = \int \nu_\varphi$, где ν_φ — плотность меры на M, определяемая равенством $\nu_\varphi(\sigma) = \mathrm{vol}_{\varphi_x}(\sigma)$, для $\sigma \in \Lambda^n T_xM$, $x \in M$, где $\varphi_x = \varphi|_{T_xM}$.

Отметим, что для определения объема в нормированном пространстве $(V, \|\cdot\|)$ достаточно задать объем одного множества (ограниченного и имеющего непустую внутренность). Например, объем по Буземану задается условием, что объем единичного шара в n-мерном нормированном пространстве равен ω_n.

В дальнейшем особое внимание уделяется двум конкретным функционалам финслерова объема: объему по Холмсу–Томпсону и объему по Лёвнеру.

Объем по Холмсу–Томпсону, иногда также называемый *симплектическим финслеровым объемом*, может быть определен следующим образом. Пусть $\|\cdot\|$ — произвольная норма в $\mathbf{R}^n$, тогда объем $\mathrm{vol}_{\|\cdot\|}$ нормируется условием

$$\mathrm{vol}_{\|\cdot\|}([0,1]^n) = \frac{1}{\omega_n}|B^*|,$$

где модуль обозначает меру Лебега в $\mathbf{R}^n$, B^* — полярное множество единичного шара B нормы $\|\cdot\|$.

Полезность этого объема обусловлена тем, что объем по Холмсу–Томпсону финслерова многообразия (M, φ) равен, с точностью до множителя $\frac{1}{\omega_n}$, каноническому симплектическому объему единичного кокасательного расслоения, который, в свою очередь, соответствует инвариантной относительно геодезического потока мере Лиувилля на единичном касательном расслоении. Для многих вопросов дифференциальной и интегральной геометрии, а также теории динамических систем, объем по Холмсу–Томпсону оказывается более естественным и удобным, чем более традиционный объем по Буземану. В диссертации он применяется для доказательства двумерного случая гипотезы о минимальном заполнении.

Объем по Лёвнеру, или *вписанный риманов объем*, можно определить следующим образом. Пусть $(V, \|\cdot\|)$ — n-мерное нормированное пространство, E — эллипсоид Джона единичного шара нормы $\|\cdot\|$. Тогда объем $\mathrm{vol}_{\|\cdot\|}$ нормируется условием

$$\mathrm{vol}_{\|\cdot\|}(E) = \omega_n.$$

Объем по Лёвнеру финслерова многообразия (M, φ) равен инфимуму объемов всех римановых метрик g на M, удовлетворяющих неравенству $g \geq \varphi^2$.

Для целей финслеровой геометрии этот объем не удобен, но он оказывается полезным для оценок римановых объемов, требующих вспомогательных финслеровых построений. В частности, именно это определение объема обеспечивает совпадение заполняющих объемов в классах римановых и финслеровых метрик и, как следствие, соответствие между минимальными заполнениями и минимальными поверхностями.

В последнем параграфе главы содержатся некоторые технические факты, полезные для дальнейшего. В частности, там даны выражения для плотностей рассматриваемых объемов и показано, что отношение любых двух функционалов n-мерного объема ограничено константой, зависящей только от размерности.

Глава 4. Липшицевы метрики

В этой главе строится технический аппарат для работы с произвольными липшицевыми метриками на многообразиях и липшицевыми поверхностями в бесконечномерных банаховых пространствах. Результаты опубликованы в статье [33].

Главной целью является определение площади липшицевой поверхности в банаховом пространстве. Для того, чтобы такое определение было полезным, оно должно быть согласованным как с внешней геометрией поверхности (т. е. вычисляться через производные параметризующего отображения), так и с внутренней геометрией (т. е. метрикой на многообразии, индуцированной этим отображением). Класс банаховых пространств, для которых определение работает, должен включать области значений вложений Куратовского, то есть пространства вида $L^\infty(\mu)$, где μ — σ-конечная мера.

Одна из возникающих трудностей — отсутствие теоремы Радемахера о дифференцируемости почти всюду для липшицевых отображений со значениями в L^∞. Другая — недостаточная регулярность индуцированных метрик (это, по существу, произвольные липшицевы метрики).

В §4.1 содержатся предварительные сведения из метрической геометрии. Термины "метрическое пространство" и "метрика" понимаются в расширенном смысле, а именно, допускаются нулевые расстояния между различными точками. (При этом все рассматриваемые метрики непрерывны относительно предписанной топологии на рассматриваемых пространствах.) Такая общность требуется при рассмотрении метрик, индуцируемых произвольными неинъективными отображениями.

Важную роль играют конечномерные приближения изометрических вложений Куратовского: любая метрика на сепарабельном пространстве может быть получена как предел неубывающей последовательности метрик, допускающих изометрические вложения в конечномерные нормированные пространства (предложение 4.1.5).

В §4.2 рассматривается *касательная финслерова структура* (аналог касательного конуса) произвольной липшицевой метрики на гладком многообразии M. Построение аналогично изложенному в [8], но отличается некоторыми деталями и большей общностью. Метрика d на M называется *липшицевой*, если она локально липшицева относительно (произвольной) вспомогательной римановой метрики d_{riem}.

Определение. Пусть d — липшицева метрика на M. Для каждого $v \in TM$ определим число $\varphi_d(v)$ равенством $\varphi_d(v) = \overline{s}_\gamma(0)$, где γ — произвольная дифференцируемая в нуле кривая вида $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, такая, что $\dot\gamma(0) = v$, $\overline{s}_\gamma$ — верхняя метрическая скорость относительно d. Определенную таким образом функцию $\varphi_d : TM \to \mathbf{R}$ будем называть *касательной финслеровой структурой* метрики d.

Касательная финслерова структура корректно определена и является локально ограниченной борелевской функцией на TM. Кроме того, она обладает следующими полезными свойствами:

• Является полунормой на почти каждом слое $T_x M$, $x \in M$.

• Сохраняется при переходе к индуцированной внутренней метрике.

• Если липшицева метрика d является пределом неубывающей последовательности $\{d_n\}$ метрик на M, то $\varphi_{d_n} \to \varphi_d$ почти всюду на TM.

В §4.3 определяется понятие объема липшицевой метрики. Точнее для каждого функционала n-мерного финслерова объема строится его естественное продолжение с класса финслеровых метрик на класс всех липшицевых метрик на n-мерных многообразиях. Пусть зафиксирован некоторый функционал n-мерного финслерова объема $\|\cdot\| \mapsto \mathrm{vol}_{\|\cdot\|}$.

Определение. Пусть d — липшицева метрика на n-мерном многообразии M, $\varphi = \varphi_d$ — ее касательная финслерова структура. Рассмотрим плотность $\nu = \nu_d$ на M, значение которой на n-векторе $\sigma \in \Lambda^n T_x M$ равно $\mathrm{vol}_{\varphi|_{T_x M}}(\sigma)$, если $\varphi|_{T_x M}$ — норма, и 0 в противном случае. Меру $\mathrm{vol}_d = \int \nu_d$ будем называть *объемом* липшицевой метрики d.

Так определенный объем согласован с финслеровым объемом, обладает свойством монотонности относительно метрики, не увеличивается при нерастягивающих отображениях, сохраняется при переходе к индуцированной внутренней метрике и выдерживает предельный переход по неубывающим последовательностям метрик. Кроме того, он согласован с понятием площади, введенным в главе 1.

А именно, для любого метрического пространства X и липшицевой поверхности $f : M \to X$ определим площадь $\mathrm{area}(f)$ равенством $\mathrm{area}(f) = \mathrm{vol}_{f^* d_X}(M)$. Тогда в случае конечномерного нормированного пространства X верно равенство $\mathrm{area}(f) = A_\theta(f)$, где θ — плотность n-мерной площади в пространстве X, определяемая данным функционалом финслерова объема.

В §4.4 вводится понятие слабой дифференцируемости липшицева отображения $f : M \to L^\infty$ и доказывается аналог теоремы Радемахера о дифференцируемости почти всюду. Слабая дифференцируемость определяется для отображений со значениями в пространстве X^*, сопряженном сепарабельному банахову пространству X. В важнейшем случае, когда областью значений является L^∞, в качестве X следует брать соответствующее пространство L^1.

Определение. Пусть X — сепарабельное банахово пространство, $f : M \to X^*$ — произвольное отображение. Для каждого $u \in X$ рассмотрим функцию $f_u : M \to \mathbf{R}$, заданную равенством $f_u(x) = \langle f(x), u \rangle$, где $\langle , \rangle$ обозначает стандартное спаривание X^* и X. Будем говорить, что f *слабо дифференцируема* в точке $p \in M$, если существует такое линейное отображение $L : T_p M \to X^*$, что для любого $u \in X$ функция f_u дифференцируема в точке p и ее дифференциал удовлетворяет равенству

$$d_p f_u(v) = \langle L(v), u \rangle \qquad \text{для всех } v \in T_p M.$$

Отображение L будем называть *слабым дифференциалом* f в точке p и обозначать через $d_p^w f$.

Теорема (4.4.3). *Пусть X — сепарабельное банахово пространство. Тогда любое липшицево отображение $f : M \to X^*$ слабо дифференцируемо почти всюду на M.*

В §4.5 доказывается согласованность почти всюду слабого дифференциала отображения и касательной финслеровой структуры индуцированной метрики на M:

Теорема (4.5.1). *Пусть d — липшицева метрика на M, $\varphi = \varphi_d$ — ее касательная финслерова структура, X — сепарабельное банахово пространство, $f : M \to X^*$ — изометрическое отображение пространства (M, d). Тогда для почти всех точек $p \in M$ слабый дифференциал $d_p^w f$ является изометрическим отображением из $(T_pM, \varphi|_{T_pM})$ в X^*, то есть*

$$\varphi_d(v) = \|d_p^w f(v)\|$$

для всех $v \in T_pM$.

Как следствие, слабый дифференциал любого нерастягивающего отображения $f : M \to X^*$ является нерастягивающим линейным отображением (относительно касательной финслеровой структуры) в почти каждом слое T_xM, $x \in M$.

Важным следствием теоремы является аналогичная конечномерному случаю согласованность “внутреннего” определения площади поверхности (как объема индуцированной липшицевой метрики) и “внешнего”, получаемого интегрированием плотности, индуцируемой слабым дифференциалом (следствие 4.5.3).

В §4.6 дается явное выражение для слабого дифференциала липшицева отображения $f : M \to L^\infty(S)$, где S — произвольное пространство с конечной мерой. А именно, каждому такому отображению f соответствует семейство липшицевых “координатных функций” $\{f_s\}_{s\in S}$, $f_s : M \to \mathbf{R}$, связанное с f соотношением $f(x)(s) = f_s(x)$ для всех $x \in M$ и (при фиксированном x) для почти всех $s \in S$ (предложение 4.6.2). Координатные функции слабого дифференциала получаются дифференцированием координатных функций отображения (предложение 4.6.5).

Глава 5. Заполняющие объемы

В этой главе рассматриваются заполняющие объемы по Громову и минимальные заполнения. Целью является установление соответствия между минимальными заполнениями и минимизирующими площадь поверхностями в банаховых пространствах. Результаты опубликованы в статье [33].

В §5.1 вводится определение заполняющего объема и минимального заполнения, учитывающее необходимость рассмотрения более широкого класса метрик, чем римановы. Пусть зафиксирован некоторый функционал n-мерного финслерова объема.

Тогда, согласно главе 4, каждому n-мерному многообразию M с липшицевой метрикой d сопоставляется мера vol_d на M.

Пусть S — замкнутое многообразие, $d : S \times S \to \mathbf{R}_+$ — произвольная метрика на S. Будем называть компактное многообразие M с метрикой d_M *заполнением* пространства (S, d), если $\partial M = S$ и $d_M(x, y) \geq d(x, y)$ для любых $x, y \in S$. В этом случае будем также говорить, что (M, d_M) *заполняет* (S, d).

Определение. Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторый класс компактных n-мерных многообразий с липшицевыми метриками. Пусть S — $(n-1)$-мерное многообразие, d_0 — липшицева метрика на S. Будем называть *заполняющим объемом* пространства (S, d_0) в классе $\mathfrak{M}$ (относительно данного функционала объема) величину

$$\mathrm{FillVol}_{\mathfrak{M}}(S, d_0) = \inf_{(M,d)\in\mathfrak{M}} \{\mathrm{vol}_d(M) : (M, d) \text{ заполняет } (S, d_0)\}.$$

Будем называть метризованное многообразие $(M, d) \in \mathfrak{M}$ *минимальным заполнением* в классе $\mathfrak{M}$, если $\mathrm{vol}_d(M)$ равно заполняющему объему пространства $(\partial M, d|_{\partial M\times\partial M})$ в классе $\mathfrak{M}$.

Стандартные определения, применяемые “по умолчанию”, соответствуют выбору в качестве $\mathfrak{M}$ класса всех римановых многообразий. Отметим, что в этом случае выбор функционала объема не важен, так как на классе римановых метрик объем определен однозначно.

В §5.2 доказываются технические результаты о сглаживании липшицевых метрик, из которых выводится

Теорема (5.2.3)**.** *Пусть M — n-мерное многообразие, $S = \partial M$, d_0 — метрика на S. Тогда*

1. Заполняющий объем пространства (S, d_0) в классе всех липшицевых метрик на M равен его заполняющему объему в классе гладких строго выпуклых финслеровых метрик на M.

2. Если в качестве функционала объема выбран объем по Лёвнеру, то этот заполняющий объем также равен заполняющему объему в классе всех римановых метрик на M.

Следствие (5.2.4)**.** *Если риманово многообразие M является минимальным заполнением, то любое его компактное подмногообразие $M_1 \subset M$ той же размерности тоже является минимальным заполнением.*

В §5.3 доказываются вспомогательные факты о продолжении нерастягивающих отображений со значениями в L^∞. Из них в §5.4 выводится

Теорема (5.4.1). *Пусть $X = L^\infty(\mu)$, где μ — мера на произвольном множестве, M — компактное n-мерное многообразие, $S = \partial M$. Пусть d_0 — метрика на S, $f : (S, d_0) \to X$ — изометрическое отображение. Тогда заполняющий объем пространства (S, d_0) в классе липшицевых (или, что то же самое, гладких строго выпуклых финслеровых) метрик на M равен*

$$\inf\{\mathrm{area}(F) : F : M \to X \text{ — липшицево, } F|_S = f\}.$$

Для минимальных заполнений имеем

Следствие (5.4.2). *Пусть $X = L^\infty(\mu)$, где μ — мера на произвольном множестве, (M, d) — компактное многообразие с липшицевой метрикой. Тогда для любого изометрического отображения $F : (M, d) \to X$ верно следующее: (M, d) является минимальным заполнением в классе всех многообразий с липшицевыми метриками тогда и только тогда, когда F минимизирует площадь среди всех липшицевых поверхностей в X с тем же краем.*

Вышеуказанные результаты верны для любого определения финслерова объема. Для изучения минимальных заполнений в римановой категории достаточно в качестве определения объема выбрать объем по Лёвнеру.

Следствие (5.4.3). *Пусть $X = L^\infty(\mu)$, где μ — мера на произвольном множестве, M — компактное многообразие, $S = \partial M$. Пусть d_0 — метрика на S, $f : (S, d_0) \to X$ — изометрическое отображение. Тогда заполняющий объем пространства (S, d_0) в классе римановых метрик на M равен*

$$\inf\{\mathrm{area}(F) : F : M \to X \text{ — липшицево, } F|_S = f\},$$

где area *— площадь, определяемая объемом по Лёвнеру.*

Следствие (5.4.4). *Пусть $X = L^\infty(\mu)$, где μ — мера на произвольном множестве, M — компактное риманово многообразие. Тогда для любого изометрического отображения $F : M \to X$ верно следующее: M является минимальным заполнением тогда и только тогда, когда F минимизирует площадь по Лёвнеру среди всех липшицевых поверхностей в X с тем же краем.*

Подставляя в качестве изометрического отображения представление краевыми расстояниями, получаем

Следствие (5.4.5). *Компактное риманово многообразие M с выпуклым краем и минимальными геодезическими является минимальным заполнением тогда и только тогда, когда его представление краевыми расстояниями в $L^\infty(\partial M)$ минимизирует площадь по Лёвнеру среди всех липшицевых поверхностей в $L^\infty(\partial M)$ с тем же краем.*

Глава 6. Следствия полуэллиптичности

Будем называть функционал n-мерного финслерова объема *топологически полуэллиптическим*, если в любом конечномерном нормированном пространстве X (любой размерности $\geq n$) порождаемая этим функционалом плотность n-мерной площади топологически полуэллиптична.

В этой главе доказывается эквивалентность полуэллиптичности объема и нескольких важных гипотез метрической геометрии. Результаты получены совместно с Д. Бураго и опубликованы в статье [27].

Первой из гипотез является минимальность плоских заполнений.

Теорема (6.1.2). *Если функционал n-мерного объема топологически полуэллиптичен, то верно следующее.*

Пусть $(V, \|\cdot\|)$ — n-мерное нормированное пространство, $D \subset V$ — n-мерный аффинный диск. Тогда D с метрикой $d_{\|\cdot\|}$ является минимальным заполнением в классе всех финслеровых метрик на D.

Вторая гипотеза — полунепрерывность объема снизу относительно равномерной сходимости метрик.

Теорема (6.2.1). *Если функционал n-мерного объема топологически полуэллиптичен, то он полунепрерывен снизу относительно равномерной сходимости метрик, а именно верно следующее.*

Пусть M — многообразие размерности n, и пусть последовательность $\{d_i\}$ финслеровых метрик на M равномерно сходится (как последовательность функций на $M \times M$) к финслеровой метрике d. Тогда

$$\operatorname{vol}(M, d) \leq \varliminf_{i\to\infty} \operatorname{vol}(M, d_i).$$

Отметим, что объем не непрерывен в топологии равномерной сходимости даже для римановых метрик (ситуация аналогична полунепрерывности, но не непрерывности длины относительно равномерной сходимости кривых).

В §6.3 рассматриваются периодические метрики в $\mathbf{R}^n$, то есть внутренние метрики, инвариантную относительно стандартного действия группы $\mathbf{Z}^n$ параллельными переносами. Другими словами, периодическая метрика — это поднятие внутренней метрики с тора T^n в его универсальное накрывающее.

Определение. Пусть d — периодическая метрика в $\mathbf{R}^n$. Зафиксируем точку $x_0 \in \mathbf{R}^n$ и определим функцию $\|\cdot\| : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ равенством

$$\|v\| = \lim_{t\to+\infty} \frac{d(x_0, x_0 + tv)}{t}.$$

Нетрудно проверить (см., например, [1, §8.5]), что эта функция корректно определена, не зависит от выбора x_0 и является нормой на $\mathbf{R}^n$. Она называется *стабильной нормой* метрики d.

Из определения следует, что метрика d асимптотически эквивалентна своей стабильной норме при расстояниях, стремящихся к бесконечности.

Понятие стабильной нормы введено Федерером [11]. Обычно ее определяют на группе $H_1(M; \mathbf{R})$ вещественных гомологий компактного многообразия M, снабженного внутренней метрикой. Данное выше определение соответствует случаю $M = T^n$.

Определение. Пусть d — периодическая финслерова метрика в $\mathbf{R}^n$. *Асимптотическим объемом* метрики d называется число

$$\operatorname{AsVol}(\mathbf{R}^n, d) = \lim_{r\to\infty} \frac{\operatorname{vol}_d(B_r(x_0))}{r^n},$$

где $B_r(x_0)$ — метрический шар в $(\mathbf{R}^n, d)$ радиуса r с центром в фиксированной точке $x_0 \in \mathbf{R}^n$.

Нетрудно убедиться, что асимптотический объем однозначно определяется стабильной нормой и объемом фундаментальной области действия группы $\mathbf{Z}^n$ (или факторпространства $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$). Основным результатом §6.3 является следующая

Теорема (6.4.1)**.** *Если функционал n-мерного объема топологически полуэллиптичен, то верно следующее.*

Для любой периодической финслеровой метрики d на $\mathbf{R}^n$ верно неравенство

$$\operatorname{AsVol}(\mathbf{R}^n, d) \geq \operatorname{AsVol}(\mathbf{R}^n, d_{\|\cdot\|_{st}}) = \operatorname{vol}(B_{st}, d_{\|\cdot\|_{st}}),$$

где $\|\cdot\|_{st}$ — стабильная норма метрики d, B_{st} — единичный шар этой нормы.

Наконец, в §6.4 доказывается, что все вышеуказанные следствия полуэллиптичности на самом деле эквивалентны ей:

Теорема (6.4.1)**.** *Следующие свойства функционала n-мерного финслерова объема эквивалентны.*

1. Он топологически полуэллиптичен.

2. Любой n-мерный диск D в n-мерном нормированном пространстве является минимальным заполнением в классе всех финслеровых метрик на D.

3. Объем полунепрерывен снизу относительно равномерной сходимости метрик.

4. Для любой периодической финслеровой метрики d в $\mathbf{R}^n$ верно, что

$$\operatorname{AsVol}(\mathbf{R}^n, d) \geq \operatorname{AsVol}(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|_{st}),$$

где $\|\cdot\|_{st}$ — стабильная норма метрики d.

Глава 7. Двумерный объем по Холмсу–Томпсону

В этой главе доказывается гипотеза о минимальном заполнении для метрик на двумерном диске и выводятся некоторые следствия. Результаты опубликованы в [25].

Будем говорить, что гладкая строго выпуклая финслерова структура на многообразии M обладает *свойством минимальности геодезических*, если любая геодезическая, лежащая внутри M, является минимальной.

Теорема (7.1.2). *Пусть φ_0 — гладкая строго выпуклая финслерова структура на диске D^2, обладающая свойством единственности геодезических. Тогда (M, φ_0) является минимальным заполнением в классе всех финслеровых метрик на диске (относительно двумерного объема по Холмсу–Томпсону).*

Следствие (7.1.3). *Двумерный объем по Холмсу–Томпсону топологически полуэллиптичен.*

Отметим, что двумерный объем по Холмсу–Томпсону не полуэллиптичен над $\mathbf{R}$ уже в размерности 4. Соответствующий пример нормы в $\mathbf{R}^4$ (являющийся модификацией известного примера из [7]) описан в §7.5.

Следующее следствие теоремы 7.1.2 обощает классическое изосистолическое неравенство Пу на финслеровы метрики. Отметим, что даже в римановом случае доказательство теоремы 7.1.2 дает принципиально новое доказательство неравенства Пу, не опирающееся на теорему об униформизации.

Следствие (7.1.4). *Пусть φ — финслерова метрика на $\mathbf{RP}^2$, и пусть L — длина кратчайшей нестягиваемой петли в $(\mathbf{RP}^2, \varphi)$. Тогда*

$$\operatorname{vol}(\mathbf{RP}^2, \varphi) \geq \frac{2L^2}{\pi},$$

где vol *— двумерный объем по Холмсу–Томпсону.*

Теорема 7.1.2 содержательна и в римановом случае (и других доказательств, кроме применения финслеровой теоремы, для риманова случая не известно). В римановом случае также удается доказать единственность минимального заполнения, то есть усиленную гипотезу о минимальном заполнении для размерности 2:

Следствие (7.1.5). *Пусть g — простая по Мичелу риманова метрика на $D = D^2$ (то есть метрика со строго выпуклым краем и без сопряженных точек). Тогда g — единственное (с точностью до изометрии) минимальное заполнение своей границы в классе римановых метрик на D^2.*

Доказательство следствия опирается на теорему Пестова и Ульмана [16] о граничной жесткости простых метрик в размерности 2.

Теорема 7.1.2 вместе с общими результатами из главы 6 дает следующее

Следствие (7.1.7). *Пусть φ — периодическая гладкая строго выпуклая финслерова метрика на плоскости. Тогда* $\mathrm{AsVol}(\mathbf{R}^2, d_\varphi) \geq \mathrm{AsVol}(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|_{st})$, *где* $\|\cdot\|_{st}$ *— стабильная норма метрики* d_φ, AsVol *— асимптотический объем, соответствующий двумерному объему по Холмсу–Томпсону.*

Равенство в достигается тогда и только тогда, когда метрика φ не имеет сопряженных точек.

Глава 8. Объем по Лёвнеру

В этой главе доказываются специальные свойства объема по Лёвнеру и их приложения к вопросам полунепрерывности объема. Результаты опубликованы в статьях [21] и [33]. В §8.1 доказана

Теорема (8.1.1). *Пусть X — нормированное пространство, $Y \subset X$ — n-мерное линейное подпространство. Тогда существует такое непрерывное линейное отображение $P\colon X \to Y$, что*

1. P является проектором на Y, то есть $P|_Y = id_Y$.

2. Для любой n-мерной липшицевой поверхности $f : M \to X$ верно неравенство $\mathrm{area}(P \circ f) \leq \mathrm{area}(f)$, *где* area *— площадь, порождаемая функционалом n-мерного объема по Лёвнеру.*

Следствие (8.1.2). *Функционал n-мерного объема по Лёвнеру полуэллиптичен над $\mathbf{R}$ для любого n.*

В §8.2 исследуется вопрос о полунепрерывности объема. Из полуэллиптичности и результатов главы 6 следует, что объем по Лёвнеру (и, как следствие, обычный риманов объем) полунепрерывен снизу относительно равномерной сходимости метрик. Рассмотрим аналогичный вопрос для более слабой сходимости по Громову–Хаусдорфу. Вместо исходного определения предела по Громову–Хаусдорфу используется приводимая ниже эквивалентная переформулировка.

Определение. Пусть X и Y – метрические пространства, $f : X \to Y$ – отображение (не обязательно непрерывное) и $\varepsilon > 0$. Будем говорить, что f является *ε-изометрией*, если $f(X)$ образует ε-сеть в Y и $|d_Y(f(x), f(x')) - d_X(x, x')| < \varepsilon$ для любых $x, x' \in X$. Нижняя грань тех ε, для которых f является ε-изометрией, будем называть *погрешностью* отображения φ и обозначать через $\mathrm{err}(\varphi)$.

Последовательность $\{X_k\}$ метрических пространств сходится по Громову–Хаусдорфу к пространству X (обозначение: $X_k \xrightarrow[GH]{} X$) тогда и только тогда, когда существует последовательность отображений $f_k : X_k \to X$ с $\mathrm{err}(f_k) \to 0$. Такие последовательности будут называться *последовательностями почти изометрий.*

Если X является многообразием то почти изометрии можно сделать непрерывными. Равномерная сходимость метрик на одном пространстве — частный случай сходимости по Громову–Хаусдорфу.

Пусть M и M' — многообразия одинаковой размерности, $f : M' \to M$ — непрерывное отображение. Будем говорить, что f *имеет ненулевую степень*, если $f(\partial M') \subset \partial M$ и сужение f на $f^{-1}(M \setminus \partial M)$ является собственным как отображение в $M \setminus \partial M$ и имеет ненулевую топологическую степень над $\mathbf{Z}$ или $\mathbf{Z}_2$.

Теорема (8.2.3)**.** *Пусть (M, d), (M_k, d_k), $k = 1, 2, \dots,$ — n-мерные многообразия с липшицевыми метриками. Предположим, что существует последовательность непрерывных почти изометрий $f_k : (M_k, d_k) \to (M, d)$, которые, начиная с некоторого k, имеют ненулевую степень. Тогда*

$$\mathrm{vol}(M, d) \le \varliminf_{k\to\infty} \mathrm{vol}(M_k, d_k)$$

где vol *— n-мерный объем по Лёвнеру.*

В §8.3 получены достаточные условия полунепрерывности, формулируемые в терминах самих пространств, а не почти изометрий между ними. Для начала ограничимся случаем римановых метрик на фиксированном замкнутом многообразии M. В [21] приведены примеры, показывающие, что даже в этом случае полунепрерывность объема может нарушаться при $M = S^3$. Тем не менее, для многих топологических типов многообразий полунепрерывность гарантирована. Так, имеет место следующая

Теорема (8.3.6)**.** *Пусть M и M_k $(k = 1, 2, \dots)$ — гомотопически эквивалентные замкнутые n-мерные римановы многообразия, и пусть $M_k \xrightarrow[GH]{} M$ и M допускает отображение ненулевой степени на тор $T^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ или отображение нечетной степени на проективное пространство $\mathbf{RP}^n$. Тогда* $\mathrm{vol}(M) \le \varliminf \mathrm{vol}(M_k)$.

То же верно для любых положительных липшицевых внутренних метрик, если в качестве определения объема выбран объем по Лёвнеру.

Следствие (8.3.7). *Пусть M — замкнутое n-мерное многообразие, допускающее отображение ненулевой степени на тор $T^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ или отображение нечетной степени на проективное пространство $\mathbf{RP}^n$. Тогда n-мерный риманов объем полунепрерывен снизу относительно сходимости по Громову–Хаусдорфу на классе всех римановых метрик на M.*

В §8.4 рассматривается сходимость по Громову–Хаусдорфу в двумерном случае. Пусть M и M' – двумерные многообразия. Будем называть непрерывное отображение $\varphi : M' \to M$ *почти гомеоморфизмом*, если существует конечное множество точек $P \subset M \setminus \partial M$ такое, что φ гомеоморфно отображает $\varphi^{-1}(M \setminus P)$ на $M \setminus P$, и прообраз $\varphi^{-1}(p)$ каждой точки $p \in P$ представляет собой либо компоненту края многообразия M', либо двумерное подмногообразие, ограниченное простой замкнутой кривой.

Теорема (8.4.2)**.** *Пусть M и M_k ($k = 1, 2, \dots$) — компактные двумерные многообразия с внутренними метриками, такие, что $\sup_k g(M_k) < \infty$, и пусть $M_k \xrightarrow[GH]{} M$. Тогда существует последовательность почти изометрий $\varphi_k : M_k \to M$, которые, начиная с некоторого k, являются почти гомеоморфизмами.*

Следствие (8.4.3)**.** *Пусть M и M_k ($k = 1, 2, \dots$) — компактные двумерные многообразия с внутренними липшицевыми метриками, $M_k \xrightarrow[GH]{} M$ и $\sup_k |\chi(M_k)| < \infty$. Тогда $\mathrm{vol}(M) \le \underline{\lim}\, \mathrm{vol}(M_k)$, где vol — двумерный объем по Лёвнеру.*

Следствие (8.4.4)**.** *Для любого натурального N риманова площадь полунепрерывна снизу относительно сходимости по Громову–Хаусдорфу на классе всех компактных двумерных римановых многообразий, эйлеровы характеристики которых по модулю не превосходят N.*

Глава 9. Периодические римановы метрики

В этой главе рассматриваются асимптотические объемы периодических метрик и систолические неравенства для римановых многообразий. Результаты получены совместно с Д. Бураго (§9.3) и М. Кацем (§9.4) и опубликованы в статьях [20] и [28].

В §9.1 и §9.2 даются предварительные определения и доказываются вспомогательные технические факты. В §9.3 доказывается

Теорема (9.3.1)**.** *Пусть g — периодическая риманова метрика в $\mathbf{R}^n$, B_{st} — единичный шар ее стабильной нормы, E_{st} — его эллипсоид Джона. Тогда*

$$\mathrm{AsVol}(\mathbf{R}^n, g) \ge \frac{|B_{st}|}{|E_{st}|} \cdot \omega_n,$$

где знак модуля обозначает n-мерный евклидов объем, причем равенство достигается тогда и только тогда когда метрика g плоская.

Как следствие получается оптимальная оценка на асимптотический объем периодической метрики, высказанная в качестве гипотезы М. Громовым [10]:

Следствие (9.3.2)**.** *Для любой периодической римановой метрики g в $\mathbf{R}^n$ верно неравенство $\mathrm{AsVol}(\mathbf{R}^n, g) \ge \omega_n$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда метрика g плоская.*

В §9.4 доказываются обобщения изосистолического неравенства Лёвнера. Для компактного риманова многообразия M через $\mathrm{sys}\,\pi_1(M)$ будем обозначать его одномерную *гомотопическую систолу*, то есть длину кратчайшей нестягиваемой петли в M. Через $\mathrm{stsys}_1(M)$ обозначается одномерная *стабильная систола*, то есть длина кратчайшего одномерного вещественного цикла, представляющего ненулевой элемент целочисленной решетки $H_1(M; \mathbf{R})_\mathbf{Z}$ группы гомологий $H_1(M; \mathbf{R})$.

Пусть M — замкнутое риманово многообразие размерности n. Обозначим через k его первое число Бетти:

$$k = b_1(M) = \operatorname{rank} H_1(M; \mathbf{Z}) = \dim H_1(M; \mathbf{R}).$$

Обозначим

$$\mathcal{T} = H_1(M; \mathbf{R})/H_1(M; \mathbf{R})_{\mathbf{Z}} \simeq \mathbf{R}^k/\mathbf{Z}^k.$$

Пространство $\mathcal{T}$ является k-мерным тором, его фундаментальная группа $\pi_1(\mathcal{T})$ канонически отождествляется факторгруппой группы $H_1(M; \mathbf{R})_{\mathbf{Z}}$ по кручению. Таким образом, имеется естественный гомоморфизм $P : \pi_1(M) \to \pi_1(\mathcal{T}) = H_1(M; \mathbf{R})_{\mathbf{Z}}$. Поскольку тор асферичен, существует единственное с точностью до гомотопии гладкое отображение $\mathcal{A}_M : M \to \mathcal{T}$, индуцирующий вышеуказанный гомоморфизм P между фундаментальными группами. Будем называть $\mathcal{A}_M$ *отображением Абеля–Якоби* многообразия M. Обозначим через $\widetilde{\mathcal{A}}_M$ поднятие отображения $\mathcal{A}_M$ в накрывающие пространства универсальных свободных абелевых накрытий:

$$\widetilde{\mathcal{A}}_M : \widetilde{M} \to \widetilde{\mathcal{T}} = H_1(M; \mathbf{R}).$$

Обозначим через $[\widetilde{F}_M] \in H_{n-k}(\widetilde{M})$ гомологический класс прообраза $\widetilde{\mathcal{A}}_M^{-1}(y)$ регулярного значения y отображения $\widetilde{\mathcal{A}}_M$, где гомологии берутся над $\mathbf{Z}$ в случае ориентируемого $\widetilde{M}$ и над $\mathbf{Z}_2$ в противном случае. Определим *систолическую степень* $\operatorname{sysdeg}(\mathcal{A}_M)$ отображения $\mathcal{A}_M$ как инфимум $(n-k)$-мерных объемов всех циклов, представляющих класс $[\widetilde{F}_M]$.

Теорема (9.4.7)**.** *Пусть M — замкнутое риманово многообразие. Предположим, что $n \geq k \geq 1$, где $n = \dim M$, $k = b_1(M)$. Тогда выполняется следующее оптимальное неравенство*

$$\operatorname{sysdeg}(\mathcal{A}_M) \operatorname{stsys}_1(M, g)^k \leq \gamma_k^{k/2} \operatorname{vol}_n(M, g),$$

где γ_k — константа Эрмита.

В частности, для случая $b_1(M) = \dim M - 1$, получаем

Следствие (9.4.9)**.** *Пусть M — замкнутое многообразие, $k = b_1(M)$, $\dim M = k + 1$. Предположим, что $[\widetilde{F}_M] \neq 0$, где $[\widetilde{F}_M]$ — гомологический класс типичного слоя отображения Абеля–Якоби. Тогда для любой метрики g на M выполняется следующее неравенство*

$$\operatorname{stsys}_1(M, g)^k \operatorname{sys} \pi_1(M, g) \leq \gamma_k^{k/2} \operatorname{vol}_{k+1}(M, g).$$

В качестве примера случая равенства в следствии 9.4.9 достаточно взять риманово расслоение на окружности постоянной длины над плоским k-мерным тором, соответствующим критической решетке (слои должны быть достаточно короткими геодезическими, реализующими значение $\operatorname{sys} \pi_1(M, g)$). Такое строение имеет, например, факторпространство группы Гейзенберга с левоинвариантной метрикой по ее целочисленной решетке.

Глава 10. Почти плоские метрики.

Эта глава содержит приложения к вопросам о минимальности и граничной жесткости для римановых метрик, близких к евклидовым. Результаты получены совместно с Д. Бураго и опубликованы в [5].

Напомним, что компактное риманово многообразие (M, g) с краем называется *гранично жестким*, если любое компактное риманово многообразие (M', g') с тем же краем $\partial M' = \partial M$ и такой же функцией расстояния на $\partial M \times \partial M$ изометрично (M, g) изометрией, тождественной на краю.

Теорема (10.1.2). *Пусть $M \subset \mathbf{R}^n$ — компактная область с гладкой границей, g_E — стандартная евклидова метрика в этой области. Тогда существует такая окрестность U метрики g_E в C^2 топологии, что для любой метрики $g \in U$ пространство (M, g) является единственным минимальным заполнением своего края в классе всех ориентируемых многообразий с кусочно римановыми метриками.*

То есть если $g \in U$ и (M', g') — ориентированное многообразие с кусочно римановой метрикой, заполняющее $(\partial M, d_g)$, то $\mathrm{vol}(M', g') \geq \mathrm{vol}(M, g)$, причем в случае равенства (M', g') изометрично (M, g) изометрией, тождественной на краю.

Из теоремы 10.1.2 следует

Теорема (10.1.3). *Пусть $M \subset \mathbf{R}^n$ — компактная область с гладкой границей, g_E — стандартная евклидова метрика в этой области. Тогда существует такая окрестность U метрики g_E в C^2 топологии, что для любой метрики $g \in U$ пространство (M, g) является гранично жестким.*

Список литературы

[1] Д. Ю. Бураго, Ю. Д. Бураго, С. В. Иванов, *Курс метрической геометрии*, Институт компьютерных исследований, Москва-Ижевск, 2004.

[2] F. J. Almgren Jr., *Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problems among surfaces of varying topological type and singularity structure*, Ann. of Math. (2) **87** (1968), 321–391.

[3] R. V. Benson, *Euclidean geometry and convexity*, McGraw–Hill, New York, 1966.

[4] G. Besson, G. Courtois and S. Gallot, *Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative*, Geom. Funct. Anal., **5** (1995), 731–799.

[5] D. Burago, S. Ivanov, *Boundary rigidity and filling volume minimality of metrics close to a flat one*, принято в Ann. Math. (2), `http://annals.math.princeton.edu/issues/2008/FinalFiles/BuragoIvanovFinal.pdf`

[6] H. Busemann, *Convexity on Grassmann manifolds*, Enseignement Math. **7** (1961), 139–152.

[7] H. Busemann, G. Ewald, G. C. Shephard. *Convex bodies and convexity on Grassmann cones. I–IV*, Math. Ann. **151** (1963), 1–41.

[8] G. De Cecco, G. Palmieri, *LIP manifolds: from metric to Finslerian structure*, Math. Z. **218** (1995), 223–237.

[9] C. Croke, B. Kleiner, *A rigidity theorem for simply connected manifolds without conjugate points*, Ergodic Theory Dynam. Systems **18** (1998), no. 4, 807–812.

[10] M. Gromov, *Filling Riemannian manifolds*, J. Diff. Geom. **18** (1983), 1–147.

[11] H. Federer, *Real flat chains, cochains and variational problems*, Indiana Univ. Math. J., **24** (1974/75), 351–407.

[12] M. Gromov, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Progr. in Mathematics **152**, Birkhäuser, Boston, 1999.

[13] G. Herglotz, *Über die Elastizitaet der Erde bei Beruecksichtigung ihrer variablen Dichte*, Zeitschr. für Math. Phys. **52** (1905), 275–299.

[14] M. G. Katz, *Systolic geometry and topology*, Mathematical Surveys and Monographs **137**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.

[15] R. Michel, *Sur la rigidité imposeée par la longuer des géodésiques*, Invent. Math. **65** (1981), 71–83.

[16] L. Pestov, G. Uhlmann, *Two-dimensional compact simple Riemannian manifolds are boundary distance rigid*, Ann. of Math. (2) **161** (2005), 1093–1110.

[17] E. Wiechert, K. Zoeppritz, *Über Erdbebenwellen*, Nachr. Koenigl. Geselschaft Wiss. Göttingen **4** (1907), 415–549.

Основные работы автора по теме диссертации

[18] Д. Ю. Бураго, С. В. Иванов, *Изометрические вложения финслеровых многообразий*, Алгебра и анализ **5** (1993), no. 1, 179–192.

[19] D. Burago, S. Ivanov, *Riemannian tori without conjugate points are flat*, Geom. Funct. Anal. **4** (1994), no.3, 259–269.

[20] D. Burago, S. Ivanov, *On asymptotic volume of tori*, Geom. Funct. Anal. **5** (1995), no. 5, 800–808.

[21] С. В. Иванов, *Сходимость по Громову-Хаусдорфу и объемы многообразий*, Алгебра и Анализ **9** (1997), no. 5, 65–83.

[22] D. Burago, S. Ivanov, B. Kleiner. *On the structure of the stable norm of periodic metrics*, Math. Research Letters, **4** (1997), no. 6, 791–808.

[23] С. В. Иванов, *О сходящихся метриках ограниченной сверху кривизны на 2-полиэдрах*, Алгебра и Анализ **10** (1998), no. 4, 130–141.

[24] D. Burago, S. Ivanov, *On asymptotic isoperimetric constant of tori*, Geom. Funct. Anal. **8** (1998), no. 5, 783–787.

[25] С. В. Иванов, *О двумерных минимальных заполнениях*, Алгебра и Анализ **13** (2001), no. 1, 26–38.

[26] С. В. Иванов, *Стягиваемое геодезически полное пространство кривизны* ≤ 1 *со сколь угодно малым диаметром*, Алгебра и Анализ **13** (2001), no. 4, 110–118

[27] D. Burago, S. Ivanov, *On asymptotic volume of Finsler tori, minimal surfaces in normed spaces, and symplectic filling volume.* Ann. of Math. (2) **156** (2002), no. 3, 891–914.

[28] S. V. Ivanov, M. G. Katz, *Generalized degree and optimal Loewner-type inequalities*, Israel J. Math. **141** (2004), 221–234.

[29] D. Burago, S. Ivanov, *Gaussian images of surfaces and ellipticity of surface area functionals*, Geom. Funct. Anal. **14** (2004), no. 3, 469–490.

[30] V. Bangert, C. Croke, S. Ivanov, M. Katz, *Filling area conjecture and ovalless real hyperelliptic surfaces*, Geom. Func. Anal. **15** (2005), no. 3, 577–597.

[31] D. Burago, S. Ivanov, D. Shoenthal, *Two counterexamples in low-dimensional length geometry*, Алгебра и анализ, 19 (2007), no. 1, 46–59.

[32] V. Bangert, C. Croke, S. Ivanov, M. Katz, *Boundary case of equality in Loewner-type inequalities*, Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007), no. 1, 1–17.

[33] С. В. Иванов, *Объемы и площади липшицевых метрик*, Алгебра и Анализ **20** (2008), no. 3, 74–111.