Санкт-Петербургское Отделение
Математического Института им. В.А.Стеклова
Российской Академии Наук

*На правах рукописи*

ИВАНОВ Сергей Владимирович

# ГЕОМЕТРИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ МЕТРИК И ОБЪЕМЫ ПРЕДЕЛЬНЫХ ФИНСЛЕРОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

(01.01.04 – геометрия и топология)

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических
наук, профессор Ю.Д.Бураго

Санкт-Петербург – 1995

## Содержание

## Введение

Основным предметом исследования в этой работе являются римановы метрики, периодические относительно действия конечно порожденной абелевой группы. Простейшим (и, возможно, наиболее важным) примером периодической метрики является поднятие какой-нибудь римановой метрики, заданной на $n$-мерном торе $T^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$, в его универсальное накрывающее пространство. Такое поднятие представляет собой риманову метрику в $\mathbf{R}^n$, инвариантную относительно параллельных переносов на целочисленные вектора, т. е. на элементы решетки $\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{R}^n$. Приводимое ниже определение является естественным обобщением этого примера.

Пусть $\Gamma$ — конечно порожденная абелева группа (которую следует считать бесконечной, иначе все рассматриваемые вопросы оказываются бессодержательными). *Пространством с* $\Gamma$*-периодической метрикой* называется метрическое пространство $(M, \rho)$, на котором задано свободное (т. е. без неподвижных точек), дискретное и ко-компактное действие группы $\Gamma$ изометриями. Условие дискретности действия группы состоит в том, что орбита каждой точки является дискретным множеством, а условие ко-компактности — в том, что факторпространство $M/\Gamma$ компактно. В совокупности топологические условия, наложенные на действие группы $\Gamma$, эквивалентны тому, что отображение факторизации $\pi\colon M \to M/\Gamma$ является накрытием с компактной базой. При этом группа $\Gamma$ действует на $M$ как группа автоморфизмов этого накрытия.

Всюду в дальнейшем $M$ предполагается гладким многообразием, а метрика $\rho$ — римановой, хотя некоторые из описываемых конструкций применимы и к более общим метрическим пространствам. По аналогии с $\mathbf{Z}^n$-периодическими метриками в $\mathbf{R}^n$, изометрии пространства $M$, определяемые действием $\Gamma$, будут называться *параллельными переносами*. Образ точки $x \in M$ под действием элемента $k \in \Gamma$ будет обозначаться через $x + k$, орбита точки $x \in M$, т. е. множество $\{x + k : k \in \Gamma\}$ — через $x + \Gamma$.

Поскольку отображение факторизации $\pi$ является накрытием, факторпространство $\overline{M} := M/\Gamma$ оказывается гладким многообразием вместе с $M$. Изометричность действия $\Gamma$ на $M$ означает, что на $\overline{M}$ имеется риманова метрика $\bar{\rho}$, такая, что $\pi\colon (M, \rho) \to (\overline{M}, \bar{\rho})$ является локальной изометрией (римановым накрытием). И обратно, поднятие в $M$ любой римановой метрики, заданной на $\overline{M}$, определяет $\Gamma$-

периодическую метрику на $M$.

Пространства с периодическими метриками, в качестве специальных накрытий исходно заданного компактного риманова многообразия $\overline{M}$, естественным образом появляются при исследовании некоторых свойств геодезических, см., например, [10], [11], [38]. При этом оказывается, что поведение геодезических на многообразии $\overline{M}$ связано с асимптотическими характеристиками метрики накрывающего пространства $M$, незаметными при рассмотрении самого $\overline{M}$. В настоящей работе, в отличие от упомянутых, центральным объектом является само пространство $(M,\rho)$, но некоторые конструкции и результаты можно формулировать и в терминах факторпространства $(\overline{M},\bar{\rho})$.

Геометрия периодических метрик рассматривается с точки зрения "большого масштаба". Это означает, что различия в пределах одной фундаментальной области действия группы (и вообще, в пределах любого ограниченного расстояния) считаются несущественными. В круг рассматриваемых вопросов входят свойства расстояний между "далекими" точками, поведение геодезических "на бесконечности", оценки площадей и объемов "больших" множеств.

Задачи об асимптотических свойствах периодических римановых метрик оказываются связанными с задачами о последовательностях римановых многообразий, сходящихся к финслеровым многообразиям. (Эта связь обсуждается в §7.) Более того, такие последовательности можно в некотором смысле считать обобщением пространств с периодической метрикой. Под сходимостью многообразий понимается сходимость по Громову–Хаусдорфу. Если считать универсальные накрывающие торов "модельным примером" периодических метрик, то для сходимости по Громову–Хаусдорфу таким примером является равномерная сходимость метрик, заданных на одном и том же многообразии (т. е. равномерная сходимость расстояний между точками). Поскольку при этом не предполагается никакой сходимости метрического тензора или ограничений на кривизну, получение в пределе финслерова (а не риманова) многообразия не является невозможной или патологической ситуацией. Скорее наоборот, при такой сходимости финслеровость предела является ограничительным требованием. Последовательностям римановых метрик, сходящимся к финслеровым, посвящены последние два параграфа работы.

Среди результатов работы в первую очередь следует упомянуть доказательство в §4 известной гипотезы Э. Хопфа: всякая риманова метрика без сопряженных точек на торе $T^n$ является плоской.

Далее, в §5 доказывается оценка асимптотического объема: при определенных топологических требованиях к пространству с периодической метрикой (которые выполняются для универсальных накрывающих торов), объем любого достаточно большого шара в нем не меньше, чем объем шара того же радиуса в евклидовом пространстве соответствующей размерности. При этом асимптотическое равенство этих объемов (при радиусах, стремящихся к бесконечности) имеет место тогда и только тогда, когда пространство изометрично евклидову.

Для сходимости римановых многообразий к финслеровым в §7 доказывается, при естественных топологических ограничениях (которые всегда выполняются в случае равномерной сходимости), что объем предельного пространства не превосходит нижнего предела объемов сходящихся пространств, причем в случае равенства предельная метрика является римановой.

Эти результаты, весьма далекие друг от друга по формулировкам, тем не менее, доказываются сходными методами. Главным техническим средством является аппроксимация метрики некоторым конечномерным нормированным пространством (см. §1). Важную роль играет также решение одной экстремальной задачи из геометрии выпуклых тел (§3), позволяющее затем осуществлять сравнение с евклидовым пространством. Помимо этого, доказательства опираются лишь на базовые факты динамики и геометрической теории меры. Аппарат дифференциальной геометрии практически не используется, что дает надежду на применение этих методов и к неримановым метрикам.

Далее описывается структура диссертации и приводятся формулировки результатов, а также основные обозначения.

Работа состоит из восьми параграфов (не считая введения), и некоторые параграфы разбиты на части, обозначаемые буквами. Первые три параграфа содержат предварительные сведения и технические результаты, необходимые для дальнейшего. Остальные параграфы посвящены каждый отдельной задаче, причем формально они почти независимы друг от друга (за исключением §7, который опирается на §5).

Рассмотрим риманово многообразие $(M,\rho)$ с $\Gamma$-периодической метрикой. Пусть $\overline{M} = M/\Gamma$, $\pi\colon M \to \overline{M}$ — отображение факторизации, $\bar\rho$ — метрика на $\overline{M}$, соответствующая метрике $\rho$, т. е. такая, что $\pi\colon (M,\rho) \to (\overline{M},\bar\rho)$ является локальной изометрией (римановым накрытием).

Пусть $n = \operatorname{rank}\Gamma$ (ранг группы $\Gamma$). Тогда $\Gamma$ представляется в виде прямой суммы $\mathbf{Z}^n \oplus T(\Gamma)$, где $T(\Gamma)$ обозначает периодическую часть ("кручение") группы $\Gamma$. Роль кручения в рассматриваемых вопросах незначительна, более того, всякую $\Gamma$-периодическую метрику можно представить и как $\mathbf{Z}^n$-периодическую, если ограничиться только действием подгруппы $\mathbf{Z}^n \subset \Gamma$. (При такой замене группы кокомпактность действия сохраняется, так как $T(\Gamma)$ — конечная подгруппа $\Gamma$).

Вместе с $\Gamma$-периодической метрикой рассматривается конечномерное векторное пространство $V = \Gamma \otimes \mathbf{R} \simeq \mathbf{R}^n$ (при рассмотрении универсального накрывающего тора $T^n$ можно отождествить $V$ с самим накрывающим пространством $M \simeq \mathbf{R}^n$). Каждому элементу $k \in \Gamma$ соответствует вектор $k \otimes 1 \in V$, который для удобства тоже обозначается через $k$. Такие вектора образуют решетку в $V$, аналогичную целочисленной решетке в $\mathbf{R}^n$. Эта решетка, а значит, и группа $\Gamma$, канонически действует на $V$ параллельными переносами.

Одним из важнейших асимптотических инвариантов периодической метрики является ее предельная норма $\|\cdot\|$, заданная на $V$ (см. §1.Б). Единичный шар предельной нормы обозначается через $D$, а единичная сфера — через $F$.

Введенные обозначения используются всюду, где рассматриваются периодические метрики.

В §1 обсуждается предельная норма и сравнение $(M, \rho)$ с нормированным пространством $(V, \|\cdot\|)$ с помощью аппроксимационной теоремы Д. Ю. Бураго об их равномерной близости. В частности, на пространстве $M$ вводятся специальные липшицевы функции (называемые функциями типа Буземана), соответствующие линейным функционалам на $V$. Для дальнейших формулировок понадобится следующее почти очевидное утверждение из §1:

**Предложение 1.1.** *Существуют непрерывные отображения $\varphi\colon M \to V$, коммутирующие с действием группы, т. е. такие, что $\varphi(x+k) = \varphi(x) + k$ для любых $x \in M$ и $k \in G$.*

Такие $\varphi\colon M \to V$ называются в работе *выпрямляющими отображениями.* (Название не является частью естественной терминологии, а лишь отражает характер использования этих отображений в настоящей работе. Удобно представлять такое отображение как проектирование $M$ на "параллельное" линейное пространство $V$. Такое представление даже имеет формальную реализацию, которая используется в §5.)

В §2, после обзора необходимых сведений о геодезическом потоке, рассматривается функция предельного направления геодезических $R$. Эта функция со значениями в $V$ определена почти всюду на $UTM$ — расслоении единичных касательных векторов $M$, и ее значение на векторе $v$ характеризует направление и скорость "ухода на бесконечность" геодезической, начальный вектор скорости которой равен $v$. Эта функция инвариантна относительно действия $\Gamma$, и поэтому ей соответствует функция $\overline{R}$, определенная почти всюду на $UT\overline{M}$, значения которой обычно называют "векторами вращения" геодезических. Кроме определений, в параграфе приводятся лишь элементарные геометрические свойства предельных направлений минимальных (кратчайших) геодезических. Предельные направления и вектора вращения геодезических представляют собой важный предмет изучения в геометрии и динамике, но в настоящей работе они служат лишь техническим средством.

Следующий §3 посвящен исключительно геометрии (произвольного) нормированного пространства $(V, \|\cdot\|)$, точнее, геометрии его единичного шара $D$. В нем строится специальное выражение для квадратичной формы, определяемой вписанным эллипсоидом тела $D$, т. е. эллипсоидом максимального объема среди содержащихся в $D$ (максимальность эллипсоида не очень важна для дальнейшего, главным является вид выражения и то, что эллипсоид содержится в $D$). Это выражение используется затем в §§4,5,7 для сравнения метрик, аппроксимируемых нормой $\|\cdot\|$, с евклидовыми пространствами.

В §4 доказывается

**Теорема 4.1.** *Всякая риманова метрика без сопряженных точек на $n$-мерном торе является плоской.*

По определению, риманова метрика на многообразии $M$ не имеет сопряженных точек, если для любой точки $x \in M$ экспоненциальное отображение $\exp_x \colon T_xM \to M$ является всюду невырожденным (т. е. локальным диффеоморфизмом). Риманова метрика называется плоской, если она локально изометрична евклидовой метрике $\mathbf{R}^n$. Плоские метрики могут также быть описаны как метрики постоянной нулевой кривизны.

Утверждение теоремы 4.1 известно как гипотеза Хопфа и было доказано самим Э. Хопфом (E. Hopf, [32]) для случая $n = 2$. Впоследствии для $n = 2$ было найдено несколько принципиально различных доказательств, см. [22], [23], [34]. В старших размерностях гипотеза доказывалась при различных дополнительных предположениях относительно метрики: при неотрицательности интегральной скалярной кривизны (L. Green, [27]), для конформно плоских метрик (C. Croke, A. Fathi, [22] и A. Knauf, [34]), при условии липшицевости слабого орисферического расслоения (C. Croke, B. Kleiner [23]), или при наличии достаточно богатой группы изометрий (W. Vannini, [40]). Известно также аналогичное утверждение при условии отсутствия фокальных точек (A. Avez, [9]).

Из теоремы 4.1 для тора очевидно следует аналогичное утверждение для любого многообразия, накрываемого этим тором. Более того, из результатов работы [24] следует, что, при условии истинности теоремы 4.1, всякая риманова метрика без сопряженнных точек на любом многообразии с нильпотентной фундаментальной группой является плоской. Это верно и для многообразия с разрешимой фундаментальной группой, если риманова метрика является аналитической.

Доказательство теоремы 4.1 проводится не для самого тора, а для его универсального накрывающего, которое представляет собой пространство $\mathbf{R}^n$ с $\mathbf{Z}^n$-периодической метрикой. Из односвязности и отсутствия сопряженных точек следует, что всякая геодезическая в таком пространстве является кратчайшей. Именно это условие, а не исходное дифференциальное определение отсутствия сопряженных точек, используется при доказательстве. Само доказательство основано на оценках интегральных характеристик функции предельного направления геодезических и сравнении их с аналогичными характеристиками для евклидова пространства с помощью результатов §3.

В §5 изучаются асимптотические объемы периодических метрик. Асимптотический объем $\Gamma$-периодической метрики $\rho$ на $M$ определяется формулой

$$\Omega(M,\rho) = \lim_{r\to\infty} \frac{\mathrm{Vol}(\mathrm{Ball}_x(r))}{r^n},$$

где $\mathrm{Ball}_x(r)$ обозначает шар радиуса $r$ с центром в точке $x$, Vol — риманов объем метрики $\rho$, $n = \operatorname{rank}\Gamma$ (предел в формуле всегда существует и является конечным и положительным). Представляет интерес получение универсальных (не зависящих от метрики $\rho$) нижних оценок для $\Omega(M,\rho)$, особенно в случае, когда $(M,\rho)$ — универсальное накрывающее $n$-мерного риманова тора.

Существование таких оценок для определенных топологических типов многообразий $M$ было доказано М. Громовым в [29]. Там же некоторые оценки (довольно грубые) были получены в явном виде. Эти оценки для универсальных накрывающих торов были затем улучшены И. К. Бабенко [2]. Кроме того, И. К. Бабенко [4] были получены точные оценки для скорости роста объемов шаров в универсальном накрывающем любого двумерного многообразия, которые, в частности, включают нахождение точной нижней грани возможных асимптотических объемов в случае двумерного тора (минимальное значение достигается для плоских метрик). Недавно G. Besson, G. Courtois и S. Gallot (см. [13], [14]) доказали подобные неравенства для экспоненциального показателя роста объемов (объемной энтропии) и соответствующие утверждения о жесткости для универсальных накрытий компактных многообразий, на которых существуют локально симметрические метрики строго отрицательной кривизны.

Формулируемая ниже теорема 5.2 решает, в частности, вопрос о точной нижней грани возможных асимптотических объемов универсального накрывающего тора любой размерности (как и следовало ожидать, она достигается для метрики евклидова пространства).

Полная формулировка включает некоторые топологические условия на многообразие $M$ с действием группы $\Gamma$ (без топологических ограничений универсальных оценок не существует, так как для некоторых многообразий асимптотический объем может быть сколь угодно близок к нулю). Во первых, рассматривается только случай, когда размерность $M$ равна рангу $\Gamma$, то есть $n$. Далее, пусть $\varphi\colon M \to V$ — произвольное выпрямляющее отображение. В силу коммутирования с действием группы оно является поднятием в накрывающие пространства некоторого непрерывного отображения $\bar{\varphi}\colon \overline{M} \to V/\Gamma \cong T^n$ (причем гомотопический тип $\bar{\varphi}$ не зависит от произвола в выборе $\varphi$, см. §1.A). Гомологическая степень этого отображения (целое число в ориентируемом случае, или вычет по модулю 2 — в неориентируемом) является топологическим инвариантом действия $\Gamma$ на $M$ и будет обозначаться через $\deg_\Gamma(M)$.

**Теорема 5.2.** *Пусть* $\dim M = \operatorname{rank}\Gamma = n$, $\deg_\Gamma(M) \neq 0$. *Тогда для любой* $\Gamma$*-периодической римановой метрики* $\rho$ *на* $M$ *выполняется неравенство*

$$\Omega(M, \rho) \geqslant \omega_n\,,$$

*где* $\omega_n$ *— объем стандартного единичного шара в* $\mathbf{R}^n$.

*Равенство достигается тогда и только тогда, когда $(M,\rho)$ изометрично евклидову пространству $\mathbf{R}^n$.*

Если $(M,\rho)$ — универсальное накрывающее $n$-мерного тора, то после его отождествления с $\mathbf{R}^n = V$ в качестве $\varphi$ (а значит, и в качестве $\bar\varphi$) можно взять тождественное отображение. Следовательно, в этом случае $\deg_\Gamma(M) = 1$, и условия теоремы выполнены, так что она действительно дает точную нижнюю оценку асимптотического объема для универсальных накрывающих торов.

В §6 рассматривается аналогичный вопрос об асимптотических изопериметрических константах. Для пространства $(M,\rho)$ асимптотическая изопериметрическая константа $\sigma(M,\rho)$ определяется как верхний предел

$$\sigma(M,\rho) = \limsup_{\mathrm{Vol}(\Omega)\to\infty} \sigma(M,\rho,\Omega)\,,$$

где

$$\sigma(M,\rho,\Omega) = \frac{\mathrm{Vol}(\Omega)^{1/n}}{\mathrm{Sq}(\partial\Omega)^{1/(n-1)}}$$

для каждой ограниченной области $\Omega \subset M$. Здесь Vol обозначает $n$-мерный, а Sq — $(n-1)$-мерный объем в $(M,\rho)$.

Оказывается, что, в отличие от асимптотического объема, асимптотическая изопериметрическая константа универсального накрывающего $n$-мерного тора, где $n \geqslant 3$, может быть сколь угодно малой (теорема 6.3). Тем не менее, в двумерном случае и, более общо, в классе конформно плоских метрик для универсального накрывающего тора имеет место аналог теоремы 5.2: $\sigma(M,\rho) \geqslant \sigma(\mathbf{R}^n)$, причем равенство достигается только для плоских метрик (теорема 6.2).

В §7 рассматривается сходимость по Громову–Хаусдорфу римановых метрик к финслеровой. Там же приводятся все необходимые определения и обсуждается связь между этой сходимостью и геометрией периодических метрик. В этом параграфе не накладывается никаких ограничений гладкости, все финслеровы и римановы структуры считаются просто непрерывными.

Отображение (не обязательно непрерывное) $f\colon X \to Y$ между метрическими пространствами называется хаусдорфовой аппроксимацией погрешности $\varepsilon$, где $\varepsilon$ — положительное число, если выполняются два условия:

1) $f(X)$ образует $\varepsilon$-сеть в $Y$,

2) $|\rho(f(x_1), f(x_2)) - \rho(x_1, x_2)| \leqslant \varepsilon$ для любых $x_1, x_2 \in X$,
где $\rho$ обозначает расстояние как в $X$, так и в $Y$. Последовательность метрических пространств $X_k$ сходится по Громову–Хаусдорфу к метрическому пространству $X$ тогда и только тогда, когда существует последовательность хаусдорфовых аппроксимаций $\varphi_k\colon M_k \to M$ с погрешностями $\varepsilon_k \to 0$. Более того, если $X$ является гладким компактным многообразием, то аппроксимации $\varphi_k$ всегда можно считать непрерывными.

Под объемом финслерова многообразия понимается его мера Хаусдорфа соответствующей размерности. На самом деле следующая теорема верна при любом определении финслерова объема, лишь бы он монотонно зависел от метрики и совпадал с римановым объемом для римановых многообразий. В ней все многообразия предполагаются компактными и, возможно, имеющими край.

**Теорема 7.2.** *Пусть $(M_k, \rho_k)$ — последовательность римановых многообразий одинаковой размерности $n$, сходящаяся по Громову–Хаусдорфу к финслерову многообразию $(M, \rho)$ той же размерности, причем существует последовательность хаусдорфовых аппроксимаций $\varphi_k\colon M_k \to M$ ненулевой степени. Тогда*

$$\mathrm{Vol}(M, \rho) \leqslant \liminf_{k\to\infty} \mathrm{Vol}(M_k, \rho_k)\,,$$

*причем в случае равенства метрика $\rho$ является римановой.*

Под степенью отображения $\varphi_k$ здесь тоже подразумевается гомологическая степень. Это понятие для многообразий с краем включает в себя требование, чтобы край многообразия $M_k$ отображался в край $M$. Однако в данном случае условие на степени не становится слишком жестким при наличии края, так как хаусдорфовы аппроксимации допускают малые шевеления.

Первую часть теоремы 7.2 можно рассматривать как обобщение первой части теоремы 5.2, требование ненулевых степеней аппроксимаций соответствует топологическому условию из теоремы 5.2. Как и в теореме 5.2, отказаться от него нельзя.

Применение теоремы 7.2 к равномерной сходимости метрик дает немедленное

**Следствие 7.3.** *Пусть $\rho_k$ — последовательность римановых метрик на одном и том же многообразии $M$, и $\rho_k$ равномерно сходятся* *к финслеровой метрике $\rho$ как функции на $M \times M$. Тогда*

$$\mathrm{Vol}(M,\rho) \leqslant \liminf_{k\to\infty} \mathrm{Vol}(M,\rho_k)\,,$$

*причем в случае равенства метрика $\rho$ является римановой.*

В §8 рассматривается возможность замены в теореме 7.2 условия на степени аппроксимаций другими топологическими требованиями, а именно, ограничениями топологических типов многообразий $M_k$. В двумерном случае ответ положительный: заключение теоремы 7.2 выполняется при сходимости двумерных многообразий всегда, когда их род и число компонент края ограничены сверху. Это следует из общего описания возможного топологического строения хаусдорфовых аппроксимаций (теорема 8.3) при сходимости двумерных многообразий ограниченного рода.

В старших размерностях, наоборот, строятся неожиданные примеры сходимости по Громову–Хаусдорфу римановых метрик на сфере к любой наперед заданной римановой метрике на сфере или на диске, с объемами, стремящимися к нулю (теорема 8.5). Хаусдорфовы аппроксимации при этом (автоматически) имеют нулевые степени и, более того, топологически эквивалентны стандартному проектированию сферы на диск.

Основные результаты настоящей работы получены совместно с Д. Ю. Бураго. Они опубликованы в статьях [17] и [18].

## §1. Дистанционные функции

Пусть $(M,\rho)$ — пространство с $\Gamma$-периодической метрикой, $(\overline{M},\bar\rho)$ — факторпространство, $\pi\colon M\to\overline{M}$ — отображение факторизации. В этом параграфе рассматриваются различные структуры, связанные с $(M,\rho)$, и вводятся специальные функции типа Буземана, которые будут активно использоваться в дальнейшем.

### A. Пространство $V$ и выпрямляющие отображения.

Рассмотрим векторное пространство $V=\Gamma\otimes\mathbf{R}$. Его размерность равна $n=\operatorname{rank}\Gamma$. Имеется каноническое отображение $\Gamma\to V$, действующее по правилу $k\mapsto k\otimes 1$. Оно, вообще говоря, не является вложением (его ядро — это кручение $T(\Gamma)$) но в большинстве случаев этот факт можно игнорировать и рассматривать элементы группы $\Gamma$ как точки пространства $V$, образующие в нем “целочисленную” решетку. Далее всюду будет использоваться следующее сокращение: для элемента $k \in \Gamma$ соответствующий вектор $k \otimes 1 \in V$ тоже будет обозначаться через $k$. Определено действие $\Gamma$ на $V$ (которое редуцируется до действия $\Gamma/T(\Gamma)$) параллельными переносами $\{v \mapsto v+k : k \in \Gamma \hookrightarrow V\}$. При фиксировании изоморфизма группы $\Gamma/T(\Gamma)$ с $\mathbf{Z}^n$ пространство $V$ отождествляется с $\mathbf{R}^n$, в котором выделена стандартная целочисленная решетка.

В пространстве $M$ имеются аналогичные решетки — орбиты действия группы $\Gamma$ вида $x_0+\Gamma = \{x_0+k : k \in \Gamma\}$, где $x_0 \in M$. Каждая такая решетка является полным прообразом некоторой точки пространства $\overline{M}$ и находится на расстоянии, не большем $\operatorname{diam} \overline{M}$, от любой точки пространства $M$. При изучении асимптотических свойств функций, определенных на $M$ (например, функции расстояния $\rho$), часто можно ограничиваться значениями функции только на одной орбите действия $\Gamma$. Типичным приемом является сравнение этих значений со значениями какой-нибудь функции, определенной на пространстве $V$. Следующее простое предложение позволяет получать удобные формулировки такого рода утверждений.

**Предложение 1.1.** *Существуют непрерывные отображения $\varphi\colon M \to V$, коммутирующие с действием группы, т. е. удовлетворяющие равенству*

$$\varphi(x+k) = \varphi(x) + k$$

*для любых $x \in M$ и $k \in \Gamma$.*

*Доказательство.* Построим непрерывную функцию $f$ на множестве неотрицательных чисел, которая положительна на интервале $[0, 2 \operatorname{diam} \overline{M})$ и равна нулю вне его, зафиксируем $x_0 \in M$ и определим для каждого $x \in M$ точку $\varphi(x) \in V$ формулой

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sum\limits_{k \in \Gamma} f_k(x)} \sum_{k \in \Gamma} f_k(x) \cdot k\,,$$

где $f_k(x) = f(\rho(x, x_0 + k))$. Обе суммы содержат лишь конечное число ненулевых слагаемых, а стоящая в знаменателе не обращается в ноль, поскольку в любом шаре пространства $M$ радиуса $2 \operatorname{diam} \overline{M}$ содержится по крайней мере одна точка орбиты $x_0+\Gamma$, но не может быть бесконечного множества таких точек. Поэтому полученная функция

$\varphi$ определена и непрерывна. Свойство коммутирования очевидно из формулы. $\square$

Непрерывные отображения $\varphi\colon M \to V$, коммутирующие с действием группы как в предложении 1.1, будут называться *выпрямляющими отображениями.* Отметим, что определение "выпрямляющего отображения" зависит лишь от топологии $M$ и действия группы, но не от метрики $\rho$. Разность любых двух таких отображений инвариантна относительно действия $\Gamma$ ($\Gamma$-периодична), а значит, ограничена. Это позволяет сравнивать функции, определенные на $M$, с функциями на $V$: функция $f_M\colon M \to \mathbf{R}$ близка к функции $f_V\colon V \to \mathbf{R}$, если $f_M$ отличается от $f_V \circ \varphi$ не более чем на константу для какого-нибудь (а значит, и для любого) выпрямляющего отображения $\varphi$.

В силу коммутирования с действием группы, выпрямляющее отображение $\varphi\colon M \to V$ является поднятием в накрывающие пространства некоторого отображения

$$\bar{\varphi}\colon \overline{M} \to V/\Gamma \simeq \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n\,.$$

Гомотопический тип $\bar{\varphi}$ определен однозначно. Действительно, если два отображения $M \to V$ коммутируют с действием $\Gamma$, то промежуточные отображения прямолинейной гомотопии между ними тоже коммутируют с действием $\Gamma$, следовательно, эта гомотопия проектируется в гомотопию между соответствующими отображениями $\overline{M} \to V/\Gamma$.

Обратно, пусть $\bar{\varphi}_0\colon \overline{M} \to V/\Gamma$ соответствует выпрямляющему отображению $\varphi_0$, и рассмотрим какое-нибудь отображение $\bar{\varphi}_1\colon \overline{M} \to V/\Gamma$, гомотопное $\bar{\varphi}_0$. Гомотопия $\{\bar{\varphi}_t\}, 0 \leqslant t \leqslant 1$, между $\bar{\varphi}_0$ и $\bar{\varphi}_1$ может быть поднята до гомотопии $\{\varphi_t : M \to V\}$. По непрерывности все отображения $\{\varphi_t\}$ коммутируют с действием $\Gamma$. Таким образом, любое отображение, гомотопное $\bar{\varphi}_0$, поднимается до выпрямляющего отображения $M \to V$. В частности, если $M$ (а значит, и $\overline{M}$) является гладким многообразием, то существуют *гладкие* выпрямляющие отображения $M \to V$, так как всякое непрерывное отображение $\overline{M} \to V/\Gamma$ может быть сглажено некоторой гомотопией.

*Замечания.* 1) Группа $\Gamma$, которая представляет собой группу автоморфизмов накрытия $\pi\colon M \to \overline{M}$, канонически изоморфна фактор-группе $\pi_1(\overline{M})/\pi_1(M)$, где $\pi_1(M)$ вкладывается в $\pi_1(\overline{M})$ гомоморфизмом, индуцированным накрытием $\pi\colon M \to \overline{M}$. При этом изоморфизме элемент $k \in \Gamma$ соответствует классу петель в $\overline{M}$, поднятия которых в $M$ соединяют точку $x \in M$ с точкой $x + k \in M$. Факторизация $V \to V/\Gamma$ аналогичным образом определяет изоморфизм между решеткой $\Gamma/T(\Gamma)$ и $\pi_1(V/\Gamma)$. Отображение $\bar{\varphi}\colon \overline{M} \to V/\Gamma$, соответствующее выпрямляющему отображению $\varphi\colon M \to \overline{M}$, индуцирует определенный гомоморфизм фундаментальных групп, а именно, композицию двух отображений факторизации

$$\pi_1(\overline{M}) \to \pi_1(\overline{M})/\pi_1(M) \simeq \Gamma \to \Gamma/T(\Gamma) \simeq \pi_1(V/\Gamma)\,.$$

В силу асферичности $n$-мерного тора $V/\Gamma$, задание гомоморфизма фундаментальных групп тоже однозначно определяет гомотопический тип $\bar{\varphi}$.

2) В случае, когда $M$ — универсальное накрывающее $n$-мерного тора, можно отождествить его с евклидовым пространством $\mathbf{R}^n$, на котором стандартным образом действует группа $\mathbf{Z}^n$. После такого отождествления в качестве $\varphi$ можно взять тождественное отображение $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n = V$, что значительно упрощает формулировки.

### Б. Предельная норма $\|\cdot\|$ на $V$.

Выберем точку $x_0 \in M$. Для каждого $k \in \Gamma$ определим величину $\|k\|$ формулой

$$\|k\| = \lim_{n\to\infty} \frac{\rho(x_0, x_0 + nk)}{n}$$

(предел существует в силу субаддитивности $\rho(x_0, x_0 + nk)$ как функции натурального числа $n$). Легко видеть, что $\|k\|$ не зависит от выбора $x_0$, и $\|k_1\| = \|k_2\|$ при $k_1 - k_2 \in T(\Gamma)$. Легко проверить (см. [28]), что функция $\|\cdot\|$ является нормой на группе $\Gamma/T(\Gamma)$, или, что то же самое, сужением на $\Gamma/T(\Gamma) \hookrightarrow V$ нормы $\|\cdot\|$, заданной на пространстве $V$. Эта норма на $V$ называется *предельной нормой* данной периодической метрики, а также асимптотической нормой (asymptotic norm), или стабильной нормой (stable norm).

Одним из главных технических средств, используемых в настоящей работе, является следующая аппроксимационная теорема Д. Ю. Бураго [15]:

**Теорема 1.2.** *Для всякого выпрямляющего отображения $\varphi\colon M \to V$ существует константа $C$, такая, что*

$$\big|\rho(x,y) - \|\varphi(x) - \varphi(y)\|\big| \leqslant C$$

*для любых* $x, y \in M$.

Эта теорема формулировалась в [15] только для $M \cong \mathbf{R}^n$, $\Gamma = \mathbf{Z}^n$, но доказательство подходит и для общего случая. Для $\mathbf{Z}^n$-периодических метрик в $\mathbf{R}^n$, в соответствии с последним замечанием предыдущего раздела, неравенство из теоремы 1.2 можно записать следующим образом:

$$\big|\rho(x, y) - \|x - y\|\big| \leqslant C$$

для любых $x, y \in \mathbf{R}^n$.

Константа $C$ в теореме 1.2 зависит от выпрямляющего отображения $\varphi$ и может оказаться сколь угодно большой при достаточно неудачном выборе $\varphi$. Подстановка $y = x + k$, где $k \in \Gamma$, в теорему 1.2 дает инвариантную формулировку, которая, как легко видеть, равносильна исходной:

**Теорема 1.2'.** *Существуют константа* $C = C(\Gamma, M, \rho)$*, такая, что*

$$\big|\rho(x, x + k) - \|k\|\big| \leqslant C$$

*для любых* $x \in M$ *и* $k \in \Gamma$.

Теоремы 1.2 и 1.2' верны для гораздо более широкого класса метрик, чем римановы, а именно, для всех внутренних периодических метрик. Метод, примененный в [15], позволяет оценить константу $C$ из теоремы 1.2' через диаметр фундаментальной области действия группы (или через диаметр $\overline{M}$) и характеристики $\Gamma$ (ранг и мощность кручения).

Предельная норма является довольно грубым инвариантом метрики $\rho$, поскольку определяется лишь расстояниями между далекими точками. Она может игнорировать сколь угодно большие изменения метрики в определенных областях. Пусть, например, в некоторой небольшой окрестности $U \subset M$ метрика такова (столь велика по сравнению с окружающими областями), что все кратчайшие с концами вне некоторой окрестности $U' \supset U$ не пересекают $U$. Тогда произвольное увеличение метрики в пределах $U$ (повторяемое во всех областях, получаемых из $U$ действием $\Gamma$) изменяет лишь константу $C$ в теореме 1.2', но не норму $\|\cdot\|$, поскольку расстояния между точками некоторой орбиты $x + \Gamma$, не пересекающей $U'$, сохраняются. Однако, по крайней мере в размерности 2, по виду предельной нормы можно установить наличие подобных областей, запретных для минимальных геодезических — см. [11].

*Замечания.* Предельная норма сама по себе является интересным объектом для изучения. Так, весьма содержателен вопрос о том, какие нормы могут являться предельными нормами $\mathbf{Z}^n$-периодической римановой метрики в $\mathbf{R}^n$. Известно (см. [16]), что такие нормы всюду плотны в пространстве всех норм на $\mathbf{R}^n$. Для размерности $n = 2$ известны ограничения на предельную норму, состоящие в ее строгой выпуклости (отсутствии прямолинейных отрезков на ее единичной сфере) и дифференцируемости в иррациональных направлениях (т. е. во всех точках $\mathbf{R}^2$ с иррациональным отношением координат), см. [11], [36]. Кроме того, В. Бангертом (V. Bangert, [11]) было доказано для двумерного случая следующее сильное утверждение: если предельная норма дифференцируема всюду (кроме нуля), то исходная метрика является плоской, в частности, предельная норма является евклидовой.

В старших размерностях утверждение о строгой выпуклости предельной нормы неверно, например, существуют периодические метрики в $\mathbf{R}^3$, для которых единичный шар предельной нормы представляет собой многогранник (см. [31], [10]). Неизвестно, возможно ли обобщение на старшие размерности упомянутых результатов о дифференцируемости. В целом, вопрос о возможном строении предельной нормы остается широко открытым.

**B. Функции типа Буземана.**

Рассмотрим какой-нибудь линейный функционал $L\colon V \to \mathbf{R}$ с $\|L\| = 1$, где $\|L\| := \sup\{L(x) : \|x\| \leqslant 1\}$. Зафиксируем точку $x_0 \in M$ и определим на $M$ числовую функцию $B_L$ формулой

$$B_L(x) = \limsup_{\|k\|\to\infty}\{L(k) - \rho(x, x_0 + k) : k \in \Gamma\} \tag{1-1}$$

(в выражении $L(k)$ элемент $k \in \Gamma$ отождествляется с соответствующим вектором целочисленной решетки пространства $V$, см. §1.A).

**Предложение 1.3.** 1) *Все значения $B_L$ конечны.*

2) $|B_L(x) - B_L(y)| \leqslant \rho(x, y)$ *для любых $x, y \in M$. Другими словами, функция $B_L\colon M \to \mathbf{R}$ липшицева с константой Липшица, равной 1.*

3) $B_L(x + k) = B_L(x) + L(k)$ *для любых $x \in M$ и $k \in \Gamma$.*

*Доказательство.* 1) С одной стороны, для любого $k \in \Gamma$ из условия $\|L\| = 1$ и теоремы 1.2' имеем

$$L(k) \leqslant \|k\| \leqslant \rho(x_0, x_0 + k) + C\,.$$

Поэтому для любой точки $x \in M$ выполняется неравенство

$$L(k) - \rho(x, x_0 + k) \leqslant \rho(x, x_0) + C\,,$$

значит,

$$B_L(x) \leqslant \rho(x_0, x) + C < +\infty\,.$$

С другой стороны, существует точка $p \in V$ с $L(p) = \|p\| = 1$ и уходящая на бесконечность последовательность точек $k_i \in \Gamma$, лежащая в $V$ на ограниченном расстоянии от луча $\{\lambda p : p \geqslant 0\}$. Для членов этой последовательности имеем, обозначая через const любую константу, не зависящую от $k_i$,

$$L(k_i) \geqslant \|k_i\| - \mathrm{const} \geqslant \rho(x_0, x_0 + k_i) - \mathrm{const}$$

(второе неравенство использует теорему 1.2'), откуда

$$B_L(x) \geqslant \limsup(L(k_i) - \rho(x, x_0 + k_i)) \geqslant -\rho(x, x_0) - \mathrm{const} > -\infty\,.$$

2) При фиксированном $k \in \Gamma$ функция $L(k) - \rho(x, x_0 + k)$ является липшицевой с константой 1 (по $x$). При переходе к верхнему пределу это свойство сохраняется.

3) Непосредственно следует из определения $B_L(x)$ и линейности $L$:

$$\begin{aligned} B_L(x+k) &= \limsup_{\|k'\|\to\infty}\{L(k') - \rho(x+k, x_0 + k')\} = \\ &= \limsup_{\|k'\|\to\infty}\{L(k') - \rho(x, x_0 + k' - k)\} = \\ &= \limsup_{\|k'\|\to\infty}\{L(k'-k) - \rho(x, x_0 + k' - k)\} + L(k) = \\ &= B_L(x) + L(k)\,. \end{aligned}$$

Во всех верхних пределах подразумевается $k' \in \Gamma$. Второе равенство следует из периодичности метрики $\rho$. $\square$

Всякая функция $B_L$, обладающая свойствами 1–3 из предложения 1.3, будет называться *функцией типа Буземана*, соответствующей данному функционалу $L$. Название обусловлено тем, что, подобно тому, как функции Буземана из [19] определяется расстояниями до точек, уходящих на бесконечность вдоль геодезического луча, функция $B_L$ в формуле (1-1) определяется расстояниями до "гиперплоскостей" вида $\{x_0 + k : L(k) = \mathrm{const}\}$. Вообще говоря, функция типа Буземана не обязательно должна задаваться формулой (1-1), например, прибавление произвольной константы к функции типа Буземана дает снова функцию типа Буземана. Предложение 1.3 далее будет использоваться исключительно как утверждение о существовании таких функций.

Функции типа Буземана близки к линейным функционалам в том же смысле, в каком метрика $\rho$ близка к своей предельной норме:

**Предложение 1.4.** *Пусть $B_L$ — функция типа Буземана, соответствующая линейному функционалу $L\colon V \to \mathbf{R}$. Тогда для любого выпрямляющего отображения $\varphi\colon M \to V$ существует константа $C$, такая, что*

$$|B_L(x) - L(\varphi(x))| \leqslant C$$

*для любых $x, y \in M$.*

*Доказательство.* Левая часть доказываемого неравенства является периодической (инвариантной относительно действия $\Gamma$) функцией точки $x$. Действительно, для любого $k \in \Gamma$ имеем $B_L(x + k) = B_L(x) + L(k)$ по определению функции типа Буземана, и

$$L(\varphi(x + k)) = L(\varphi(x) + k) = L(\varphi(x)) + L(k)$$

по определению выпрямляющего отображения и линейности $L$. В силу периодичности и непрерывности, функция $|B_L - L \circ \varphi|$ ограничена сверху. □

Липшицевы функции с константой Липшица, равной 1, будут далее для краткости называться 1-липшицевыми. Если $(M, \rho)$ — риманово многообразие, то из 1-липшицевости функции $B_L$ следует (см. [7]), что она дифференцируема почти всюду на $M$, и при этом $|\operatorname{grad} B_L| \leqslant 1$ во всех точках дифференцируемости (здесь grad обозначает градиент функции относительно римановой метрики). Кроме того, определенное почти всюду на $M$ измеримое векторное поле $\operatorname{grad} B_L$ является $\Gamma$-периодическим, поскольку каждый параллельный перенос изменяет функцию $B_L$ на константу (свойство 3 из предложения 1.3). Поэтому поле $\operatorname{grad} B_L$ является поднятием некоторого (определенного почти всюду и измеримого) векторного поля с $\overline{M}$.

*Замечания.* Формула (1.1) для функций типа Буземана аналогична выражениям для "барьерных функций" лагранжевой системы с периодическими коэффициентами, введенных Дж. Мазером (J. Mather) в [38].

Свойства, близкие к предложению 1.3(3), были доказаны В. Бангертом (V. Bangert, [11]) для обычных функций Буземана геодезических прямых в универсальном накрывающем двумерного тора. К сожалению, эти результаты не переносятся на старшие размерности.

## §2. Предельные направления геодезических

В этом параграфе вводятся технические средства, связанные с динамикой геодезического потока. Все геодезические считаются натурально параметризованными. Геодезическая называется минимальной, если длина любого ее интервала равна расстоянию между его концами. Через $UTM$ обозначается расслоение единичных касательных векторов риманова многообразия $M$, $UTM = \{v \in TM : |v| = 1\}$. Слой $UTM$ над точкой $x \in M$ обозначается через $UT_xM$. Аналогичные обозначения используются и для $\overline{M}$.

**A. Обозначения и предварительные сведения.**

Геодезический поток риманова многообразия $\overline{M}$ — это семейство отображений $\mathrm{Exp}_t\colon UT\overline{M} \to UT\overline{M}$, определяемых формулой

$$\mathrm{Exp}_t(v) = \mathrm{Exp}(t, v) = g'(t)\,,$$

где $\gamma\colon \mathbf{R} \to \overline{M}$ — геодезическая с начальным вектором скорости $\gamma'(0) = v$, т. е. $\gamma(t) = \exp(tv)$. Отображение Exp является гладким (класса $C^{r-1}$ для римановой структуры класса $C^r$, что было отмечено еще Каратеодори [21]). Название "поток" обусловлено выполнением тождества $\mathrm{Exp}_{t+s} = \mathrm{Exp}_t \circ \mathrm{Exp}_s$ для любых $t, s \in \mathbf{R}$. Подстановка в него $s = -t$ показывает, что $\mathrm{Exp}_t$ — диффеоморфизм и $\mathrm{Exp}_t^{-1} = \mathrm{Exp}_{-t}$.

Каждый вектор $v \in UT\overline{M}$ порождает траекторию геодезического потока — кривую $t \mapsto \mathrm{Exp}(t, v)$ в $UT\overline{M}$. Проекция этой траектории на $M$ представляет собой геодезическую $\gamma$ с $\gamma'(0) = v$. Если $f$ — числовая или векторнозначная функция, то ее среднее значение по траектории (точнее, по полутраектории) определяется равенством

$$\mathrm{Ave}\, f(v) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\mathrm{Exp}(v, t))\, dt\,.$$

Если значение $\operatorname{Ave} f(v)$ определено, то $\operatorname{Ave} f$ определено и постоянно на всей траектории, порождаемой $v$.

Вероятностная мера $\mu$, заданная на $UT\overline{M}$, называется инвариантной (относительно геодезического потока), если для каждого $t \in \mathbf{R}$ преобразование $\operatorname{Exp}_t$ сохраняет $\mu$, т. е. $\mu(\operatorname{Exp}_t(A)) = \mu(A)$ для любого измеримого множества $A \subset UT\overline{M}$. Для таких мер имеет место эргодическая теорема Биркгофа (см. [8]): для любой суммируемой (числовой или векторнозначной) функции $f$ на $UT\overline{M}$ ее усреднение вдоль траекторий $\operatorname{Ave} f$ определено почти всюду (по мере $\mu$) на $UT\overline{M}$, и при этом

$$\int_{UT\overline{M}} \operatorname{Ave} f \, d\mu = \int_{UT\overline{M}} f \, d\mu \, .$$

Введем на $\overline{M}$ вероятностную меру vol — нормированный риманов объем (т. е. эта мера пропорциональна риманову объему и $\operatorname{vol}(\overline{M}) = 1$). Для каждой точки $x \in M$ введем на единичной сфере $UT_x\overline{M}$ вероятностную меру $\mu_x$, соответствующую нормированному объему на стандартной евклидовой сфере. Мера Лиувилля $\mu$ на $UTM$ определяется равенством

$$\mu(A) = \int_{\overline{M}} \mu_x(A \cap UT_x\overline{M}) \, d\operatorname{vol}(x) \, ,$$

где $A \subset UT\overline{M}$ — любое измеримое множество. Из формулы для $\mu$ следует, что для любой измеримой функции $f$ на $UT\overline{M}$

$$\int_{UT\overline{M}} f \, d\mu = \int_{\overline{M}} d\operatorname{vol}(x) \int_{UT_x\overline{M}} f|_{UT_x\overline{M}} \, d\mu_x$$

(правая и левая часть определены или не определены одновременно). Согласно теореме Лиувилля (см. [1]), мера $\mu$ инвариантна относительно геодезического потока, в частности, допускает применение эргодической теоремы.

Поскольку в любых локальных координатах мера Лиувилля имеет непрерывную функцию плотности по мере Лебега, слова “почти всюду” относительно $\mu$ имеют обычный смысл: с точностью до меры ноль в любой карте.

### Б. Функция предельного направления $R$.

Пусть $\varphi\colon M \to V$ — выпрямляющее отображение (см. §1), $\gamma\colon \mathbf{R} \to M$ — геодезическая. Определим вектор $R(\gamma) \in V$ (*предельное направление* $\gamma$) формулой

$$R(\gamma) = \lim_{T\to\infty} \frac{\varphi(\gamma(T)) - \varphi(\gamma(0))}{T} \, .$$

Если этот предел существует, то он не зависит от выбора $\varphi$, поскольку любые два выпрямляющих отображения отличаются на ограниченную функцию. Значение $R(\gamma)$, очевидно, не изменяется при сдвиге параметра $\gamma$ и при параллельных переносах. Будем рассматривать $R$ и как функцию на $UTM$ (точнее, на подмножестве $UTM$), полагая ее значение на векторе $v \in UTM$ равным $R(\gamma)$, где $\gamma$ — геодезическая с $\gamma'(0) = v$.

Для геодезической $\bar{\gamma}\colon \mathbf{R} \to \overline{M}$ и, соответственно, для вектора $\bar{v} = \bar{\gamma}'(0)$ рассмотрим вектор $\overline{R}(\bar{\gamma}) = \overline{R}(\bar{v})$, определяемый как предельное направление любого поднятия $\bar{\gamma}$ в $M$ (определение корректно, так как любые два поднятия совмещаются параллельным переносом). Вектор $\overline{R}(\bar{\gamma}) \in V$ называется *вектором вращения* геодезической $\bar{\gamma}$, ср. с определением в [10].

**Предложение 2.1.** *Функция $\overline{R}$ определена почти всюду на $UT\overline{M}$, а функция $R$ — почти всюду на $UTM$.*

*Доказательство.* Пусть $\varphi\colon M \to V$ — гладкое выпрямляющее отображение. Отображение $d\varphi\colon TM \to V$ является $\Gamma$-периодическим, поэтому оно является поднятием некоторой функции (дифференциальной формы) $\omega\colon T\overline{M} \to V$. Если $\bar{\gamma}$ — геодезическая в $\overline{M}$, а $\gamma$ — ее поднятие в $M$, то

$$\varphi(\gamma(T)) - \varphi(\gamma(0)) = \int_0^T d\varphi(\gamma') = \int_0^T \omega(\bar{\gamma}')\,.$$

Таким образом, $\overline{R}(\bar{\gamma})$ равно среднему значению $\omega$ вдоль соответствующей траектории геодезического потока, т. е. для $\bar{v} = \bar{\gamma}'(0)$ имеем $\overline{R}(\bar{v}) = \overline{R}(\bar{\gamma}) = \operatorname{Ave}\omega(\bar{v})$. Согласно эргодической теореме, последнее выражение определено для почти всех $\bar{v} \in UT\overline{M}$.

Соответственно, функция $R$ определена почти всюду на $UTM$, так как она является поднятием $\overline{R}$. $\square$

Следующие два утверждения связывают значения функции $R$ с предельной нормой $\|\cdot\|$ и функциями типа Буземана.

**Предложение 2.2.** *Пусть $\gamma\colon \mathbf{R} \to M$ — геодезическая и $R(\gamma) \in V$ определено. Тогда $\|R(\gamma)\| \leqslant 1$. Если при этом $\gamma$ — минимальная геодезическая, то $\|R(\gamma)\| = 1$.*

*Доказательство.* По определению $R$ и теореме 1.2 имеем

$$\|R(\gamma)\| = \lim \left\| \frac{\varphi((\gamma(T)) - \varphi(\gamma(0))}{T} \right\| = \lim \frac{\rho(\gamma(T), \gamma(0))}{T} \leqslant 1\,,$$

Последнее неравенство следует из того, что $\rho(\gamma(T), \gamma(0)) \leqslant T$ для всех $T$. Если $\gamma$ — минимальная геодезическая, то оно обращается в равенство, так как $\rho(\gamma(T), \gamma(0)) = T$ для всех $T$. $\square$

**Предложение 2.3.** *Пусть $L\colon V \to \mathbf{R}$ — линейный функционал с $\|L\| = 1$, $B_L$ — соответствующая ему функция типа Буземана. Тогда для любой геодезической $\gamma\colon \mathbf{R} \to M$ имеет место равенство*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \langle \gamma', \operatorname{grad} B_L \rangle = L(R(\gamma)) \,,$$

*при условии, что обе его части определены.*

*Доказательство.* В силу липшицевости функции $B_L \circ \gamma$, к ней применима формула Ньютона–Лейбница (см. [7]), откуда

$$\int_0^T \langle \gamma', \operatorname{grad} B_L \rangle = \int_0^T (B_L \circ \gamma)' = B_L(\gamma(T)) - B_L(\gamma(0))$$

для любого $T > 0$. Если $\varphi\colon M \to V$ — выпрямляющее отображение, то, согласно предложению 1.4, правая часть полученного тождества отличается от $L(\varphi(\gamma(T))) - L(\varphi(\gamma(0)))$ не более чем на константу, которая исчезает после деления на $T$ при $T \to \infty$. С другой стороны,

$$\frac{L(\varphi(\gamma(T))) - L(\varphi(\gamma(0)))}{T} = L\left(\frac{\varphi(\gamma(T)) - \varphi(\gamma(0))}{T}\right) \xrightarrow[T\to\infty]{} L(R(\gamma))$$

по определению $R(\gamma)$. $\square$

*Замечания.* При рассмотрении предельных направлений минимальных геодезических эргодические соображения не всегда хорошо работают, поскольку множество минимальных геодезических в периодической метрике может оказаться весьма редким. В этом случае случае можно, отказавшись от требования существования предела в выражении для предельного направления, рассмотреть множество всевозможных его частичных пределов. Такие предельные множества подробно рассматривались В. Бангертом (V. Bangert) в [10], где, в частности, доказано, что для любой минимальной геодезической такое множество содержится в пересечении выпуклого тела $D$ (единичного шара предельной нормы) с одной из его опорных гиперплоскостей (ср. с предложением 2.2).

Представляет интерес вопрос о существовании минимальных геодезических данного предельного направления. Существуют примеры Хедлунда (G. Hedlund, [31]) периодических метрик, для которых возможных направлений минимальных геодезических лишь конечное число. В [10] доказывается существование минимальных геодезических для любого направления, представляющего собой экспонированную точку $D$ (т. е. точку, являющуюся единственной точкой пересечения $D$ с некоторой опорной гиперплоскостью). Техника минимальных мер, введенная Дж. Мазером (J. Mather, [37]), позволяет несколько усилить это утверждение, заменив в нем экспонированные точки на экстремальные (т. е. точки, не являющиеся внутренними точками прямолинейных отрезков, лежащих на поверхности $F = \partial D$).

## §3. Представление вписанного эллипсоида

Пусть $V$ — $n$-мерное векторное пространство с заданной на нем нормой $\|\cdot\|$ (не обязательно предельной нормой периодической метрики), $D$ — его единичный шар (т. е. $D = \{x \in V : \|x\| \leqslant 1\}$), $F = \partial D$ — единичная сфера. Множество $D \subset V$ представляет собой выпуклое тело, симметричное относительно нуля. Будем называть линейный функционал $L\colon V \to \mathbf{R}$ *опорным* к $D$ в точке $p \in F$, если $\|L\| := \sup L|_D = 1$ и при этом $L(p) = 1$ (ср. с §1.B). Геометрически это означает, что гиперплоскость $L^{-1}(1)$ проходит через точку $p$, но не задевает внутренность $D$. Обозначим через $F^*$ множество всех функционалов, опорных к $D$ (т. е. единичную сферу двойственного пространства $(V, \|\cdot\|)^*$).

Для каждой положительно определенной формы $Q$, заданной на $V$, будем обозначать через $\mathrm{Ball}_Q$ ее единичный шар, т. е. эллипсоид вида $\{x : Q(x) \leqslant 1\}$. Этот эллипсоид однозначно определяет форму $Q$. В этом параграфе строится специальное выражение для квадратичной формы, соответствующей эллипсоиду максимального объема среди содержащихся в $D$. Условие $\mathrm{Ball}_Q \subset D$ эквивалентно тому, что $Q(x) \geqslant \|x\|^2$ для всех $x \in V$.

**Теорема 3.1.** *Существует квадратичная форма $Q$ на $V$, представимая в виде конечной суммы*

$$Q = \sum a_i L_i^2 , \quad \text{где } L_i \in F^*,\ a_i > 0 \text{ и } \sum a_i = n , \tag{3-1}$$

*и такая, что*

1) *для всех $x \in V$ выполнено неравенство $Q(x) \geqslant \|x\|^2$, в частности, $Q$ положительно определена;*

2) *если* $Q = \sum a_i L_i^2$ *— разложение вида* (3-1)*, то для каждого функционала* $L_i$ *существует точка* $p_i \in F$*, такая, что*

$$L_i(p_i) = Q(p_i) = \|p_i\| = 1\,.$$

*Замечания.* 1) Второе утверждение теоремы можно переформулировать следующим образом: эллипсоид $\mathrm{Ball}_Q$, поверхность $F$ и гиперплоскость $L_i^{-1}(1)$ соприкасаются в точке $p_i$.

2) Множество квадратичных форм вида (3-1) представляет собой выпуклую оболочку множества $A_F := \{nL^2 : L \in F\}$ в пространстве всех квадратичных форм на $V$. Размерность этого пространства равна $n(n+1)/2$, поэтому по теореме Каратеодори у формы $Q$ есть разложение вида (3-1), в котором не более $n(n+1)/2+1$ слагаемых.

3) В приводимом ниже доказательстве в качестве $Q$ берется форма с минимальным объемом единичного шара среди всех форм вида (3-1). Технически удобнее рассматривать не сам объем единичного шара, а его обратный квадрат, который пропорционален определителю матрицы квадратичной формы.

*Доказательство теоремы 3.1.* Зафиксируем в пространстве $V$ какой-нибудь базис и определим на пространстве всех квадратичных форм, заданных на $V$, функционал $H$ по формуле $H(Q) = \det[Q]$, где $[Q]$ обозначает матрицу формы $Q$ в выбранном базисе. В любом другом базисе функционал $H$ пропорционален определителю матрицы с некоторым положительным коэффициентом (равным квадрату определителя матрицы перехода).

Обозначим множество всех квадратичных форм вида (3-1) через $\bar{A}_F$. Оно компактно как выпуклая оболочка компакта $A_F = \{nL^2 : L \in F^*\}$. Поскольку функция $H$ непрерывна, она достигает максимума на $\bar{A}_F$ в некоторой точке $Q$. Проверим, что эта $Q$ и есть искомая квадратичная форма. Среди форм вида (3-1) имеются положительно определенные, а для них значения функционала $H$ положительны. Следовательно, $H(Q) = \sup H(\bar{A}_F) > 0$. Поэтому форма $Q$ — невырожденная, а значит, положительно определенная.

Для линейного функционала $L\colon V \to \mathbf{R}$ и числа $\varepsilon \in \mathbf{R}$ обозначим через $Q_\varepsilon^L$ квадратичную форму $(1-\varepsilon)Q + \varepsilon n L^2$. Заметим, что $Q_\varepsilon^L \in \bar{A}_F$ при $0 < \varepsilon < 1$ для любого функционала $L$, опорного к $D$. Если $L$ при этом входит в какое-нибудь разложение вида (3-1) в качестве $L_i$, то $Q_\varepsilon^L \in \bar{A}_F$ и при отрицательных $\varepsilon$, не превосходящих по модулю соответствующего коэффициента $a_i$.

**Лемма.** *Для любого линейного функционала* $L\colon V \to \mathbf{R}$ *имеет место равенство*

$$\frac{d}{d\varepsilon} H(Q_\varepsilon^L)\big|_{\varepsilon=0} = nH(Q)(\|L\|_Q^2 - 1)\,,$$

*где* $\|L\|_Q = \sup\{L(x) : Q(x) \leqslant 1\}$.

*Доказательство.* Форма $Q$ задает некоторую евклидову структуру на $V$. Построим ортонормированный в этой структуре базис, в котором $L$ пропорционален первой координатной функции (с коэффициентом, равным $\|L\|_Q$). В этом базисе форма $Q_\varepsilon^L$ выражается диагональной матрицей

$$\operatorname{diag}\left(1 - \varepsilon + \varepsilon n\|L\|_Q^2, 1-\varepsilon, \ldots, 1-\varepsilon\right)\,.$$

Функционал $H$ отличается от определителя матрицы в рассматриваемом базисе умножением на константу, равную $H(Q)$. Таким образом,

$$H(Q_\varepsilon^L) = (1-\varepsilon)^{n-1}\left(1 + \varepsilon(n\|L\|_Q^2 - 1)\right)H(Q)\,.$$

Дифференцируя, получаем,

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varepsilon} H(Q_\varepsilon^L)\big|_{\varepsilon=0} &= -(n-1)H(Q) + (n\|L\|_Q^2 - 1)H(Q)\\ &= nH(Q)(\|L\|_Q^2 - 1)\,. \quad \square\end{aligned}$$

Поскольку $Q$ — точка максимума функционала $H$ на $\bar{A}_F$, для любого $L$, опорного к $D$, вычисленная в лемме производная неположительна, откуда $\|L\|_Q \leqslant 1$. Таким образом, всякий линейный функционал, опорный к $D$, не превосходит единицы на $\mathrm{Ball}_Q$. Отсюда следует, что $\mathrm{Ball}_Q \subset D$, или, что то же самое, $Q \geqslant \|\cdot\|^2$ всюду на $V$, что составляет первое утверждение теоремы.

Для $L$, равного $L_i$ из разложения (3-1), производная из леммы равна нулю, откуда $\|L_i\|_Q = 1$. Значит, имеется точка $p_i \in V$, для которой $L(p_i) = Q(p_i) = 1$. Из первого утверждения теоремы имеем цепочку неравенств $Q(p_i) \geqslant \|p_i\|^2 \geqslant L_i(p_i)^2$. Поскольку крайние члены цепочки равны 1, эти неравенства обращаются в равенства, что и доказывает второе утверждение теоремы. $\square$

**Предложение 3.2.** *Если* $\|\cdot\|$ *— евклидова норма, то квадратичная форма* $Q$ *из теоремы 3.1 совпадает с* $\|\cdot\|^2$*.*

*Доказательство.* Обозначим скалярное произведение, определяющее $\|\cdot\|$, через $\langle\,,\rangle$, а билинейную форму, соответствующую $Q$, — через $\langle\,,\rangle_Q$. Функционалы $L_i$ из теоремы 3.1 являются опорными и для $D$, и для $\mathrm{Ball}_Q$ в точках $p_i$. Следовательно, $L_i = \langle p_i, \cdot\rangle = \langle p_i, \cdot\rangle_Q$. Значит, $\langle p_i, p_j\rangle_Q = \langle p_i, p_j\rangle$ для любых $i$ и $j$. Отсюда следует, что $\langle\,,\rangle_Q = \langle\,,\rangle$, так как из точек $p_i$ можно выбрать $n$ линейно независимых (иначе форма $Q$ была бы вырожденной). Поэтому $Q = \|\cdot\|^2$. $\square$

**Следствие 3.3.** *Пусть* $\|\cdot\|$ *— евклидова норма,* $Q$ *— любая квадратичная форма вида* $\sum a_i L_i^2$*, где* $\|L_i\| \leqslant 1$*,* $a_i > 0$*,* $\sum a_i = n$*. Тогда* $\mathrm{Vol}(\mathrm{Ball}_Q) \geqslant \mathrm{Vol}(D)$*, причем равенство достигается только в случае* $Q = \|\cdot\|^2$*. Здесь* Vol *обозначает меру Лебега на* $V$ (*нормированную произвольным образом*).

*Доказательство.* Можно считать, что форма $Q$ имеет вид (3-1), т. е. что $\|L_i\| = 1$ при всех $i$ (в противном случае можно увеличить $Q$, отнормировав все $L_i$). На множестве положительно определенных квадратичных форм функционал $H$ из доказательства теоремы 3.1 обратно пропорционален квадрату объема единичного шара. Таким образом, в этом доказательстве устанавливалось, что форма с минимальным объемом единичного шара среди всех форм вида (3-1) удовлетворяет требованиям теоремы 3.1. С учетом предложения 3.2 это означает, что $\|\cdot\|^2$ является единственной формой вида (3-1), на которой достигается минимум объема единичного шара, что и требовалось доказать. $\square$

**Следствие 3.4.** *Для произвольной нормы* $\|\cdot\|$ *форма* $Q$ *вида* (3-1)*, удовлетворяющая неравенству* $Q \geqslant \|\cdot\|^2$*, единственна, и ее единичный шар совпадает с единственным эллипсоидом максимального объема среди содержащихся в* $D$*.*

*Доказательство.* Рассмотрим другую квадратичную форму $Q'$, удовлетворяющую неравенству $Q' \geqslant \|\cdot\|^2$ (или, что то же самое, $\mathrm{Ball}_{Q'} \subset D$). Для функционалов $L_i$ из разложения $Q$ вида (3-1) имеем $\|L_i\|_{Q'} \leqslant \|L_i\| = 1$. Применим следствие 3.3, взяв в нем в качестве $\|\cdot\|$ евклидову норму, определяемую формой $Q'$. Получаем неравенство $\mathrm{Vol}(\mathrm{Ball}_Q) > \mathrm{Vol}(\mathrm{Ball}_{Q'})$.

Таким образом, объем $\mathrm{Ball}_Q$ больше объема любого другого эллипсоида, содержащегося в $D$. Это однозначно определяет $\mathrm{Ball}_Q$, а значит, и $Q$. $\square$

В дальнейшем форма $Q$ из теоремы 3.1 будет упоминаться как вписанная квадратичная форма, а ее единичный шар $\mathrm{Ball}_Q$ — как вписанный эллипсоид нормы $\|\cdot\|$ или тела $D$. Хотя $Q$ определена однозначно, она может иметь много различных представлений в виде (3-1).

*Замечания.* 1) Из следствия 3.4 вытекает следующее интересное утверждение: вписанный эллипсоид тела $D$ совпадает со вписанным эллипсоидом многогранника, ограниченного опорными гиперплоскостями $L_i^{-1}(1)$ и $L_i^{-1}(-1)$. Можно добиться того, чтобы число этих гиперплоскостей не превосходило $n(n+1)+2$, см. замечание 2 после формулировки теоремы 3.1. Это примерно соответствует (в смысле двойственности) результатам Ф. Джона (F. John, [33]) о точках касания тела с описанным эллипсоидом минимального объема.

2) Эллипсоид, гомотетичный вписанному с коэффициентом $\sqrt{n}$, содержит исходное тело $D$ (константа $\sqrt{n}$ — точная и достигается для куба). Это следует, например, из разложения (3-1): поскольку $L_i \leqslant 1$ всюду на $D$ для всех $i$ и $\sum a_i = n$, имеем $Q \leqslant n$ всюду на $D$, откуда $D \subset \sqrt{n}\,\mathrm{Ball}_Q$. В частности, отношение объемов $D$ и $\mathrm{Ball}_Q$ ограничено сверху некоторой константой $C(n) \leqslant n^{n/2}$.

## §4. Торы без сопряженных точек

Целью этого параграфа является доказательство следующей теоремы ("гипотезы Хопфа"):

**Теорема 4.1.** *Всякая риманова метрика без сопряженных точек на $n$-мерном торе является плоской.*

Таким образом, в этом параграфе $\overline{M}$ — риманово многообразие, диффеоморфное тору $T^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$, а его метрика $\bar\rho$ не имеет сопряженных точек. Его универсальное накрывающее $(M,\rho)$ представляет собой пространство, диффеоморфное $\mathbf{R}^n$, с $\mathbf{Z}^n$-периодической метрикой, которая также не имеет сопряженных точек. (Действительно, при римановом накрытии $\pi\colon M \to \overline{M}$ геодезические переходят в геодезические, откуда $\exp_{\pi(x)} = \pi \circ \exp_x \circ (d_x\varphi)^{-1}$ для каждой точки $x \in M$, так что $\exp_x$ невырожденно вместе с $\exp_{\pi(x)}$). Доказательство теоремы 4.1 состоит в построении изометрии между $(M,\rho)$ и евклидовым пространством. Этого достаточно, поскольку метрики $\rho$ и $\bar\rho$ локально изометричны.

В силу отсутствия сопряженных точек, из теоремы Хопфа–Ринова следует, что для каждой точки $x \in M$ экспоненциальное отображение

$\exp_x\colon T_xM \to M$ является накрытием. Поскольку $M \simeq \mathbf{R}^n$ односвязно, это накрытие однолистно (другими словами, $\exp_x$ биективно). Следовательно, для любой точки $y \in M$ геодезическая, соединяющая $x$ и $y$, единственна и представляет собой кратчайшую кривую между $x$ и $y$. Таким образом, в пространстве $(M, \rho)$ всякая геодезическая является минимальной. Вместо условия отсутствия сопряженных точек далее используется только это его следствие.

Как и ранее, обозначим предельную норму метрики $\rho$ через $\|\cdot\|$ (она определена на $V \simeq \mathbf{R}^n$), ее единичный шар и единичную сферу — через $D$ и $F$. Поскольку все геодезические являются минимальными, все значения функции предельного направления $R$ (а значит, и функции $\overline{R}$, определенной почти всюду на $UT\overline{M}$) лежат на $F$ (предложение 2.2). Рассмотрим на $F$ вероятностную меру $m$, являющуюся $\overline{R}$-образом меры Лиувилля $\mu$ на $UT\overline{M}$, т. е. определяемую равенствами $m(A) = \mu(\overline{R}^{-1}(A))$ для измеримых множеств $A \subset F$. Для любой измеримой функции $f\colon F \to \mathbf{R}$ имеем

$$\int_F f\,dm = \int_{UT\overline{M}} (f \circ \overline{R})\,d\mu\,,$$

если хотя бы один из интегралов определен.

Пусть $L\colon V \to \mathbf{R}$ — линейный функционал, опорный к $D$ (т. е. $\|L\| = 1$), $B_L$ — соответствующая ему функция типа Буземана, $v_L = \operatorname{grad} B_L$ — поле ее градиентов, $\bar{v}_L$ — соответствующее поле на $\overline{M}$ (см. конец §1.B). Поле $\bar{v}_L$ измеримо, оно определено и удовлетворяет неравенству $|\bar{v}_L| \leqslant 1$ почти всюду на $\overline{M}$. Идея доказательства изометричности $M$ и $\mathbf{R}^n$ состоит в сравнении интегральных характеристик функций $\langle \bar{v}_L, \cdot\rangle^2$ на $UT\overline{M}$ и $L^2$ на $F$ (для нескольких специально выбранных функционалов $L$). При этом $UT\overline{M}$ снабжается нормированной мерой Лиувилля $\mu$, а $F$ — ее $\overline{R}$-образом $m$.

**Лемма 4.2.** *Для определенного выше векторного поля $\bar{v}_L$ имеем, в обозначениях §2.A,*

$$\int_{UT\overline{M}} \langle \bar{v}_L, w\rangle^2\,d\mu(w) = \frac{1}{n}\int_{\overline{M}} |\bar{v}_L|^2\,d\operatorname{vol} \leqslant \frac{1}{n}$$

*Доказательство.* По определению меры Лиувилля имеем

$$\int_{UT\overline{M}} \langle \bar{v}_L, w\rangle^2\,d\mu(w) = \int_{\overline{M}} d\operatorname{vol}(x) \int_{UT_x\overline{M}} \langle \bar{v}_L(x), w\rangle^2\,d\mu_x(w)\,,$$

где vol — нормированный риманов объем на $\overline{M}$, $\mu_x$ — стандартная вероятностная мера на $UT_x\overline{M} \simeq S^{n-1}$. Преобразуем внутренний интеграл в правой части:

$$\int_{UT_x\overline{M}} \langle \bar{v}_L(x), w\rangle^2 \, d\mu_x(w) = |\bar{v}_L(x)|^2 \int_{S^{n-1}} \langle v, w\rangle^2_{\mathbf{R}^n} \, d\mu_0(w)\,,$$

где $v \in \mathbf{R}^n$ — единичный вектор, а $\mu_0$ — вероятностная мера Хаара на стандартной сфере $S^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$. Последний интеграл не зависит от выбора $v \in S^{n-1}$, причем равен $1/n$. Действительно, сложив $n$ таких интегралов, в которых вместо $v$ подставлены вектора $e_1, \dots, e_n$ из стандартного базиса $\mathbf{R}^n$, получим

$$\int_{S^{n-1}} \sum \langle e_j, w\rangle^2_{\mathbf{R}^n} \, d\mu_0(w) = \int_{S^{n-1}} 1 \, d\mu_0 = 1\,.$$

Подставляя $|\bar{v}_L(x)|^2/n$ на место внутреннего интеграла в первоначальной формуле, получаем требуемое тождество. Его правая часть не превосходит $1/n$, так как $|\bar{v}_L| \leqslant 1$. $\square$

**Лемма 4.3.** *Для любого линейного функционала $L\colon V \to \mathbf{R}$, опорного к $D$, выполняется неравенство*

$$\int_F L^2 \, dm \leqslant \frac{1}{n}\,.$$

*Если в нем достигается равенство, то $\langle v_L, w\rangle = L(R(w))$ для почти всех векторов $w \in UTM$.*

*Доказательство.* Рассмотрим средние значения функции $\langle \bar{v}_L, \cdot\rangle^2$ вдоль траекторий геодезического потока (эта функция измерима и не превосходит 1, следовательно, суммируема, поэтому ее усреднение вдоль траекторий определено почти всюду). Из тождеств

$$\langle \bar{v}_L, \cdot\rangle^2 = \big(\langle \bar{v}_L, \cdot\rangle - L \circ \overline{R}\big)^2 + 2(L \circ \overline{R})\langle \bar{v}_L, \cdot\rangle - (L \circ \overline{R})^2$$

и $\operatorname{Ave}\langle \bar{v}_L, \cdot\rangle = L \circ \overline{R}$ (предложение 2.3), а также из постоянства $\overline{R}$ вдоль траекторий геодезического потока, следует, что

$$\operatorname{Ave}\langle \bar{v}_L, \cdot\rangle^2 = (L \circ \overline{R})^2 + \operatorname{Ave}\big(\langle \bar{v}_L, \cdot\rangle - L \circ \overline{R}\big)^2$$

Интегрируя с помощью эргодической теоремы, получаем

$$\int_{UT\overline{M}} \langle \bar{v}_L, \cdot \rangle^2 \, d\mu = \int_{UT\overline{M}} (L \circ \overline{R})^2 \, d\mu + \int_{UT\overline{M}} \left( \langle \bar{v}_L, \cdot \rangle - L \circ \overline{R} \right)^2 d\mu \, .$$

Левая часть этого тождества не превосходит $1/n$ по лемме 4.2, поэтому

$$\int_F L^2 \, dm = \int_{UT\overline{M}} (L \circ \overline{R})^2 \, d\mu \leqslant \frac{1}{n} - \int_{UT\overline{M}} \left( \langle \bar{v}_L, \cdot \rangle - L \circ \overline{R} \right)^2 \, d\mu \, .$$

Вычитаемый в правой части интеграл неотрицателен и равен нулю только если $\langle \bar{v}_L, \cdot \rangle = L \circ \overline{R}$ почти всюду на $UT\overline{M}$. Последнее свойство сохраняется и при поднятии в накрывающее пространство $M$ (т. е. при замене $\bar{v}_L$ на $v_L$ и $\overline{R}$ на $R$). $\square$

Найдем для предельной нормы $\|\cdot\|$ разложение вписанной квадратичной формы $Q = \sum a_i L_i^2$ как в теореме 3.1 (т. е. $a_i > 0$, $\sum a_i = n$, $\|L_i\| = 1$). Обозначим для краткости $B_i = B_{L_i}$, $v_i = \operatorname{grad} B_i$. Применив к функционалам $L_i$ лемму 4.3, получим

$$\int_F Q \, dm = \sum a_i \int_F L_i^2 \, dm \leqslant \frac{1}{n} \sum a_i = 1 \, .$$

С другой стороны, $Q \geqslant \|\cdot\|^2$, т. е. $Q \geqslant 1$ на $F$, поэтому $\int_F Q \, dm \geqslant 1$. Значит, на самом деле $\int_F Q \, dm = 1$, и все неравенства $\int_F L_i^2 \, dm \leqslant 1/n$ обращаются в равенства. Из второй части леммы 4.3 получаем, что

$$\langle v_i, w \rangle = L_i(R(w)) \tag{4-1}$$

для почти всех $w \in UTM$.

Отсюда следует, что (4-1) выполняется почти всюду на почти любой траектории геодезического потока $M$. Действительно, сделав в (4-1) замену переменных $w \mapsto \operatorname{Exp}_t(w)$, получаем, что при любом фиксированном $t$

$$\langle v_i, \operatorname{Exp}_t(w) \rangle = L_i(R(\operatorname{Exp}_t(w))) = L_i(R(w))$$

для почти всех $w \in UTM$ (преобразование $\operatorname{Exp}_t$ сохраняет значения функции $R$). По теореме Фубини отсюда следует, что вектора $w \in UTM$, для которых последнее тождество выполняется при почти всех $t \in \mathbf{R}$, образуют в $UTM$ множество полной меры.

Таким образом, для почти всякого вектора $w \in UTM$ на порождаемой им геодезической $\gamma(t) = \exp(tw)$ функция $\langle v_i, \gamma' \rangle = (B_i \circ \gamma)'$ почти всюду определена и равна константе $L_i(R(w)) = L_i(R(\gamma))$. В силу липшицевости функции $B_i$ отсюда следует (по формуле Ньютона–Лейбница), что функция $B_i \circ \gamma$ линейна с точностью до константы, поэтому

$$(B_i \circ \gamma)' \equiv L_i(R(\gamma)) \tag{4-2}$$

на всей числовой прямой.

Кроме того, из тождества $\int_F Q\, dm = 1$ следует, что неравенство $Q \geqslant 1$, которое выполняется всюду на $F$, обращается в равенство почти всюду по мере $m$ (другими словами, носитель $m$ содержится в множестве $\mathrm{Ball}_Q \cap F$). По определению меры $m$, это означает, что

$$Q(R(w)) = 1 \tag{4-3}$$

для почти всех $w \in UTM$.

Из невырожденности формы $Q = \sum a_i L_i^2$ следует, что из линейных функционалов $L_i$ можно выбрать $n$ линейно независимых. Перестановкой индексов добьемся того, чтобы линейно независимыми были первые $n$ из функций $L_i$. Рассмотрим (липшицево) отображение

$$B = (B_1, \dots, B_n) \colon M \to \mathbf{R}^n\,.$$

Введем в $\mathbf{R}^n$ новую евклидову структуру, которая соответствует квадратичной форме $Q$, заданной на $V$, при изоморфизме

$$I = (L_1, \dots, L_n) \colon V \to \mathbf{R}^n\,.$$

Для почти любой геодезической $\gamma \colon R \to M$ (т. е. для геодезической, порождаемой почти любым вектором $w = \gamma'(0)$) из (4-3) получаем, что

$$(B \circ \gamma)' = (L_1(R(\gamma)), \dots, L_n(R(\gamma))) = I(R(\gamma))$$

всюду на $\mathbf{R}$. Согласно (4-3), для почти любой $\gamma$ вектор $I(R(\gamma))$ имеет единичную длину в новой евклидовой структуре. Следовательно, для почти любой геодезической $\gamma \colon \mathbf{R} \to M$ ее образ $B \circ \gamma$ — прямая, проходимая равномерно с единичной скоростью в новой евклидовой структуре. В силу непрерывности $B$, из выполнения этого свойства для почти всех геодезических следует его выполнение для всех геодезических. Таким образом, при отображении $B$ из $(M,\rho)$ в $\mathbf{R}^n$ с новой евклидовой метрикой кратчайшие кривые (геодезические) переходят в кратчайшие, причем их длины сохраняются. Следовательно, это отображение является изометрическим. Существование такого отображения доказывает теорему 4.1.

*Замечание.* В приведенном доказательстве теоремы 4.1 требуется лишь $C^2$-гладкость римановой метрики (т. е. минимальная гладкость, при которой осмысленна ее формулировка). Действительно, предположения о гладкости использовались лишь для теоремы Лиувилля и для того факта, что все геодезические являются кратчайшими, который опирается на теорему Хопфа–Ринова. В обоих случаях достаточно $C^1$-гладкости геодезического потока, т. е. $C^2$-гладкости метрики.

## §5. Асимптотические объемы

Рассмотрим пространство $(M,\rho)$ с $\Gamma$-периодической римановой метрикой. Для каждой точки $x \in M$ и каждого $r > 0$ обозначим через $\mathrm{Ball}_x(r)$ шар в $(M,\rho)$ радиуса $r$ с центром в $x$. Пусть Vol обозначает риманов объем. В этом параграфе исследуется поведение величины $\mathrm{Vol}(\mathrm{Ball}_x(r))$ при $r \to \infty$. Как и ранее, $\|\cdot\|$ обозначает предельную норму $(M,\rho)$, заданную на пространстве $V = \Gamma \otimes \mathbf{R}$, $D$ — ее единичный шар, $n = \operatorname{rank}\Gamma$, $(\overline{M},\bar\rho)$ — факторпространство $(M,\rho)$ по действию $\Gamma$, $\pi\colon M \to \overline{M}$ — отображение факторизации. Через $|T(\Gamma)|$ обозначается мощность кручения группы $\Gamma$. Наконец, обозначим через $V_0$ меру Лебега в пространстве $V$, нормированную так, что объем фундаментальной области решетки $\Gamma/T(\Gamma) \hookrightarrow V$ равен 1.

**Предложение 5.1.** *При $r \to \infty$ имеет место асимптотическое равенство*

$$\mathrm{Vol}(\mathrm{Ball}_x(r)) = \Omega(M,\rho)\cdot r^n + O(r^{n-1})\,,$$

*где* $\Omega(M,\rho) = |T(\Gamma)|\cdot V_0(D)\cdot \mathrm{Vol}(\overline{M},\bar\rho)$.

*Доказательство.* Для каждой точки $\bar y \in \overline{M}$, обозначим через $N(\bar y, r)$ количество точек в множестве $\pi^{-1}(\bar y)\cap \mathrm{Ball}_x(r)$. Среди точек прообраза $\pi^{-1}(\bar y)$ существует точка $y \in M$ на расстоянии не больше $\operatorname{diam}\overline{M}$ от $x$. При этом $\pi^{-1}(y) = y + \Gamma$. Из теоремы 1.2' имеем

$$\bigl|\rho(x,y+k) - \|k\|\bigr| \leqslant \rho(x,y) + \bigl|\rho(y,y+k) - \|k\|\bigr| \leqslant \operatorname{diam}\overline{M} + C =: C_1\,.$$

Следовательно, $N(\bar{y}, r)$ оценивается сверху количеством элементов $k \in \Gamma$ с $\|k\| \leqslant r + C_1$, и снизу — количеством $k \in \Gamma$ с $\|k\| \leqslant r - C_1$. Эти количества, разделенные на $|T(\Gamma)|$, равны количествам точек целочисленной решетки $\Gamma/T(\Gamma) \hookrightarrow V$ в телах $(r+C_1)D$ и $(r-C_1)D$ соответственно. Обе последние величины имеют асимптотику $V_0(D) \cdot r^n + O(r^{n-1})$.

Таким образом, при локальной изометрии $\pi\colon \operatorname{Ball}_x(r) \to \overline{M}$ каждая точка $\bar{y} \in \overline{M}$ накрывается

$$N(\bar{x}, r) = |T(\Gamma)|\, V_0(D) \cdot r^n + O(r^{n-1})$$

раз, причем поправка $O(r^{n-1})$ в этой формуле равномерна по $\bar{y}$. Следовательно, $\operatorname{Vol}(\operatorname{Ball}_x(r))$ удовлетворяет доказываемому асимптотическому равенству. $\square$

Константа $\Omega(M, \rho)$ из предложения 5.1 будет называться *асимптотическим объемом* пространства $(M, \rho)$, ср. [2], [3]. Она может быть записана в виде предела

$$\Omega(M, \rho) = \lim_{r \to \infty} \frac{\operatorname{Vol}(\operatorname{Ball}_x(r))}{r^n}\,.$$

Величина $\Omega(M, \rho)$ может быть сколь угодно большой (для любого фиксированного многообразия $M$ с заданным действием $\Gamma$). Действительно, существует периодическая метрика $\rho$ на $M$, которую можно произвольно увеличивать внутри некоторой области, не меняя при этом предельной нормы (см. §1.Б). Как показывает формула для $\Omega(M, \rho)$ из предложения 5.1, асимптотический объем при этом пропорционален $\operatorname{Vol}(\overline{M}, \bar{\rho})$, т. е. неограниченно возрастает.

Предположим, что размерность многообразия $M$ равна $n = \operatorname{rank}\Gamma$, и пусть $\varphi\colon M \to V$ — выпрямляющее отображение. Оно является поднятием в накрывающие пространства некоторого отображения $\bar{\varphi}\colon \overline{M} \to V/\Gamma \simeq T^n$. Гомотопический тип $\bar{\varphi}$ определен однозначно, в частности, однозначно определена его (гомологическая) степень $\deg\bar{\varphi}$ (см. [6]). Эта степень (целое число для ориентируемого $\overline{M}$ и вычет по модулю 2 для неориентируемого) зависит только от действия $\Gamma$ на $M$ и будет обозначаться через $\deg_\Gamma(M)$. В дальнейшем, помимо гомотопической инвариантности степени, потребуется лишь то, что всякое отображение ненулевой степени сюръективно (см. [6]).

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема:

**Теорема 5.2.** *Пусть* $\dim M = \operatorname{rank}\Gamma = n$, $\deg_\Gamma(M) \neq 0$. *Тогда для любой* $\Gamma$*-периодической римановой метрики* $\rho$ *на* $M$ *выполняется неравенство*

$$\Omega(M,\rho) \geqslant \omega_n\,, \tag{5-1}$$

*где* $\omega_n$ *— объем стандартного единичного шара в* $\mathbf{R}^n$.

*Равенство в* (5.1) *достигается тогда и только тогда, когда* $(M,\rho)$ *изометрично евклидову пространству* $\mathbf{R}^n$.

Наиболее привлекательно формулировка теоремы выглядит для случая, когда $(M,\rho)$ — универсальное накрывающее $n$-мерного риманова тора. В этом случае топологическое условие выполняется автоматически ($\deg_\Gamma(M) = 1$), а сама теорема может быть переписана как утверждение о минимуме асимптотического объема как функции метрики (минимум равен $\omega_n$ и достигается для плоских метрик).

*Замечания.* Условие $\deg_\Gamma(M) \neq 0$ в теореме 5.2 существенно. Действительно, рассмотрим на плоскости $\varepsilon$-окрестность сетки прямых, параллельных осям координат и проходящих через точки целочисленной решетки, где $\varepsilon$ — достаточно маленькое положительное число. Асимптотический объем этого пространства (снабженного внутренней метрикой, индуцированной из $\mathbf{R}^2$) стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Перейдя к удвоению и сгладив углы, получим $\mathbf{Z}^2$-периодическую риманову метрику на двумерном многообразии без края со сколь угодно малым асимптотическим объемом.

Факторпространство $\overline{M}$ в этом примере гомеоморфно кренделю (сфере с двумя ручками), однако, имеется другое $\mathbf{Z}^2$-периодическое накрывающее пространство кренделя, для которого условие теоремы выполняется. Это пространство выглядит как плоскость с периодически повторяющимися небольшими ручками (каждая ручка приклеена вблизи соответствующей точки целочисленной решетки).

Доказательство теоремы 5.2 основывается на комбинации результатов §1.B и §3 с геометрическим неравенством, напоминающим известное неравенство Безиковича [12], точнее, с обобщением метода Деррика (W. Derrick, [25], [26]) доказательства этого неравенства. Неравенство Безиковича оценивает снизу объем римановой метрики на $n$-мерном кубе произведением расстояний между парами противоположных граней, и оно использовалось для получения оценок асимптотических объемов в [29] и [2]. Отличие описываемого ниже метода состоит в том, что количество направлений “граней”, расстояния до которых используются для оценки объема, может превосходить размерность многообразия (проводя не слишком точную аналогию, можно сказать, что вместо куба рассматривается выпуклый многогранник произвольной формы). Доказываемое неравенство является асимптотическим, и вместо функций расстояния до сторон используются функции типа Буземана (которые можно рассматривать как дистанционные функции “бесконечно удаленных” гиперплоскостей).

Для доказательства теоремы 5.2, а также в §7, понадобятся некоторые сведения о поведении объемов при липшицевых отображениях. Пусть $M_1$ и $M_2$ — два римановых многообразия, причем размерность $M_1$ равна $n$. Пусть $f\colon M_1 \to M_2$ — липшицево отображение. Тогда для почти всех точек $x \in M_1$ определена его производная $d_x f$ — линейное отображение из $T_x M_1$ в $T_{f(x)} M_2$. Допуская некоторое отклонение от стандартной терминологии, будем называть *якобианом* $f$ в точке $x$ и обозначать через $\operatorname{Jac} f(x)$ коэффициент растяжения $n$-мерного евклидова объема при отображении $d_x f$ (в частности, если $d_x f$ не инъективно, якобиан равен нулю). Из формулы коплощади (см. [7]) следует, что $n$-мерный объем образа $f(M_1) \subset M_2$ (определяемый как $n$-мерная мера Хаусдорфа) не превосходит величины $\int_{M_1} \operatorname{Jac} f(x)\, d\operatorname{Vol}(x)$. В частности, если $\operatorname{Jac} f \leqslant 1$ почти всюду на $M$, то отображение $f$ является не увеличивающим $n$-мерный объем (для $n$-мерных римановых многообразий $n$-мерная мера Хаусдорфа совпадает с обычным римановым объемом).

Следующая лемма служит технической основой доказательства теоремы 5.2 и будет использоваться также в §7.

**Лемма 5.3.** *Пусть $M$ — произвольное риманово многообразие размерности $n$, $f_i\colon M \to \mathbf{R}$ $(i = 1, \dots, N)$ — набор функций, липшицевых с константой $1$, $\{a_i\}$ — набор положительных чисел с $\sum a_i = n$. Тогда во всех точках дифференцируемости отображения $f\colon M \to \mathbf{R}^N$, определяемого формулой*

$$f(x) = (\sqrt{a_1} f_1(x), \dots, \sqrt{a_N} f_N(x))\,,$$

*выполняется неравенство $\operatorname{Jac} f \leqslant 1$.*

*Если для точки $x \in M$ достигается равенство $\operatorname{Jac} f(x) = 1$, то производная $d_x f\colon T_x M \to \mathbf{R}^N$ является изометрическим вложением.*

*Доказательство.* Пусть $f$ дифференцируемо в точке $x \in M$. Из равенства

$$d_x f = (\sqrt{a_1} d_x f_1, \dots, \sqrt{a_N} d_x f_N)$$

следует, что прообраз единичного шара $\mathbf{R}^N$ (а значит, и единичного шара подпространства $d_x f(T_x M) \subset \mathbf{R}^N$) при отображении $d_x f$ представляет собой единичный шар квадратичной формы $Q_x = \sum a_i (d_x f_i)^2$, заданной на $T_x M$. При этом $\|d_x f_i\| \leqslant 1$ в силу 1-липшицевости $f_i$. Применяя к форме $Q_x$ следствие 3.3, получаем, что ее единичный шар по объему не меньше, чем единичный шар риманова скалярного произведения в $T_x M$. Таким образом, линейное отображение $d_x f \colon T_x M \to d_x f(T_x M) \subset \mathbf{R}^N$ не увеличивает $n$-мерный объем, т. е. $\operatorname{Jac} f(x) \leqslant 1$.

Если $\operatorname{Jac} f(x) = 1$, то мы имеем случай равенства в следствии 3.3 для формы $Q_x$, значит $Q_x$ совпадает с формой риманова скалярного произведения. Это означает, что $d_x f$ — изометрическое отображение. $\square$

Теперь пусть $(M, \rho)$ — периодическая метрика, удовлетворяющая условиям теоремы 5.2. Пусть, как и в §4, $Q = \sum a_i L_i^2$ — разложение вида (3-1) вписанной квадратичной формы предельной нормы $\|\cdot\|$, $B_i$ — функции типа Буземана, соответствующие $L_i$, $i = 1, \dots, N$. Рассмотрим отображение $B \colon M \to \mathbf{R}^N$,

$$B(x) = (\sqrt{a_1} B_1(x), \dots, \sqrt{a_N} B_N(x))$$

и аналогичное отображение $L \colon V \to \mathbf{R}^N$,

$$L(x) = (\sqrt{a_1} L_1(x), \dots, \sqrt{a_N} L_N(x))\,.$$

Зафиксируем на $V$ евклидову структуру, определяемую формой $Q$. Отображение $L$ является изометрическим вложением $(V, Q)$ в $R^N$. Пусть $\mathrm{pr}$ — оператор ортогонального проектирования $\mathbf{R}^N$ на $L(V)$. Рассмотрим отображение

$$\varphi = L^{-1} \circ \mathrm{pr} \circ B\,, \quad \varphi \colon (M, \rho) \to (V, Q)\,.$$

Имеем $\operatorname{Jac} \varphi \leqslant \operatorname{Jac} B \leqslant 1$ почти всюду, причем в случае равенства $\operatorname{Jac} \varphi(x) = 1$ производная $d_x \varphi$ является изометрией. Действительно, по лемме 5.3 имеем $\operatorname{Jac} B(x) \leqslant 1$ с изометричностью $d_x B$ в случае равенства. Далее, проекция $\mathrm{pr}$ не увеличивает расстояния и

$d_x(\mathrm{pr}\circ B) = \mathrm{pr}\circ d_x B$, откуда $\mathrm{Jac}(\mathrm{pr}\circ B)(x) \leqslant \mathrm{Jac}\, B(x)$, причем в случае равенства сужение pr на $d_x B(T_x M)$ изометрично. Наконец, композиция с $L^{-1}$ не меняет якобиан и изометричность производной, поскольку $L$ — изометрия между $(V,Q)$ и $L(V) \subset \mathbf{R}^N$.

Кроме того, $\varphi$ является выпрямляющим отображением. Действительно, из тождеств $B_i(x+k) = B_i(x) + L_i(k)$, где $x \in M$, $k \in \Gamma$, имеем равенство $B(x+k) = B(x) + L(k)$. Из него с учетом того, что $L^{-1}\circ \mathrm{pr}\circ L$ — тождественное отображение, получаем

$$\varphi(x+k) = L^{-1}(\mathrm{pr}(B(x) + L(k))) = L^{-1}(\mathrm{pr}(B(x))) + k = \varphi(x) + k\,.$$

*Отступление.* Остаток доказательства неравенства (5-1) является формализацией следующего простого рассуждения: при отображении $\varphi$ шар $\mathrm{Ball}_x(r)$ метрики $\rho$ накрывает в пространстве $V$ множество, близкое к шару $rD$ предельной нормы (это следует из теоремы 1.2). При этом $rD \supset r\,\mathrm{Ball}_Q$, так что в силу уменьшения объема $\mathrm{Vol}(\mathrm{Ball}_x(r)) > r^n\,\mathrm{Vol}(\mathrm{Ball}_Q, Q)$ с точностью до несущественных поправок. (См. также аналогичное рассмотрение в §7.)

Зафиксируем на торе $V/\Gamma$ плоскую риманову метрику $\overline{Q}$, соответствующую евклидовой структуре $Q$ на $V$. Рассмотрим отображение $\bar\varphi\colon \overline{M} \to V/\Gamma$, поднятием которого является $\varphi$. По условию, $\deg\bar\varphi = \deg_\Gamma M \neq 0$, следовательно, $\bar\varphi$ сюръективно. Поскольку $\varphi$ и $\bar\varphi$ имеют одинаковые якобианы в соответствующих точках, якобиан $\bar\varphi$ тоже не превосходит 1, поэтому $\bar\varphi$ не увеличивает $n$-мерный объем, в частности, $\mathrm{Vol}(\overline{M},\bar\rho) \geqslant \mathrm{Vol}(V/\Gamma,\overline{Q})$. Из предложения 5.1 с учетом того, что единичный шар $\mathrm{Ball}_Q$ формы $Q$ содержится в $D$, получаем

$$\begin{aligned}\Omega(M,\rho) &= |T(\Gamma)|\cdot V_0(D)\cdot \mathrm{Vol}(\overline{M},\bar\rho) \geqslant \\ &\geqslant |T(\Gamma)|\cdot V_0(\mathrm{Ball}_Q)\cdot \mathrm{Vol}(V/\Gamma,\overline{Q}) = \\ &= |T(\Gamma)|\cdot \Omega(V,Q) \geqslant \Omega(V,Q) = \omega_n\,,\end{aligned}$$

(последнее равенство выполняется потому, что $(V,Q)$ — евклидово пространство). Тем самым неравенство (5-1) доказано.

В случае равенства имеем, в частности,

$$\mathrm{Vol}(\overline{M},\rho) = \mathrm{Vol}(V/\Gamma,\overline{Q})\,.$$

Поскольку отображение $\bar\varphi\colon (\overline{M},\bar\rho) \to (V/\Gamma,\overline{Q})$ сюръективно и не увеличивает объем, оно должно сохранять объемы всех множеств: для любого $A \subset \overline{M}$ имеет место равенство $\mathrm{Vol}(A, \bar\rho) = \mathrm{Vol}(\bar\varphi(A), \overline{Q})$. Действительно, в противном случае $\bar\varphi$ увеличивало бы объем $\overline{M} \setminus A$. Из сохранения объема следует, что неравенство $\mathrm{Jac}\,\bar\varphi \leqslant 1$ (а значит, и неравенство $\mathrm{Jac}\,\varphi \leqslant 1$) обращается в равенство почти всюду. Следовательно, для почти всех $x \in M$ производная $d_x\varphi$ изометрична. Значит, и производная отображения $\bar\varphi$ почти всюду изометрична.

Поскольку $(V/\Gamma, \overline{Q})$ — тор с плоской метрикой, для завершения доказательства теоремы 5.2 достаточно проверить, что $\bar\varphi$ — изометрия. Действительно, пусть $(\overline{M}, \bar\rho)$ — плоский тор, в частности, $\pi_1(\overline{M}) \simeq \mathbf{Z}^n$. Поскольку группа $\Gamma$ является факторгруппой $\pi_1(\overline{M})$ по $\pi_1(M)$ и должна иметь ранг $n$, отсюда следует, что $\pi_1(M) = 0$, т. е. $M$ — универсальное накрывающее тора. Метрика $\rho$ является плоской вместе с $\bar\rho$, поэтому $(M, \rho)$ изометрично стандартному евклидову пространству.

Изометричность отображения $\bar\varphi$ вытекает из следующей леммы:

**Лемма.** *Пусть $M$ и $M'$ — два компактных $n$-мерных римановых многообразия. Пусть $f\colon M \to M'$ — сюрьективное липшицево отображение, сохраняющее объемы, и его производная $d_xf$ является линейной изометрией для почти всех $x \in M$. Тогда $f$ — изометрия.*

*Доказательство.* Поскольку производная $f$ изометрична почти всюду, само $f$ является нерастягивающим отображением: $\rho(f(x), f(y)) \leqslant \rho(x, y)$ для любых $x, y \in M$. Докажем, что $f$ инъективно и отображение $f^{-1}$ локально липшицево (с константой Липшица, не превосходящей 2). Выберем столь малое $r_0 > 0$, что отношение объема любого шара радиуса $r < r_0$ в $M$ или $M'$ к объему шара того же радиуса в $\mathbf{R}^n$ отличается от единицы меньше, чем на $2^{-n-3}$. Рассмотрим различные точки $x, y \in M$, такие, что $\rho(f(x), f(y)) < r_0$. Предположим, что $\rho(x, y) > 2\rho(f(x), f(y))$. Выберем положительное число $r < r_0$ между $\rho(f(x), f(y))$ и $\rho(x, y)/2$. Рассмотрим объединение двух (непересекающихся) шаров $U = \mathrm{Ball}_x(r) \cup \mathrm{Ball}_y(r) \subset M$. По выбору $r_0$ имеем

$$\mathrm{Vol}(U) > 2 \cdot (1 - 2^{-n-3})\omega_n r^n\,,$$

где $\omega_n$ — объем единичного шара в $\mathbf{R}^n$. Образ $f(U)$ содержится в объединении шаров $B_1 = \mathrm{Ball}_{f(x)}(r)$ и $B_2 = \mathrm{Ball}_{f(y)}(r)$. Поскольку $\rho(f(x), f(y)) < r$, пересечение $B_1 \cap B_2$ содержит шар радиуса $r/2$ с центром в середине кратчайшей, соединяющей $f(x)$ и $f(y)$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(f(U)) &\leqslant \mathrm{Vol}(B_1) + \mathrm{Vol}(B_2) - \mathrm{Vol}(B_1 \cap B_2) \leqslant \\ &\leqslant 2 \cdot (1 + 2^{-n-3})\omega_n r^n - (1 - 2^{-n-3})\frac{\omega_n r^n}{2^n} < \\ &< 2 \cdot (1 - 2^{-n-3})\omega_n r^n\,.\end{aligned}$$

Таким образом, $\mathrm{Vol}(f(U)) < \mathrm{Vol}(U)$, что противоречит условию сохранения объема. Полученное противоречие доказывает, что $\rho(x,y) \leqslant 2\rho(f(x),f(y))$ при $\rho(f(x),f(y)) < r_0$. Значит, $f$ инъективно, и $f^{-1}$ локально липшицево, откуда следует, что $f^{-1}$ дифференцируемо почти всюду. Поскольку $d(f^{-1}) = (df)^{-1}$, производная отображения $f^{-1}$ изометрична почти всюду. Значит, отображение $f^{-1}$, так же как и $f$, является нерастягивающим. Следовательно, $f$ — изометрия. $\square$

*Замечание.* Одна из промежуточных оценок в доказательстве неравенства (5-1) состояла в замене объема тела $D$ объемом его вписанного эллипсоида. Без этой замены правая часть (5-1) приобретает вид оценки, зависящей от предельной нормы:

$$\frac{V_0(D)}{V_0(\mathrm{Ball}_Q)} \cdot \omega_n \geqslant \omega_n$$

(причем утверждение о случае равенства сохраняется). Таким образом, если в условиях теоремы 5.2 асимптотический объем близок к $\omega_n$, то предельная норма близка к евклидовой (в том смысле, что вписанный эллипсоид хорошо приближает объем ее единичного шара).

## §6. Асимптотические изопериметры

В этом параграфе рассматриваются только периодические метрики $(M,\rho)$, являющиеся универсальными накрывающими метрик $n$-мерного тора. Зафиксировав диффеоморфизм между $\overline{M}$ и стандартным тором $T^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$, можно считать, что $M = V = \mathbf{R}^n$.

Для каждого пространства $(M,\rho)$ определим *асимптотическую изопериметрическую константу* $\sigma(M,\rho)$ как верхний предел

$$\sigma(M,\rho) = \limsup_{\mathrm{Vol}(\Omega)\to\infty} \sigma(M,\rho,\Omega)\,,$$

где

$$\sigma(M,\rho,\Omega) = \frac{\mathrm{Vol}(\Omega)^{1/n}}{\mathrm{Sq}(\partial\Omega)^{1/(n-1)}}$$

для каждой ограниченной области $\Omega \subset M$. Здесь Vol обозначает $n$-мерный, а Sq — $(n-1)$-мерный объем (“площадь поверхностей”) в $(M, \rho)$.

Ясно, что $\sigma(M, \rho)$ сохраняется при гомотетиях метрики $\rho$ и является конечным положительным числом (это следует из наличия изопериметрического неравенства для евклидовой метрики в $\mathbf{R}^n$ и липшицевой эквивалентности метрики $\rho$ и евклидовой метрики). Увеличивая метрику в малой окрестности точек некоторой решетки вида $x + \Gamma$, где $x \in M$, можно сделать асимптотическую изопериметрическую константу сколь угодно большой. Представляет интерес получение универсальных нижних оценок $\sigma(M, \rho)$, подобных оценке асимптотических объемов из теоремы 5.2. Оказывается, что такие оценки существуют в размерности 2, и, более общо, для любых конформно-плоских метрик $\rho$ (теорема 6.1). Однако, таких оценок не существует в старших размерностях без наложения на метрику дополнительных условий (теорема 6.3).

Отметим, что верхние оценки изопериметрических констант, необходимые для доказательства теоремы 6.3, являются более тонкими, чем нижние оценки из теоремы 6.1: неравенство вида $\sigma(M, \rho) < \sigma$ эквивалентно тому, что $\sigma(M, \rho, \Omega) < \sigma$ для *всех* достаточно больших областей $\Omega$, тогда как оценка вида $\sigma(M, \rho) > \sigma$ сводится к *существованию* сколь угодно больших областей $\Omega$ с $\sigma(M, \rho, \Omega) > \sigma$.

**A. Оценка $\sigma(M, \rho)$ для конформно плоских метрик.**

В этой части параграфа будет получена оценка снизу для асимптотической изопериметрической константы $\sigma(M, \rho)$ для периодической метрики универсального накрывающего $n$-мерного тора, в предположении, что факторпространство $(\overline{M}, \bar{\rho}) = (M, \rho)/\Gamma$ конформно эквивалентно некоторому плоскому тору (коротко говоря, является конформно плоским).

Обозначим через $\sigma_n$ изопериметрическую константу евклидова пространства $\mathbf{R}^n$, $\sigma_n = \sigma(\mathbf{R}^n, \rho_E, D^n)$, где $\rho_E$ — евклидова метрика в $\mathbf{R}^n$, а $D^n$ — ее единичный шар.

**Теорема 6.1.** *Если $(M, \rho)$ — универсальное накрывающее конформно плоского $n$-мерного тора, то*

$$\sigma(M, \rho) \geqslant \sigma_n ,$$

*причем в случае равенства $(M, \rho)$ изометрично евклидову пространству $\mathbf{R}^n$.*

*Доказательство.* Всякий плоский $n$-мерный тор имеет вид $\mathbf{R}^n/\Gamma$, где $\Gamma \simeq \mathbf{Z}^n$ вложена в $\mathbf{R}^n$ как некоторая решетка (не обязательно стандартная целочисленная). Можно считать, что $\rho$ является поднятием с такого тора $T = \mathbf{R}^n/\Gamma$ метрики $\bar\rho$, метрический тензор которой отличается от метрического тензора плоской метрики умножением на положительную гладкую функцию $\lambda^2\colon T \to \mathbf{R}$. Тогда метрический тензор метрики $\rho$ отличается от евклидова умножением на $\Gamma$-периодическую функцию $(\lambda \circ \pi)^2$, где $\pi\colon \mathbf{R}^n \to T$ — отображение факторизации. Функция $\lambda \circ \pi$, заданная на $\mathbf{R}^n$, тоже будет обозначаться буквой $\lambda$ для упрощения записи. Пусть $V_n$ обозначает лебегов объем в $\mathbf{R}^n$ и соответствующую меру на $T$. Обозначение Vol будет использоваться как для риманова объема метрики $\rho$ в $\mathbf{R}^n$, так и для риманова объема метрики $\bar\rho$ на $T$. Подходящими гомотетиями тора $T$ и метрики $\rho$ можно добиться того, что $V_n(T) = \mathrm{Vol}(T) = 1$. Последнее равенство означает, что $\int_T \lambda^n\,dV_n = 1$. Для $x \in \mathbf{R}^n$ и $r > 0$ обозначим через $B(x,r)$ евклидов шар радиуса $r$ с центром в $x$. Ввиду равенства $V_n(T) = \mathrm{Vol}(T) = 1$, оба объема $V_n(B(x,r))$ и $\mathrm{Vol}\,B(x,r)$ асимптотически равны количеству фундаментальных областей решетки, содержащихся в $B(x,r)$ (ср. с предложением 5.1), значит,

$$\frac{\mathrm{Vol}\,B(x,r)}{V_n(B(x,r))} \xrightarrow[r\to\infty]{} 1 \tag{6-1}$$

равномерно по $x$. Зафиксируем $r > 0$ и введем функцию $A_r$ на $\mathbf{R}^n$:

$$A_r(x) = \frac{\mathrm{Sq}(\partial B(x,r))}{V_{n-1}(\partial B(x,r))}\,,$$

где $V_{n-1}$ — евклидов $(n-1)$-мерный объем (в данном случае — стандартный объем сферы радиуса $r$). Величина $A_r(x)$ равна интегральному среднему значению функции $\lambda^{n-1}$ на евклидовой сфере $\partial B(x,r)$. Функция $A_r$ инвариантна относительно $\Gamma$, поэтому будем считать ее заданной и на $T$. Рассмотрим интегральное среднее $\alpha = \int_T A_r\,dV_n$. Оно получается интегрированием функции $\lambda^{n-1}$ по вероятностной мере, которая является усреднением мер, равномерно распределенных по проекциям на $T$ евклидовых сфер радиуса $r$. Эта усредняющая мера на $T$ однородна (инвариантна относительно любых сдвигов плоского тора $T$ вдоль себя), поэтому она совпадает с мерой Лебега $V_n$. Таким образом, $\alpha = \int_T \lambda^{n-1}\,dV_n$, в частности, $\alpha$ не зависит от $r$. Поскольку $\int_T \lambda^n\,dV_n = 1$, из неравенства Гельдера следует, что $\alpha \leqslant 1$, причем равенство $\alpha = 1$ достигается только при $\lambda \equiv 1$, т. е. для плоской метрики $\rho$.

Поскольку $\alpha$ — среднее значение $A_r$, для каждого $r$ найдется точка $x \in \mathbf{R}^n$, для которой $A_r(x) \leqslant \alpha$, т. е. $\operatorname{Sq} \partial B(x,r) \leqslant \alpha V_{n-1}(\partial B(x,r))$. Ввиду (6-1), отсюда следует, что при $r \to \infty$

$$\sigma(M, \rho, B(x,r)) \geqslant \frac{V_n(B(x,r))^{1/n}}{(\alpha V_{n-1}(\partial B(x,r)))^{1/(n-1)}} + o(1) = \frac{\sigma_n}{\alpha^{1/(n-1)}} + o(1)\,.$$

Следовательно, $\sigma(M,\rho) \geqslant \sigma_n \cdot \alpha^{-1/(n-1)}$. Поскольку $\alpha \leqslant 1$, и $\alpha = 1$ только для плоской метрики $\rho$, теорема 6.1 доказана. $\square$

Поскольку в двумерном случае любая метрика на торе является конформно плоской, из теоремы 6.1 вытекает следующее утверждение:

**Следствие 6.2.** *Если $(M,\rho)$ — универсальное накрывающее двумерного тора, то*

$$\sigma(M,\rho) \geqslant \sigma_2 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,,$$

*причем в случае равенства $(M,\rho)$ изометрично $\mathbf{R}^2$.* $\square$

**Б. Примеры метрик со сколь угодно малым $\sigma(M,\rho)$.**

Как показывает следующая теорема, неравенство из теоремы 6.1 при $n \geqslant 3$ неверно без требования конформной плоскости метрики (или других дополнительных предположений), даже с другой константой на месте $\sigma_n$ в правой части.

**Теорема 6.3.** *Если $n \geqslant 3$, то на $\mathbf{R}^n$ существуют $\mathbf{Z}^n$-периодические римановы метрики со сколь угодно малыми значениями асимптотической изопериметрической константы.*

Эти метрики будут построены в явном виде. Пусть $n \geqslant 3$, и рассмотрим пространство $\mathbf{R}^n = \{(x_1,\dots,x_n) : x_i \in \mathbf{R}\}$ со стандартным действием группы $\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{R}^n$ целочисленными параллельными переносами. В качестве фундаментальной области действия группы можно выбрать единичный куб $I^n = [0,1]^n$. Для $k \in \mathbf{Z}^n$ обозначим кубик $I^n + k$ через $I^n_k$. Для каждого $i = 1,\dots,n$ обозначим через $\operatorname{pr}_i$ оператор ортогонального проектирования на $i$-ю координатную гиперплоскость $\{x_i = 0\}$. Поскольку $n \geqslant 3$, параллельно координатным осям можно провести попарно непересекающиеся прямые $l_1,\dots,l_n$, протыкающие куб $I^n$. Окружим эти прямые непересекающимися замкнутыми трубчатыми окрестностями вида $\operatorname{pr}_i^{-1}(U_i)$,

$i = 1, \dots, n$, где $U_i \subset \mathrm{pr}_i(\mathrm{Int}\, I^n)$ — замкнутая окрестность точки $l_i \cap \{x_i = 0\}$ в $i$-й координатной гиперплоскости. Трубчатые решетки $G_i := \mathrm{pr}_i^{-1}\left(\bigcup_{k \in \mathbf{Z}^n}(U_i + k)\right)$ попарно не пересекаются. Обозначим

$$v_0 = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} V_n(G_i \cap I^n) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} V_{n-1}(U_i)\,,$$

где $V_n$ и $V_{n-1}$, как и раньше, обозначают соответственно $n$-мерный и $(n-1)$-мерный объем в $\mathbf{R}^n$.

Выберем малое $\varepsilon > 0$ и для каждого $m = 1, \dots, n$ определим в трубчатой решетке $G_m$ риманову метрику с метрическим тензором

$$ds^2 = \varepsilon^{2n-2} dx_m^2 + \sum_{i \neq m} \frac{dx_i^2}{\varepsilon^2}\,.$$

Эта метрика определяет внутри $G_m$ такую же форму объема, как и стандартная евклидова. Продолжим эту метрику с $\bigcup G_m$ на все $\mathbf{R}^n$ так, чтобы получилась $\mathbf{Z}^n$-периодическая риманова метрика $\rho = \rho_\varepsilon$, определяющая стандартную форму объема: $\mathrm{Vol} = V_n$. Докажем, что $\sigma(\mathbf{R}^n, \rho) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Для этого будет использоваться следующее неравенство Лумиса–Уитни (см. [35], [5]):

**Неравенство Лумиса–Уитни.** *Пусть* $\Omega$ *— произвольная область в* $\mathbf{R}^n$*. Тогда*

$$\prod_{i=1}^{n} V_{n-1}(\mathrm{pr}_i(\Omega)) \geqslant V_n(\Omega)^{n-1}\,.$$

*В частности, существует* $m \leqslant n$*, для которого*

$$V_{n-1}(\mathrm{pr}_m(\Omega)) \geqslant V_n(\Omega)^{1-1/n}\,.$$

Пусть $\Omega$ — произвольная ограниченная область в $\mathbf{R}^n$. Выделим среди кубиков $I_k^n$ те, для которых $V_n(\Omega \cap I_k^n) \geqslant 1 - v_0/2$. Обозначим их объединение через $\Omega'$. Применяя к $\Omega'$ неравенство Лумиса–Уитни, найдем $m \leqslant n$, для которого

$$V_{n-1}(\mathrm{pr}_m(\Omega')) \geqslant V_n(\Omega')^{1-1/n} = \mathrm{Vol}(\Omega')^{1-1/n}\,.$$

Для определенности будем считать, что $m = 1$. Для каждого кубика $I_k^n \subset \Omega'$ имеем

$$V_n(\Omega \cap I_k^n \cap G_1) \geqslant V_n(I_k^n \cap G_1) - V_n(I_k^n \setminus \Omega) \geqslant \frac{v_0}{2}\,.$$

Значит, в каждом $(n-1)$-мерном кубике из числа составляющих множество $\mathrm{pr}_1(\Omega')$ точки, входящие в $\mathrm{pr}(\Omega) \cap G_1$, занимают (евклидов) объем, не меньший, чем $v_0/2$. Поскольку $\mathrm{pr}_1(\Omega) = \mathrm{pr}_1(\partial\Omega)$, отсюда следует, что

$$V_{n-1}(\mathrm{pr}_1(\partial\Omega) \cap G_1) \geqslant \frac{v_0}{2} \cdot V_{n-1}(\mathrm{pr}_1(\Omega')) \geqslant \frac{v_0}{2} \cdot V_n(\Omega')^{1-1/n}\,.$$

Метрика $\rho$ на $G_1 = \mathbf{R} \times (G_1 \cap \{x_1 = 0\})$ имеет вид прямого произведения, и на $G_1 \cap \{x_1 = 0\}$ риманов $(n-1)$-мерный объем связан с евклидовым соотношением $\mathrm{Sq} = V_{n-1}/\varepsilon^{n-1}$. Поэтому

$$\begin{aligned}\mathrm{Sq}(\partial\Omega) \geqslant \mathrm{Sq}(\mathrm{pr}_1(\partial\Omega) \cap G_1) &= \\ &= \frac{V_{n-1}(\mathrm{pr}_1(\partial\Omega) \cap G_1)}{\varepsilon^{n-1}} \geqslant \frac{v_0}{2\varepsilon^{n-1}} \cdot V_n(\Omega')^{1-1/n}\,.\end{aligned}$$

Поскольку $V_n = \mathrm{Vol}$, полученное неравенство эквивалентно следующему:

$$\sigma(\mathbf{R}^n, \rho, \Omega) \leqslant \varepsilon \cdot (2/v_0)^{1/(n-1)} \left(\frac{V_n(\Omega)}{V_n(\Omega')}\right)^{1/n}\,. \tag{6-2}$$

Доказанное неравенство означает, что изопериметрическая константа мала для тех областей $\Omega$, в которых $\Omega \cap \Omega'$ занимает значительную долю объема. Остается убедиться, что только такие области и следует рассматривать при нахождении $\sigma(\mathbf{R}^n, \rho)$.

**Лемма.** *Для данной метрики $\rho$ существует константа $c > 0$, такая, что для любой области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ и любого кубика $I_k^n$, не входящего в соответствующую область $\Omega'$, выполняется неравенство*

$$\mathrm{Sq}(\partial\Omega \cap \mathrm{Int}\, I_k^n) \geqslant c \cdot \mathrm{Vol}(\Omega \cap I_k^n)\,.$$

*Доказательство.* Поскольку величина константы несущественна, можно доказывать лемму для стандартной евклидовой метрики вместо $\rho$. Для определенности будем считать, что $I_k^n = I^n$ и обозначим $\Omega_0 = \Omega \cap \mathrm{Int}\, I^n$. Утверждение леммы сводится к следующему: если $V_n(\Omega_0) \leqslant 1 - v_0/2$, то

$$V_{n-1}(\partial\Omega_0 \cap \mathrm{Int}\, I^n) \geqslant c \cdot V_n(\Omega_0)$$

для некоторой константы $c > 0$ (зависящей только от $v_0$).

Применим неравенство Лумиса–Уитни к $\Omega_0$: существует $m \leqslant n$, для которого $V_{n-1}(\mathrm{pr}_m(\Omega_0)) \geqslant V(\Omega_0)^{1-1/n}$. Для определенности будем считать, что $m = 1$. Для каждой точки $x \in \mathrm{pr}_1(\Omega_0) \setminus \mathrm{pr}_1(\partial\Omega_0 \cap \mathrm{Int}\, I^n)$ лежащий над ней отрезок $\mathrm{pr}_1^{-1}(x) \cap \mathrm{Int}\, I^n$ целиком содержится в $\Omega_0$. Поэтому

$$V_n(\Omega_0) \geqslant V_{n-1}(\mathrm{pr}_1(\Omega_0) \setminus \mathrm{pr}_1(\partial\Omega_0 \cap \mathrm{Int}\, I^n)) \geqslant \\ \geqslant V_n(\Omega_0)^{1-1/n} - V_{n-1}(\partial\Omega_0 \cap \mathrm{Int}\, I^n)\,.$$

Таким образом,

$$V_{n-1}(\partial\Omega_0 \cap \mathrm{Int}\, I^n) \geqslant \left(V_n(\Omega_0)^{-1/n} - 1\right) \cdot V_n(\Omega_0) \geqslant \\ \geqslant \left((1 - v_0/2)^{-1/n} - 1\right) \cdot V_n(\Omega_0)\,.$$

Это доказывает лемму, так как $(1 - v_0/2)^{-1/n} - 1 > 0$. $\square$

Из этой леммы немедленно следует, что

$$\mathrm{Sq}(\partial\Omega) \geqslant c \cdot \mathrm{Vol}(\Omega \setminus \Omega')\,,$$

или, что то же самое,

$$\text{(6-3)} \qquad \sigma(\mathbf{R}^n, \rho, \Omega) \leqslant c_1 \cdot \mathrm{Vol}(\Omega)^{-1/n(n-1)} \left(\frac{\mathrm{Vol}(\Omega)}{\mathrm{Vol}(\Omega \setminus \Omega')}\right)^{1/(n-1)}\,,$$

где $c_1 = c^{-1/(n-1)}$ не зависит от $\Omega$. Рассмотрим последовательность областей $\Omega_i \subset \mathbf{R}^n$ $(i \to \infty)$, реализующую асимптотическую изопериметрическую константу, т. е.

$$\mathrm{Vol}(\Omega_i) \to \infty\,, \quad \sigma(\mathbf{R}^n, \rho, \Omega_i) \to \sigma(\mathbf{R}^n, \rho)\,.$$

Из (6-3) и неравенства $\sigma(\mathbf{R}^n, \rho) > 0$ следует, что

$$\frac{\mathrm{Vol}(\Omega_i \setminus \Omega_i')}{\mathrm{Vol}(\Omega_i)} \to 0\,,$$

откуда

$$\frac{V_n(\Omega_i \cap \Omega_i')}{V_n(\Omega_i)} = \frac{\mathrm{Vol}(\Omega_i \cap \Omega_i')}{\mathrm{Vol}(\Omega_i)} \to 1\,.$$

Подставляя это в (6-2) с учетом того, что $V_n(\Omega_i \cap \Omega_i') \leqslant V_n(\Omega_i')$, получаем неравенство

$$\sigma(\mathbf{R}^n, \rho) = \lim \sigma(\mathbf{R}^n, \rho, \Omega_i) \leqslant \varepsilon \cdot (2/v_0)^{1/(n-1)}\,.$$

Поскольку $v_0$ не зависит от $\varepsilon$, отсюда следует, что $\sigma(\mathbf{R}^n, \rho) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Тем самым теорема 6.3 доказана.

## §7. Объемы предельных финслеровых метрик

Целью этого парафа является получение оценки объема финслерова многообразия через объемы сходящихся к нему римановых многообразий. Эта оценка доказывается в третьей части параграфа. Первые две части содержат предварительные сведения и обсуждение связи предельных финслеровых многообразий с периодическими метриками.

### A. Сходимость по Громову–Хаусдорфу.

Пусть $X$ и $Y$ — метрические пространства. Расстоянием по Громову–Хаусдорфу между ними называется величина $d_H(X,Y)$ (неотрицательное число или бесконечность), равная точной нижней грани чисел $r>0$, удовлетворяющих следующему условию: существует метрическое пространство $Z$ и его подпространства $X'$ и $Y'$, изометричные $X$ и $Y$ соответственно, такие, что $X'$ содержится в $r$-окрестности $Y'$, и $Y'$ содержится в $r$-окрестности $X'$.

Расстояние по Громову–Хаусдорфу действительно является расстоянием (удовлетворяет аксиомам метрического пространства) на классе всех метрических компактов, рассматриваемых с точностью до изометричности (см. [28]). Если не ограничиваться компактными $X$ и $Y$, то расстояние может оказаться нулевым, даже если пространства не изометричны (например, между неполным пространством и его пополнением). Расстояние между неограниченными пространствами может оказаться бесконечным.

Последовательность метрических пространств $X_k$ сходится по Громову–Хаусдорфу к метрическому пространству $X$, если $d_H(X,X_k)\to 0$. Это определение неудобно для использования, и в дальнейшем вместо него всюду будет применяться описываемая ниже эквивалентная переформулировка.

Отображение (не обязательно непрерывное) $f\colon X\to Y$ между метрическими пространствами называется хаусдорфовой аппроксимацией погрешности $\varepsilon$, или *$\varepsilon$-аппроксимацией*, где $\varepsilon$ — положительное число, если выполняются два условия:

1) $f(X)$ образует $\varepsilon$-сеть в $Y$,

2) $|\rho(f(x_1),f(x_2))-\rho(x_1,x_2)|\leqslant\varepsilon$ для любых $x_1,x_2\in X$ (здесь $\rho$ обозначает расстояние как в $X$, так и в $Y$).

Если $d_H(X,Y)<\varepsilon$, то существует хаусдорфова аппроксимация $f\colon X\to Y$ погрешности $2\varepsilon$. Для ее построения достаточно отождествить $X$ и $Y$ с подпространствами $Z$, лежащими на расстоянии меньше $\varepsilon$ друг от друга как в определении $d_H$, после чего для каждого $x \in X$ выбрать в качестве $f(x)$ любую точку $y \in Y$ на расстоянии не больше $\varepsilon$. И обратно, если имеется $\varepsilon$-аппроксимация $f\colon X \to Y$, то $d_H(X, Y) \leqslant 2\varepsilon$. Для доказательства достаточно положить в определении расстояния по Громову–Хаусдорфу $Z = X \cup Y$ (считая $X \cap Y = \varnothing$), $X' = X$, $Y' = Y$ и

$$\rho(x, y) = \inf_{z \in X} (\rho(x, z) + \rho(f(z), y) + \varepsilon)$$

для $x \in X$, $y \in Y$.

Отсюда следует, что последовательность метрических пространств $X_k$ сходится по Громову–Хаусдорфу к метрическому пространству $X$ тогда и только тогда, когда существует последовательность хаусдорфовых аппроксимаций $\varphi_k\colon M_k \to M$ с погрешностями $\varepsilon_k \to 0$. В дальнейшем слова "последовательность хаусдорфовых аппроксимаций" всегда будут подразумевать, что погрешность аппроксимаций стремится к нулю.

**Примеры.** 1) Пусть $\{\rho_k\}$ — последовательность метрик на одном и том же множестве $X$, равномерно сходящаяся к метрике $\rho$ на $X$: $\rho_k \rightrightarrows \rho$ (имеется в виду равномерная сходимость метрик как функций на $X \times X$). Тогда $(X, \rho_k)$ сходится к $(X, \rho)$ и по Громову–Хаусдорфу, что проверяется выбором тождественных отображений $X \to X$ в качестве хаусдорфовых аппроксимаций.

2) Пусть метрическое пространство $X$ является многообразием, а пространство $X'$ получено из него вырезанием области $Y \subset X$ и вклеиванием на ее место многообразия $Y'$ с $\partial Y' = \partial Y$ (при этом метрика $X'$ совпадает с метрикой $X$ на их общей части $X \setminus Y = X' \setminus Y'$). Тогда если диаметры $Y$ и $Y'$ меньше $\varepsilon$, то $d_H(X, X') < 2\varepsilon$, поскольку расстояния от $X$ и $X'$ до их общей части не превосходят $\varepsilon$. Уменьшая диаметры вырезаемых и вклеиваемых подмножеств, можно получить таким образом последовательность многообразий, сходящуюся по Громову–Хаусдорфу к $X$, причем топология при предельном переходе может изменяться.

Описанные примеры сходимости удовлетворяют топологическим условиям, накладываемым ниже в §7.B.

Если топология предельного пространства достаточно хорошая, то хаусдорфовы аппроксимации можно сделать непрерывными (возможно, погрешности непрерывных аппроксимаций будут стремиться к нулю медленнее, чем расстояние до предела):

**Предложение 7.1.** *Пусть компакты $(M_k, \rho_k)$ сходятся к компакту $(M, \rho)$. Предположим, что $M$ гомеоморфно окрестностному ретракту евклидова пространства. Тогда последовательность хаусдорфовых аппроксимаций $M_k \to M$ может быть реализована непрерывными отображениями.*

*Доказательство.* Пусть $M$ гомеоморфно вложено в $\mathbf{R}^N$ и является там ретрактом некоторой своей окрестности. Пусть $\varphi_k\colon M_k \to M$ — (разрывные) $\varepsilon_k$-аппроксимации, $\varepsilon_k \to 0$. Для каждого фиксированного номера $k$ выберем в $(M_k, \rho_k)$ конечную $\varepsilon_k$-сеть $\{x_i^k\}$ и построим непрерывную функцию $f_k\colon \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, которая положительна на интервале $[0, 2\varepsilon_k)$ и равна нулю вне его. После этого для каждого $x \in M_k$ определим $\tilde{\varphi}_k(x) \in \mathbf{R}^N$ как центр масс точек $\varphi(x_i^k)$ с весами $f_k(\rho_k(x, x_i^k))$. Построенное отображение $\tilde{\varphi}_k\colon M_k \to \mathbf{R}^N$ непрерывно. Точка $\tilde{\varphi}_k(x)$ лежит в выпуклой оболочке $\varphi$-образов тех точек $x_i^k$, расстояние от которых до $x$ меньше $2\varepsilon_k$, поэтому она близка к $\varphi(x)$. (Расстояние между $\varphi(x)$ и $\tilde{\varphi}(x)$ не превосходит максимального расстояния между $\varphi(x)$ и $\varphi$-образами указанных точек $x_i^k$. Оно равномерно по $x$ стремится к нулю при $\varepsilon_k \to 0$ в силу равномерной непрерывности вложения $M$ в $\mathbf{R}^N$.) При достаточно больших $k$ все значения полученных отображений $\tilde{\varphi}_k$ окажутся лежащими в пределах окрестности, ретрагируемой на $M$. Композиции этих $\tilde{\varphi}_k$ с имеющейся ретракцией дают непрерывные отображения $\bar{\varphi}_k\colon M_k \to M$, отличия которых от $\varphi_k$ по-прежнему стремятся к нулю. Следовательно, эти непрерывные отображения $\bar{\varphi}_k$ образуют последовательность хаусдорфовых аппроксимаций. $\square$

Любое компактное гладкое многообразие может быть вложено в евклидово пространство в виде окрестностного ретракта (например, как гладкое подмногообразие), поэтому оно удовлетворяет условиям предложения 7.1. Далее будет рассматриваться только сходимость по Громову–Хаусдорфу пространств, являющихся компактными гладкими многообразиями (возможно, с краем), и все хаусдорфовы аппроксимации будут предполагаться непрерывными.

### Б. Предельные финслеровы многообразия.

Из теоремы 1.2 о близости периодической метрики к ее предельной норме следует, что пространство $(M, \rho)$ с периодической метрикой находится на конечном расстоянии по Громову–Хаусдорфу от нормированного пространства $(V, \|\cdot\|)$. Действительно, теорема 1.2 утверждает, что выпрямляющее отображение $\varphi\colon (M,\rho) \to (V,\|\cdot\|)$ является хаусдорфовой аппроксимацией с конечной погрешностью. Далее это утверждение можно переформулировать следующим образом: последовательность гомотетичных метрических пространств $(M,\lambda\rho)$ при $\lambda \to 0$ сходится по Громову–Хаусдорфу к пространству $(V,\|\cdot\|)$ (в качестве хаусдорфовых аппроксимаций здесь можно выбирать отображения $\lambda\varphi\colon M \to V$). В случае, когда $(M,\rho)$ — универсальное накрывающее тора, эта сходимость сводится к равномерной сходимости метрик.

Эта сходимость является частным случаем сходимости последовательности римановых многообразий к финслерову. Финслерова структура на гладком многообразии $M$ — это семейство норм $\{\|\cdot\|_x\}$ на слоях $T_xM$ его касательного пространства, образующее в совокупности непрерывную функцию $TM \to \mathbf{R}$ (никаких условий типа гладкости или строгой выпуклости на финслерову метрику накладываться не будет). Значения этой функции интерпретируются как длины касательных векторов, и это определяет длины гладких кривых и расстояния между точками $M$ так же, как риманова структура определяет расстояния римановой метрики. Римановы многообразия являются частным случаем финслеровых и выделяются среди них тем, что все нормы $\|\cdot\|_x$ являются евклидовыми. Всякое нормированное пространство $(V,\|\cdot\|)$ является финслеровым многообразием, в котором для $\|\cdot\|_x = \|\cdot\|$ всех $x \in V$ (при естественном отождествлении $T_xV = V$).

Любую финслерову метрику можно получить как предел последовательности римановых метрик на том же многообразии (в смысле равномерной сходимости функций расстояния). Более того, некоторая модификация понятия периодической метрики приводит к специальному классу последовательностей “квазипериодических” римановых метрик на гладком многообразии, для которых предельными метриками являются всевозможные финслеровы метрики, и только они (см. [16]). В малой окрестности точки, где финслерова метрика близка к метрике нормированного пространства, она соотносится с приближающими ее квазипериодическими метриками примерно так же, как предельная норма периодической метрики в $\mathbf{R}^n$ — с самой метрикой. Рассмотрению периодических метрик на пространствах с различной топологией (не только с топологией векторного пространства) соответствует использование сходимости по Громову–Хаусдорфу вместо равномерной сходимости римановых метрик к финслеровой.

Оценка асимптотического объема (5-1) может быть переформулирована в терминах такой сходимости. Если $(M, \rho)$ — периодическая метрика, то последовательность пространств $(M, \lambda\rho)$ сходится при $\lambda \to 0$ к нормированному пространству $(V, \|\cdot\|)$. В частности, единичные шары $B_\lambda$ в пространствах $(M, \lambda\rho)$ с центром в фиксированной точке $x \in M$ (которые соответствуют шарам радиусов $1/\lambda$ в исходном пространстве), сходятся к единичному шару $D$ пространства $(V, \|\cdot\|)$. Объемы этих шаров в обозначениях §5 выражаются формулой

$$\mathrm{Vol}(B_\lambda, \lambda\rho) = \lambda^n \, \mathrm{Vol}(\mathrm{Ball}_x(1/\lambda), \rho)\,,$$

так что неравенство (5-1) можно переписать в виде:

$$\lim \mathrm{Vol}(B_\lambda, \lambda\rho) \geqslant \omega_n\,,$$

где правую часть можно интерпретировать как объем единичного шара в любом $n$-мерном нормированном пространстве, т. е. $\omega_n = \mathrm{Vol}(D, \|\cdot\|)$.

В этом параграфе это неравенство (при соответствующих топологических ограничениях) будет обобщаться на более общую ситуацию, когда имеется последовательность римановых многообразий $(M_k, \rho_k)$ одинаковой размерности, сходящаяся в метрике Громова–Хаусдорфа к некоторому финслерову многообразию $(M, \rho)$ той же размерности. (Таким образом, $(M, \rho)$ теперь обозначает совсем не то, что раньше.) Все многообразия предполагаются компактными.

Объем на $n$-мерном финслеровом многообразии определяется как $n$-мерная мера Хаусдорфа, нормируемая так, что для римановых многообразий получается стандартный риманов объем. При таком определении объем единичного шара оказывается одинаковым для всех нормированных пространств (и равным $\omega_n$ — объему единичного шара в евклидовом пространстве). Более того, если на одном и том же многообразии заданы две финслеровы структуры $\{\|\cdot\|_x\}$ и $\{\|\cdot\|'_x\}$, то плотность меры объема второй по мере объема первой в точке $x$ равна, как и в римановом случае, отношению лебеговых объемов единичных шаров норм $\|\cdot\|_x$ и $\|\cdot\|'_x$ (см. [20]).

На самом деле все дальнейшее не зависит от определения объема финслерова многообразия, требуется лишь монотонная зависимость его от метрики и совпадение с римановым объемом для римановых метрик.

**B. Оценка объема предельного многообразия.**

Пусть $M$ и $M'$ — компактные гладкие многообразия (возможно, с краем), или открытые внутренние подмножества таких многообразий, имеющие одинаковую размерность $n$. Будем говорить, что непрерывное отображение $\varphi\colon M \to M'$ имеет ненулевую степень, если $\varphi(\partial M) \subset \partial M'$ и и $\varphi$ индуцирует ненулевой гомоморфизм $\varphi_*\colon H_n(M, \partial M) \to H_n(M', \partial M')$ в старших гомологиях над какой-нибудь группой коэффициентов (имеет смысл брать гомологии над $\mathbf{Z}$ для ориентируемых и над $\mathbf{Z}_2$ — для неориентируемых многообразий). Это гомологическое условие будет играть здесь ту же роль, что и в §5, главным образом, от такого $\varphi$ потребуется сюръективность всех достаточно близких к нему отображений. Кроме этого, будет использоваться локальность степени: если $\varphi\colon M \to M'$ имеет ненулевую степень и $U$ — внутренняя область в $M'$, то сужение $\varphi$ на $\varphi^{-1}(U)$ имеет ненулевую степень как отображение в $U$ (см. [6]).

**Теорема 7.2.** *Пусть $(M_k, \rho_k)$ — последовательность римановых многообразий одинаковой размерности $n$, сходящаяся по Громову–Хаусдорфу к финслерову многообразию $(M, \rho)$ той же размерности, причем существует последовательность хаусдорфовых аппроксимаций $\varphi_k\colon M_k \to M$ ненулевой степени. Тогда*

$$\mathrm{Vol}(M, \rho) \leqslant \liminf_{k\to\infty} \mathrm{Vol}(M_k, \rho_k)\,, \tag{7-1}$$

*причем в случае равенства $\rho$ является римановой метрикой класса $C^0$.*

*Замечание.* Ясно, что в формулировке теоремы достаточно потребовать, чтобы хаусдорфовы аппроксимации $\varphi_k$ имели ненулевые степени лишь начиная с некоторого $k$, поскольку ее заключение позволяет отбрасывать любое конечное число членов последовательности.

*Доказательство теоремы 7.2.* Теорема доказывается с помощью тех же методов, что и теорема 5.2 (эти методы применяются к малым областям многообразия $M$, в которых финслерова метрика близка к метрике нормированного пространства). Вместо функций типа Буземана будут использоваться дистанционные функции специально выбираемых точек.

Зафиксируем малое $\varepsilon > 0$ (далее предполагается, что $\varepsilon < 1/4n^2$) и внутреннюю точку $x_0 \in M$. Посредством некоторой карты отождествим окрестность точки $x_0$ с $n$-мерным векторным пространством $V$, так, чтобы сама $x_0$ соответствовала началу отсчета в $V$. Превратим $V$ в нормированное пространство, зафиксировав в нем норму $\|\cdot\| = \|\cdot\|_0$, где $\|\cdot\|_0$ — сужение финслеровой структуры на $T_0V \cong V$. Пусть $D$ — единичный шар нормы $\|\cdot\|$. Найдем разложение $Q = \sum a_i L_i^2$ ($i = 1, \ldots, N$) квадратичной формы его вписанного эллипсоида как в теореме 3.1. Обозначим через $\langle\,,\rangle$ и $|\cdot|$ соответственно скалярное произведение и евклидову норму на $V$, определяемые формой $Q$. Как и в доказательстве теоремы 5.2, определим линейное вложение $L\colon V \to \mathbf{R}^N$ формулой

$$L(x) = (\sqrt{a_1}L_1(x), \ldots, \sqrt{a_N}L_N(x))\,.$$

Оно переводит норму $|\cdot|$, заданную на $V$, в индуцированную из $\mathbf{R}^N$ евклидову норму подпространства $L(V) \subset \mathbf{R}^N$. Далее, для каждого $i \leqslant N$ эллипсоид $\mathrm{Ball}_Q$, поверхность $F = \partial D$ и гиперплоскость $L_i^{-1}(1)$ соприкасаются в некоторой точке $p_i$ (см. теорему 3.1), так что $L_i = \langle p_i, \cdot\rangle$ и $L_i(p_i) = |p_i| = \|p_i\| = 1$.

Ближайшей целью является построение дистанционных функций, которые близки к функциям $L_i$ в малой окрестности нуля. Ими оказываются, после изменения на подходящую константу, функции расстояний до точек, пропорциональных $p_i$. Для близкой к нулю точки $x$ в евклидовом пространстве $(V, |\cdot|)$ из формулы Тейлора для функции расстояния до $p_i$ имеем разложение

$$|p_i - x| = 1 - \langle p_i, x\rangle + o(\|x\|) = 1 - L_i(x) + o(\|x\|)\,.$$

Поскольку $L_i \leqslant \|\cdot\| \leqslant |\cdot|$ и $L_i(p_i - x) = 1 - L_i(x)$, из него следует, что

$$\|p_i - x\| = 1 - L_i(x) + o(\|x\|)\,.$$

Следовательно, существует столь большое $R > 1$, что при $\|x\| \leqslant 1/R$

$$\bigl|1 - \|p_i - x\| - L_i(x)\bigr| < \varepsilon\|x\| \leqslant \varepsilon/R\,, \qquad i = 1, \ldots, N\,,$$

или, что то же самое, при $\|x\| \leqslant 1$ (т. е. для всех $x \in D$)

$$\bigl|R - \|Rp_i - x\| - L_i(x)\bigr| < \varepsilon\,, \qquad i = 1, \ldots, N\,.$$

Так как финслерова структура непрерывна, $\rho(x,y)/\|x-y\| \to 1$ при $x, y \to 0$ в $V$. Пользуясь этим, выберем настолько малое $\delta > 0$, что

$$\bigl|\rho(x,y) - \|x-y\|\bigr| < \frac{\varepsilon}{2R}\cdot\|x-y\| \qquad \text{при } \|x\|, \|y\| \leqslant R\delta\,.$$

Рассмотрим в пространстве $V$ выпуклые области

$$U = \{x : \|x\| < \delta\} \quad \text{и} \quad U_1 = \{x : \|x\| < R\delta\}$$

(они соответствуют окрестностям точки $x_0$ в многообразии $M$).

Пусть $(M', \rho')$ — риманово многообразие, $\varphi\colon M' \to M$ — хаусдорфова аппроксимация с погрешностью меньше $\delta\varepsilon$, имеющая ненулевую степень (в частности, $\varphi$ сюръективно). Отображение $\varphi$, суженное на $\varphi^{-1}(U_1)$, является $(2\delta\varepsilon)$-аппроксимацией пространства $(U_1, \|\cdot\|)$ в силу близости $\rho$ и $\|\cdot\|$ на $U_1$ (т. е. по выбору $\delta$). Для каждого $i \leqslant N$ найдем точку $q_i \in M'$, для которой $\varphi(q_i) = R\delta p_i$ и определим $f_i(x) = R\delta - \rho'(x, q_i)$ для каждого $x \in M'$. По выбору $R$, имеем оценку

$$\bigl|f_i(x) - L_i(\varphi(x))\bigr| \leqslant 2\delta\varepsilon + \bigl|R\delta - \|R\delta p_i - \varphi(x)\| - L_i(x)\bigr| \leqslant 3\delta\varepsilon$$

для всех $x \in \varphi^{-1}(U)$. Определим $f\colon M' \to L(V) \subset \mathbf{R}^N$ формулой

$$f(x) = \mathrm{pr}(\sqrt{a_1} f_1(x), \dots, \sqrt{a_N} f_N(x))\,,$$

где pr — ортогональная проекция $\mathbf{R}^N$ на $L(V)$. Из предыдущей оценки получаем, что $|f - L \circ \varphi| \leqslant 3n\delta\varepsilon$ на $\varphi^{-1}(U)$. Поскольку все значения $f$ лежат в $L(V)$, и $L$ — изометрическое вложение $(V, |\cdot|)$ в $\mathbf{R}^N$, отсюда следует, что $|L^{-1} \circ f - \varphi| \leqslant 3n\delta\varepsilon$ на $\varphi^{-1}(U)$. Значит, при прямолинейной гомотопии отображений $L^{-1} \circ f$ и $\varphi$, заданных на $\varphi^{-1}(U_1)$, граница $\varphi^{-1}(U)$ не задевает множества $(1 - 3n\varepsilon)U$, расстояние от которого до $\partial U$ в $(V, \|\cdot\|)$, а значит, и в $(V, |\cdot|)$, не меньше $3n\delta\varepsilon$. Поскольку $\varphi$ является отображением ненулевой степени из $\varphi^{-1}(U)$ в $U$, отсюда следует, что

$$L^{-1} \circ f(\varphi^{-1}(U)) \supset (1 - 3n\varepsilon)U\,.$$

По лемме 5.3, отображение $f$ не увеличивает объем, следовательно,

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(\varphi^{-1}(U), \rho') &\geqslant \mathrm{Vol}(f(\varphi^{-1}(U))) = \\ &= \mathrm{Vol}(L^{-1} \circ f(\varphi^{-1}(U)), |\cdot|) \geqslant \\ &\geqslant (1 - 3n\varepsilon)^n\, \mathrm{Vol}(U, |\cdot|)\,.\end{aligned}$$

Пользуясь тем, что $|\cdot| \geqslant \|\cdot\|$, выводим отсюда оценку

$$\mathrm{Vol}(\varphi^{-1}(U), \rho') \geqslant (1 - 3n\varepsilon)^n\, \mathrm{Vol}(U, \|\cdot\|)\,. \tag{7-2}$$

Заметим, что это неравенство можно усилить, добавив в правую часть множитель, равный коэффициенту пропорциональности между формой объема нормы $|\cdot|$ и формой объема нормы $\|\cdot\|$. Этот коэффициент равен отношению объемов тел $D$ и $\mathrm{Ball}_Q$, так что он строго больше единицы, если норма $\|\cdot\|$ не является евклидовой.

Поскольку в пределах $U$ отношение расстояний в метрике $\rho$ к расстояниям в норме $\|\cdot\|$ не превосходит $1+\varepsilon$, имеем

$$\mathrm{Vol}(U, \|\cdot\|) \geqslant (1+\varepsilon)^{-n}\,\mathrm{Vol}(U, \rho)\,.$$

Отсюда и из (7-2) следует, что

$$\mathrm{Vol}(\varphi^{-1}(U), \rho') \geqslant (1-C\varepsilon)\,\mathrm{Vol}(U, \rho)\,.$$

где $C = 4n^2$. Подставляя сюда вместо $\varphi$ хаусдорфовы аппроксимации $\varphi_k\colon M_k \to M$ из условия теоремы (для достаточно больших $k$), получаем, что

$$\liminf_{k\to\infty} \mathrm{Vol}(\varphi_k^{-1}(U), \rho_k) \geqslant (1-C\varepsilon)\,\mathrm{Vol}(U, \rho)\,, \tag{7-3}$$

для некоторой (произвольно малой) окрестности $U$ данной точки $x_0 \in M$, близкой к шару метрики $\rho$. Системой таких окрестностей можно без перекрытий заполнить все многообразие $M$ с точностью до множества сколь угодно малого объема, следовательно,

$$\liminf_{k\to\infty} \mathrm{Vol}(M_k, \rho_k) \geqslant (1-C\varepsilon)\,\mathrm{Vol}(M, \rho)\,.$$

В силу произвольности $\varepsilon$, отсюда следует доказываемое неравенство (7-1).

Докажем теперь, что в случае равенства в (7-1) метрика $\rho$ является римановой. Если она не является римановой, то в некоторой области нормы $\|\cdot\|_x$ не являются евклидовыми. Выберем в этой области подобласть $\Omega$ (достаточно взять внутренность любого компактного подмножества), в которой отношение объемов шаров норм $\|\cdot\|_x$ и их вписанных эллипсоидов отделено от 1, т. е. всюду не меньше $1+c$ для некоторого $c > 0$. Замечание после формулы (7-2) показывает, что неравенство (7-3) при $U \subset \Omega$ может быть усилено множителем $1+c$ (не зависящим от $\varepsilon$) в правой части. Значит, в итоговом неравенстве (7-1) можно добавить в левую часть величину $c\cdot\mathrm{Vol}(\Omega, \rho) > 0$, так что равенство в нем заведомо не достигается. $\square$

Равномерная сходимость метрик на одном и том же пространстве является частным случаем сходимости по Громову–Хаусдорфу, причем хаусдорфовы аппроксимации (тождественные отображения) автоматически имеют ненулевые степени. Поэтому из теоремы 7.2 вытекает, в частности, следующее утверждение.

**Следствие 7.3.** *Пусть $\rho_k$ — последовательность римановых метрик на одном и том же многообразии $M$, и $\rho_k$ равномерно сходятся к финслеровой метрике $\rho$. Тогда*

$$\mathrm{Vol}(M, \rho) \leqslant \liminf_{k\to\infty} \mathrm{Vol}(M, \rho_k)\,,$$

*причем в случае равенства $\rho$ является римановой метрикой класса $C^0$.*

*Замечания.* 1) Как видно из доказательства теоремы 7.2, левую часть (7-1) можно увеличить, заменив ее на объем $M$ относительно римановой метрики, образованной вписанными квадратичными формами $Q_x$ норм $\|\cdot\|_x$ на $T_xM$ (ср. с замечанием в конце §5). Было бы интересно выяснить, каково наибольшее возможное значение левой части (7-1) (или неравенства в следствии 7.3) для данного финслерова многообразия $(M, \rho)$.

2) Представляется возможным, что неравенство (7-1) выполняется и в случае сходимости финслеровых многообразий $(M_k, \rho_k)$. Описанный метод позволяет получить для финслеровых $(M_k, \rho_k)$ лишь аналогичное неравенство с некоторым множителем, зависящим от размерности (см. последнее замечание в конце §3).

3) Условие на степени аппроксимаций в теореме 7.2 является легко проверяемым для конкретных примеров, но для общих формулировок выглядит несколько обременительным. Представляет интерес возможность замены его другими требованиями, которые относились бы к самим сходящимся многообразиям, а не к "процессу сходимости". Имеется следующий метрический критерий, обеспечивающий гомотопическую эквивалентность сходящихся многообразий и их предела: если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что любой шар радиуса $\delta$ в любом из пространств $(M_k, \rho_k)$ стягиваем в шаре радиуса $\varepsilon$, то, начиная с некоторого $k$, все пространства $M_k$ гомотопически эквивалентны $M$, причем гомотопические эквивалентности реализуются хаусдорфовыми аппроксимациями (см. [30], [39]). Для многообразий без края всякая гомотопическая эквивалентность имеет нену-

левую степень (поскольку индуцирует изоморфизм всех групп гомологий), поэтому для них сформулированное выше требование равномерной локальной стягиваемости может заменять условие на степени в теореме 7.2. Такое требование, однако, является слишком сильным, например, ему не удовлетворяют многообразия из второго примера в §7.А.

В следующем параграфе будут рассматриваться топологические условия, обеспечивающие ненулевые степени аппроксимаций.

## §8. Топология сходимости по Громову–Хаусдорфу

В этом параграфе исследуются гомотопические свойства хаусдорфовых аппроксимаций при сходимости внутренних метрик на компактных многообразиях. Внутренняя метрика — это метрика, в которой расстояние между любыми двумя точками есть точная нижняя грань длин соединяющих их кривых. В компактном пространстве эта нижняя грань всегда достигается, т. е. любые две точки соединимы кратчайшей (см. [28]). Все римановы и финслеровы метрики являются внутренними.

Главной целью параграфа является исследование возможности замены в теореме 7.2 требования ненулевой степени аппроксимаций ограничениями на топологические типы самих сходящихся многообразий $M_k$. Это удается сделать лишь в размерности 2 (теорема 8.3), а в старших размерностях, напротив, имеются неожиданные примеры (теорема 8.6) сходимости пространств с топологией сферы, для которых не выполняется заключение теоремы 7.2.

### А. Подъем кривых с предельного пространства.

В этой части параграфа описываются некоторые конструкции, используемые далее в §7.Б.

Пусть $(M_k, \rho_k)$ — компакты с внутренними метриками, сходящиеся к компакту $(M, \rho)$ (при этом метрика $\rho$ с необходимостью оказывается тоже внутренней, см. [28]). Пусть зафиксированы непрерывные хаусдорфовы аппроксимации $\varphi_k \colon M_k \to M$ с погрешностями $\varepsilon_k \to 0$.

Будем говорить, что точка $\bar{x} \in M_k$ является $\varepsilon$-поднятием точки $x \in M$, где $\varepsilon > 0$, если $\rho(\varphi_k(\bar{x}), x) < \varepsilon$. Поскольку $\varphi_k$ является $\varepsilon_k$-аппроксимацией, любая точка $x \in M$ имеет $\varepsilon_k$-поднятие в $M_k$. Кривую $\bar{\gamma} \colon [a, b] \to M_k$ будем называть $\varepsilon$-поднятием кривой $\gamma \colon [a, b] \to M$, если для любого $t \in [a, b]$ точка $\bar{\gamma}(t)$ является $\varepsilon$-поднятием точки $\gamma(t)$.

**Предложение 8.1.** *Пусть* $\gamma\colon [a,b] \to M$ *— произвольная кривая, точки* $p$ *и* $q$ *в* $M_k$ *являются* $\varepsilon_k$*-поднятиями ее концов* $\gamma(a)$ *и* $\gamma(b)$*. Тогда в* $M_k$ *существует кривая, соединяющая* $p$ *и* $q$ *и являющаяся* $(6\varepsilon_k)$*-поднятием* $\gamma$*.*

*Доказательство.* Рассмотрим кривую $\gamma\colon [a,b] \to M$. Разобьем интервал $[a,b]$ точками $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ так, чтобы диаметры всех участков $\gamma([t_i, t_{i+1}])$ были меньше $\varepsilon_k$. Для каждого $i = 0, \dots, n$ выберем в качестве $\bar\gamma(t_i)$ какое-нибудь $\varepsilon_k$-поднятие точки $\gamma(t_i)$, причем для $i = 0$ и $i = n$ возьмем точки $p$ и $q$. На каждом интервале $[t_i, t_{i+1}]$ определим $\bar\gamma$ как кратчайшую между $\bar\gamma(t_i)$ и $\bar\gamma(t_{i+1})$. Поскольку метрика на $M_k$ — внутренняя, длина каждого участка $\bar\gamma([t_i, t_{i+1}])$ равна $\rho_k(\bar\gamma(t_i), \bar\gamma(t_{i+1})) < 3\varepsilon_k$. Значит, для любого $t \in [t_i, t_{i+1}]$ имеем оценку $\rho_k(\bar\gamma(t), \bar\gamma(t_i)) \leqslant 3\varepsilon$, откуда

$$\rho(\varphi_k(\bar\gamma(t)), \gamma(t)) \leqslant \rho_k(\bar\gamma(t), \bar\gamma(t_i)) + 2\varepsilon_k + \rho(\gamma(t_i), \gamma(t)) < 6\varepsilon_k\,,$$

что и требовалось. $\square$

Существование поднятий имеет следующее простое следствие: если $M$ локально односвязно, то, начиная с некоторого номера $k$, хаусдорфовы аппроксимации $\varphi_k$ индуцируют сюръективные гомоморфизмы фундаментальных групп. Действительно, в силу локальной односвязности и компактности $M$, существует такое $\varepsilon > 0$, что любые две петли в $M$, лежащие на расстоянии меньше $\varepsilon$, гомотопны. Для достаточно больших $k$ имеем $\varepsilon_k < \varepsilon/6$. Согласно предложению 8.1, для таких $k$ любая петля в $M$ близка с точностью до $\varepsilon$ (и следовательно, гомотопна) $\varphi_k$-образу некоторой петли из $M_k$. Следовательно, любой класс гомотопных петель содержит $\varphi_k$-образ петли из $M_k$.

Это следствие ограничивает возможные топологические типы пространства $M$ при известной топологии всех $M_k$: для достаточно больших $k$ фундаментальные группы $\pi_1(M_k)$ должны допускать сюръективные гомоморфизмы на $\pi_1(M)$. В частности, последовательность односвязных пространств с внутренней метрикой не может иметь пределом неодносвязное пространство. Из дальнейших рассмотрений будут получаться более тонкие запреты подобного рода.

**Лемма 8.2.** *Предположим, что все* $M_k$ *являются многообразиями размерности не меньше 2. Пусть* $\Gamma$ *— граф, вложенный в* $M$*. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *при достаточно большом* $k$ *можно построить вложение* $\Gamma$ *в* $M_k$*, такое, что образ каждого ребра* $\Gamma$ *в* $M_k$ *является* $\varepsilon$*-поднятием соответствующего ребра* $\Gamma$ *в* $M$*.*

*При этом если $\varepsilon$ достаточно мало, то такое вложение может быть продолжено с произвольного $(\varepsilon/5)$-поднятия всех вершин* $\Gamma$.

Эта лемма усиливает предложение 8.1 добавлением требования о вложении, т. е. о том, что поднятия кривых, образующих $\Gamma \subset M$, должны быть несамопересекающимися и не пересекающими друг друга. (Конечно, такое усиление использует имеющееся предположение о $M_k$.) Номер $k$, начиная с которого осуществимо такое поднятие, может зависеть от $\Gamma$.

*Доказательство.* Для начала построим несамопересекающееся поднятие отдельной (незамкнутой и несамопересекающейся) кривой $\gamma$ при заданном поднятии ее концов. Возьмем произвольное $(6\varepsilon_k)$-поднятие $\bar{\gamma}$ из предложения 8.1. Рассмотрим всевозможные замкнутые участки $\bar{\gamma}$ (т. е. интервалы области параметров, на которых сужение $\bar{\gamma}$ является замкнутой кривой). Объединение вложенных замкнутых участков (с добавленными концами) тоже является замкнутым участком. Поэтому каждый такой участок содержится в некотором максимальном. Заменим прохождение каждого максимального участка кривой $\bar{\gamma}$ стоянием в одной точке. Полученная несамопересекающаяся кривая является $\delta_k$-поднятием $\gamma$, где $\delta_k$ — это сумма величины $6\varepsilon_k$ и максимально возможного диаметра интервала кривой $\gamma$, расстояние между концами которого не превосходит $12\varepsilon_k$. Поскольку $\gamma$ — несамопересекающаяся кривая и $\varepsilon_k \to 0$, имеем $\delta_k \to 0$. Наличие постоянных участков у построенного поднятия можно устранить сколь угодно малым изменением параметризации.

Будем считать, что $\varepsilon$ по крайней мере в три раза меньше всех расстояний между вершинами графа $\Gamma$. Для каждой вершины $\Gamma$ выберем какое-нибудь $(\varepsilon/5)$-поднятие. Из каждого ребра $\Gamma$ временно удалим начальный и конечный интервал, имеющие диаметры меньше $\varepsilon/5$. Оставшиеся части ребер отделены друг от друга некоторым расстоянием $\delta > 0$. При достаточно большом $k$ для них можно построить несамопересекающиеся $(\delta/3)$-поднятия, как описано выше. Эти поднятия не пересекаются друг с другом (так как их образы не пересекаются). Назовем концы поднятий отмеченными точками. Можно считать, что $\delta < \varepsilon/5$, тогда каждая отмеченная точка лежит в $(\varepsilon/2)$-окрестности поднятия соответствующей вершины $\Gamma$. Поскольку каждая из этих $(\varepsilon/2)$-окрестностей представляет собой связное (некомпактное) многообразие размерности не меньше 2, лежащие в ней отмеченные точки можно соединить с ее центром набором непересекающихся кривых.

Эти кривые служат поднятиями начальных интервалов ребер графа, а вся конструкция образует вложение $\Gamma$ в $M_k$. $\square$

**Б. Сходимость двумерных многообразий.**

Пусть, в обозначениях предыдущего раздела, $(M_k, \rho_k)$ являются двумерными многообразиями (возможно, с краем). Топологический тип такого $M_k$ определяется его ориентируемостью, родом и числом компонент края. Род многообразия $M_k$ (число ручек для сферы с ручками или число пленок для сферы с пленками) будет обозначаться через $g(M_k)$. Общая постановка рассматриваемого здесь вопроса такова: если известны топологические типы всех $M_k$, определить, каким может быть топологический тип предельного пространства $M$, и как при этом устроены хаусдорфовы аппроксимации. На этот вопрос удается полностью ответить в случае, когда $M$ — тоже двумерное многообразия.

Нетрудно убедиться, что любой компакт с внутренней метрикой можно приблизить двумерными многообразиями — например, следующим способом. Сначала приблизим данное пространство $M$ одномерным клеточным пространством (графом); в качестве такого графа можно взять подходящую сетку из кратчайших. (Выберем конечную $\varepsilon$-сеть в $M$, соединим ее точки попарно кратчайшими, каждую кратчайшую разобьем дополнительными точками на интервалы длины меньше $\varepsilon$, и каждую дополнительную точку соединим кратчайшей с ближайшей к ней точкой исходной $\varepsilon$-сети. Вложение в $M$ полученного графа, снабженного индуцированной внутренней метрикой, является $(4\varepsilon)$-аппроксимацией.) Этот граф, в свою очередь, можно приблизить двумерной поверхностью (ориентируемой и без края), вложив его в $\mathbf{R}^3$ и взяв там сглаженную границу его трубчатой окрестности. (Кстати, при этом метрика оказывается римановой, а ее объем — сколь угодно малым.) Однако, существенной особенностью такого способа является неограниченное возрастание рода многообразия при приближении к предельному пространству.

Род и число компонент края сходящихся двумерных многообразий можно произвольно увеличивать, приклеивая очень маленькие ручки или пленки и проделывая очень маленькие дыры (см. §7.А). Таким образом, на любой последовательности двумерных многообразий $M_k$ с $g(M_k) \to \infty$ можно задать римановы метрики $\rho_k$ так, чтобы получить в пределе любой наперед заданный компакт с внутренней метрикой. Это показывает, что сформулированный выше вопрос о топологии предельного пространства является содержательным лишь при условии, что числа $g(M_k)$ ограничены сверху.

При таких ограничениях на предельное пространство уже имеются некоторые ограничения. Например, из леммы 8.2 следует, что предел двумерных многообразий с ограниченным родом не может содержать подмножеств, гомеоморфных $\mathbf{R}^3$. Действительно, в такое подмножество можно вложить полный граф со сколь угодно большим числом вершин, а для двумерных многообразий ограниченного рода это невозможно.

Дальнейшее посвящено случаю, когда $M$ тоже является двумерным многообразием (возможно, с краем). Близкие к данному $M$ многообразия можно получать небольшими изменениями метрики, приклеиванием маленьких ручек или пленок и вырезанием маленьких дыр. Следующая теорема показывает, что при ограничении сверху на $g(M_k)$ этот способ является, по существу, единственным.

**Теорема 8.3.** *Пусть двумерные многообразия $(M_k, \rho_k)$ сходятся к двумерному многообразию $(M, \rho)$, и $g := \sup g(M_k) < \infty$. Тогда существует последовательность хаусдорфовых аппроксимаций $M_k \to M$, которые, начиная с некоторого $k$, устроены следующим образом:*

1) *Имеется несколько, но не более чем $g$, областей в $M_k$ ненулевого рода, каждая из которых ограничена замкнутой кривой и отображается аппроксимацией в одну точку.*

2) *Имеется несколько компонент края $M_k$, отображающихся в точки.*

3) *На остальной части $M_k$ аппроксимация является гомеоморфизмом на дополнение упомянутых точек в $M$.*

*Доказательство.* Достаточно проверить, что для произвольного $\varepsilon > 0$ для всех достаточно больших $k$ существуют $\varepsilon$-аппроксимации с указанными свойствами. Искомые $\varepsilon$-аппроксимации будут получены варьированием имеющихся аппроксимаций $\varphi_k \colon M_k \to M$.

При заданной триангуляции $M$ будем называть *диском* любое подмножество $M$, гомеоморфное кругу, составленное из целых треугольников и либо не пересекающее $\partial M$, либо пересекающее по связному интервалу. (Последнее условие гарантирует, что дополнение диска связно.) Построим настолько мелкую триангуляцию, что любые $g$ ее треугольников можно вложить вместе с окрестностями в объединение нескольких непересекающихся дисков, диаметры которых не превосходят $\varepsilon/5$. Будем называть *многоугольником* любое подмножество $M$, получаемое объединением нескольких треугольников, ребер и вершин триангуляции. Пусть $\delta_0$ — минимально возможное расстояние между двумя непересекающимися многоугольниками. Для каждого многоугольника $X \subset M$ построим окрестность $V(X)$ со следующими свойствами:

1) $V(X)$ содержится в $(\delta_0/3)$-окрестности $X$.

2) Если $M \setminus X$ связно, то и $M \setminus V(X)$ связно.

Окрестность $V(X)$ можно получить, отступив от $X$ на достаточно малое фиксированное расстояние в полиэдральной метрике, в которой каждый треугольник триангуляции изометричен правильному треугольнику на плоскости. Из первого условия следует, что окрестности непересекающихся многоугольников отделены друг от друга.

Выберем такое $\delta > 0$, что для любого многоугольника $X \subset M$ расстояние между $X$ и $M \setminus V(X)$ больше $100\delta$. Для достаточно большого $k$ с помощью леммы 8.2 построим гомеоморфное $\delta$-поднятие одномерного остова триангуляции в $M_k$. При этом потребуем, чтобы поднятия внутренних точек $M$ были внутренними точками $M_k$, а поднятие каждой компоненты $\partial M$ целиком лежало либо в $\partial M_k$, либо в $M_k \setminus \partial M_k$ (этого всегда можно достичь малым шевелением поднятия). Компоненты $\partial M$, поднятие которых лежит в $\partial M_k$, будем называть *хорошо поднятыми*, а остальные — *плохо поднятыми*. Можно считать, что погрешность аппроксимации $\varphi = \varphi_k$ не превосходит $\delta/10$.

Будем называть треугольник $T$ из состава триангуляции *регулярным*, если поднятие его границы в $M_k$ ограничивает область $\tilde{T}$ рода ноль (т. е. гомеоморфную кругу, возможно, с дырами), и при этом $\varphi(\tilde{T}) \subset V(T)$. Такую область $\tilde{T}$ будем называть поднятием регулярного треугольника $T$. Докажем, что среди любых $g+1$ попарно непересекающихся треугольников имеется хотя бы один регулярный. Для начала отметим следующее общее соображение. Пусть $\delta > 0$, $\varphi\colon M_k \to M$ — $(\delta/10)$-аппроксимация, $U \subset M$ — связная область и задан набор кривых $\{\bar{\gamma}_i\}$ в $M_k$, $\varphi$-образы которых лежат на расстоянии больше $\delta$ от $U$. Тогда все, кроме самое большее одной, компоненты связности дополнения этих кривых отображаются в $M \setminus U$. Действительно, пусть $x, y \in M_k$ таковы, что $\varphi(x) \in U$ и $\varphi(y) \in U$. Соединим $x$ и $y$ $\delta$-поднятием кривой, соединяющей $\varphi(x)$ с $\varphi(y)$ в $U$. Это поднятие не может пересекать кривых $\{\bar{\gamma}_i\}$, поэтому $x$ и $y$ лежат в одной компоненте.

Пусть $T_1, \ldots, T_{g+1}$ — попарно непересекающиеся треугольники триангуляции. По выбору окрестностей $V(T_i)$, их дополнение $U =$

$M \setminus \bigcup V(T_i)$ связно. Рассмотрим петли $\bar{\gamma}_i$ в $M_k$, образованные поднятиями границ треугольников $T_i$. Поскольку их количество превосходит $g(M_k)$, они должны разбивать $M_k$ по крайней мере на две области. Будем называть малыми те области, образы которых лежат в $M \setminus U$ (таковы все области, кроме одной). В силу связности, каждая малая область целиком отображается в одну из окрестностей $V(T_i)$, в частности, она ограничена одной кривой $\bar{\gamma}_i$. Пусть всего имеется $r$ малых областей. Их дополнение в $M_k$ не разбивается $g+1-r$ петлями, поэтому его род не меньше $g+1-r$. Значит, сумма родов малых областей не превосходит $r-1$, так что род одной из них равен нулю. Соответствующий ей треугольник регулярен.

Рассмотрим максимальный набор попарно непересекающихся нерегулярных треугольников и поместим их вместе с окрестностями в набор непересекающихся дисков с диаметрами не больше $\varepsilon/5$ (число дисков тоже не превосходит $g$). Эти диски содержат все треугольники, примыкающие к треугольникам максимального набора, а значит, вообще все нерегулярные треугольники. Обозначим через $P_1, \dots, P_m$ те из построенных дисков, которые не примыкают к плохо поднятым компонентам $\partial M$. Каждую плохо поднятую компоненту $\partial M$ объединим с прилегающими к ней дисками (из числа построенных), и полученные многоугольники обозначим через $P_{m+1}, \dots, P_n$. Для каждого $i \leqslant n$ обозначим через $\gamma_i$ границу $P_i$ в $M$. Эта граница представляет собой кривую (замкнутую или соединяющую две точки $\partial M$), и в случае $i > m$ она обходит соответствующую компоненту края, иногда удаляясь от нее (чтобы охватить примыкающий диск), но не дальше чем на $\varepsilon/2$.

Обозначим через $P$ объединение всех треугольников, не входящих в построенные $P_i$, и пусть $\tilde{P} = \bigcup\{\tilde{T} : T \subset P\}$, где $\tilde{T}$, как и ранее, обозначает поднятие регулярного треугольника $T$ в $M_k$. Область $\tilde{P} \subset M_k$ связна (как и $P$) и ограничена кривыми $\bar{\gamma}_i$ — поднятиями кривых $\gamma_i$. Рассуждение, аналогичное приведенному выше, показывает, что $\varphi(M_k \setminus \tilde{P}) \subset \bigcup V(P_i)$, так что любая компонента связности $M_k \setminus \tilde{P}$ отображается при $\varphi$ в одну из окрестностей $V(P_i)$. Следовательно, каждая кривая $\gamma_i$ отделяет от $\tilde{P}$ некоторую область $\tilde{P}_i$, и при этом $\varphi(\tilde{P}_i) \subset V(P_i)$.

Предположим, что все компоненты $\partial M$ хорошо подняты (т. е. $m = n$). Построим новую аппроксимацию $\varphi' \colon M_k \to M$ следующим образом. В каждой области $\tilde{T} \subset \tilde{P}$ стянем каждую компоненту $\partial M_k$ в точку и полученное факторпространство гомеоморфно отобразим на $T$ (это возможно, так как $\tilde{T}$ гомеоморфна кругу с дырами). При этом на границе $\tilde{T}$ отображение должно быть обратным к правилу поднятия остова триангуляции. То же самое проделаем для каждой области $\tilde{P}_i$, имеющей нулевой род. Каждую из оставшихся областей $\tilde{P}_i$ отобразим на соответствующий диск $P_i$, стянув в одну точку все, кроме узкой полосы вдоль $\bar{\gamma}_i$. Полученное отображение удовлетворяет требованиям теоремы по построению, и при этом является $\varepsilon$-аппроксимацией, поскольку его отличие от $\varphi$ оценивается диаметрами окрестностей $V(P_i)$, т. е. не превосходит $\varepsilon/2$.

Для завершения доказательства достаточно проверить, что все компоненты края могут быть хорошо подняты. Это обеспечивается следующей леммой.

**Лемма.** *Пусть, в условиях теоремы, замкнутая кривая $\gamma$ параметризует компоненту $\partial M$. Тогда для любого $\delta > 0$ при достаточно большом $k$ можно построить ее $\delta$-поднятие, параметризующее компоненту $\partial M_k$.*

*Доказательство.* Будем обозначать через $\gamma$ как параметризацию, так и соответствующую компоненту $\partial M$. Предыдущие рассуждения показывают, что для любого $\varepsilon$ при больших $k$ в $M_k$ существует замкнутая кривая $\bar{\gamma}$, которая является $\varepsilon$-поднятием $\gamma$ и ограничивает область $U \subset M_k$, причем $\varphi_k(U)$ содержится в $\varepsilon$-окрестности $\gamma$ (в старых обозначениях, это кривая $\bar{\gamma}_i$ и область $\tilde{P}_i$ для подходящего $i > m$). Малым шевелением аппроксимации $\varphi_k$ можно добиться того, что $\varphi_k(U) \subset \gamma$, причем $\bar{\gamma}$ отображается на $\gamma$ гомеоморфно. Будем считать, что это шевеление уже проделано для всех больших $k$, причем $\varepsilon \to 0$ при $k \to \infty$, так что новые отображения $\varphi_k$ тоже образуют последовательность хаусдорфовых аппроксимаций.

Разобьем $\gamma$ на интервалы диаметра меньше $\delta/2$, после чего каждый интервал разобьем еще на $10g$ частей (считая $g > 1$). Пусть $x_1, \dots, x_n$ — участвующие в полученном разбиении точки (циклически упорядоченные по направлению обхода $\gamma$). Если $k$ достаточно велико, то погрешность аппроксимации $\varphi = \varphi_k$ мала по сравнению с расстояниями между точками $\{x_i\}$. Найдем в $M_k$ кривую $\bar{\gamma}$, ограничивающую область $U \subset M_k$ как указано выше, т. е. $\varphi(U) \subset \gamma$ и $\varphi \circ \bar{\gamma} = \gamma$. Пусть $\{\bar{x}_i\}$ — прообразы точек $\{x_i\}$ на $\bar{\gamma} \subset M_k$. В области $U \subset M_k$ должна присутствовать хотя бы одна компонента $\partial M_k$, отображение которой в $\gamma$ гомотопически нетривиально, иначе $\varphi(\partial U)$ — нетривиальный цикл в $H_1(\gamma) \cong H_1(S^1)$. Пусть $\tilde{\gamma}$ — такая компонента $\partial M_k$.

Зафиксируем на ней направление обхода так, чтобы кривая $\varphi \circ \tilde{\gamma}$ обходила цикл $\gamma$ с положительной кратностью. Это позволяет выбрать на $\tilde{\gamma}$ циклически упорядоченные точки $\{y_i\}$, являющиеся прообразами точек $\{x_i\}$ и такие, чтобы $\varphi$-образ каждого из интервалов $y_1y_2$, $y_2y_3$, $\ldots$, $y_ny_1$ кривой $\tilde{\gamma}$ был гомотопен пути, проходимому по $\gamma$ с положительным направлением обхода. Будем считать поднятием участка $\gamma$ между $x_i$ и $x_{i+1}$ участок $\tilde{\gamma}$ между $y_i$ и $y_{i+1}$ (при $i = n$ считаем $i + 1 = 1$). Чтобы оценить точность такого поднятия, проверим, что $\varphi$-образ каждого такого участка $\tilde{\gamma}$ накрывает не больше $4g$ точек $\{x_j\}$ с каждой стороны от $x_i$.

Пусть, например, $\varphi$-образ участка $\tilde{\gamma}$ между $y_n$ и $y_1$ содержит точки $x_1, \ldots, x_m$ (можно считать, что $m < n/2$). Найдем точки $y'_1, \ldots, y'_m$ с $\varphi(y'_i) = x_i$, расположенные на $\tilde{\gamma}$ между $y_n$ и $y_1$ в следующем порядке: $y_n \prec y'_1 \prec \cdots \prec y'_m \prec y_1$ (если это невозможно, то $\varphi \circ \tilde{\gamma}$ попадает в $x_m$, обходя $\gamma$ “в обратную сторону”, а тогда аналогичный набор точек можно найти над $x_{n-m+1}, \ldots, x_n$ вместо $x_1, \ldots, x_m$). Для каждого $i = 1, \ldots, m$ построим в $U \subset M_k$ треугольник с вершинами $\bar{x}_i$, $y_i$ и $y'_i$, стороны которого близки к кратчайшим и не пересекают друг друга и кривых $\bar{\gamma}$ и $\tilde{\gamma}$. Образ каждого треугольника целиком лежит вблизи соответствующей точки $x_i$, поэтому различные треугольники не пересекают друг друга. Пусть $\Gamma$ — граф (вложенный в $U$) с вершинами в точках $\bar{x}_i$, $y_i$, $y'_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, составленный из петель $\bar{\gamma}$ и $\tilde{\gamma}$ и всех построенных треугольников.

Заклеим все компоненты $\partial U$, кроме $\bar{\gamma}$ и $\tilde{\gamma}$. После этого граф $\Gamma$ лежит на некоторой поверхности $U'$ рода не выше $g$ с двумя компонентами края, входящими в $\Gamma$ как циклы $\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n$ и $y_1 \ldots y_n y'_1 \ldots y'_n$. Граф $\Gamma$ имеет $3m$ вершин и $6m$ ребер (из которых $3m$ лежат на краю поверхности), следовательно, он ограничивает по крайней мере $\chi(U') + 3m \geqslant 3m - 2g$ областей в $U'$ (здесь $\chi$ — эйлерова характеристика). Среди них не больше $m$ треугольных (поскольку всего в $\Gamma$ ровно $m$ трехзвенных циклов), значит, имеет место следующая оценка числа ребер $\Gamma$:

$$2 \cdot 6m - 3m \geqslant 3m + 4 \cdot (2m - 2g)$$

(в левой части $6m$ — общее число ребер, а $3m$ — количество ребер, к которым примыкает только одна область). Преобразуя это неравенство, получаем, что $m \leqslant 4g$, что и требовалось.

По выбору разбиения $\{x_i\}$ отсюда следует, что образ каждого интервала кривой $\tilde{\gamma}$ лежит на расстоянии не больше $\delta/2$ от соответствующего интервала $\gamma$. Следовательно, при указанном соответствии параметризаций $\tilde{\gamma}$ является $\delta$-поднятием $\gamma$. Это доказывает лемму, а тем самым и теорему 8.3. $\square$

Каждая аппроксимация $M_k \to M$, описанная в условии теоремы 8.3, представляет собой отображение факторизации, уничтожающее несколько ручек, пленок и дыр в $M_k$. Из существования таких отображений вытекает следующее ограничение на топологические типы пространств $M$ и $M_k$: при больших $k$ должно выполняться неравенство $g(M_k) \geqslant g(M)$ (причем если $M$ ориентируемо, а $M_k$ неориентируемо, то оно должно быть строгим), и число компонент $\partial M_k$ должно быть не меньше числа компонент $\partial M$. Кроме того, ориентируемые многообразия не могут сходиться к неориентируемому.

В случае, когда все $M_k$ гомеоморфны $M$, аппроксимации из теоремы 8.3 являются гомеоморфизмами, т. е. задают такое отождествление $M_k$ с $M$, при котором сходимость метрик превращается в равномерную.

Из теоремы 8.3 следует возможность замены условия на степени аппроксимаций в теореме 7.2 ограничением на топологию самих сходящихся пространств:

**Следствие 8.4.** *Пусть последовательность римановых двумерных многообразий* $(M_k, \rho_k)$ *сходится к финслерову двумерному многообразию* $(M, \rho)$ *и при этом род и число компонент края многообразий* $M_k$ *ограничены сверху. Тогда выполняется неравенство* (7-1)*:*

$$\mathrm{Vol}(M, \rho) \leqslant \liminf_{k\to\infty} \mathrm{Vol}(M_k, \rho_k)\,,$$

*причем в случае равенства* $\rho$ *является римановой метрикой класса* $C^0$*.*

*Доказательство.* Предположим, что доказываемое утверждение неверно. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что существует предел $v := \lim \mathrm{Vol}(M_k, \rho_k)$ и при этом $v < \mathrm{Vol}(M, \rho)$, или $v = \mathrm{Vol}(M, \rho)$, но метрика $\rho$ не является римановой. Построим последовательность хаусдорфовых аппроксимаций $\varphi_k \colon M_k \to M$ как в теореме 8.3. Переходя еще раз к подпоследовательности, можно сделать так, что точки $M$, в которые отображаются компоненты $\partial M_k$, образуют конечный набор сходящихся последовательностей. Удалив из $M$ окрестность этих последовательностей, можно получить многообразие $M' \subset M$ с объемом, сколь угодно близким к $\mathrm{Vol}(M, \rho)$. Хаусдорфовы аппроксимации $\varphi_k$ задают гомеоморфизмы между $\varphi_k^{-1}(M')$

и $M'$. Следовательно, по теореме 7.2,

$$\mathrm{Vol}(M',\rho) \leqslant \liminf \mathrm{Vol}(\varphi_k^{-1}(M'),\rho_k) \tag{8-1}$$

для любого такого $M'$. Правая часть этого неравенства не превосходит $v$, поэтому $v \geqslant \mathrm{Vol}(M,\rho)$.

Если метрика $\rho$ не является римановой, то можно выделить область $U \subset M$ с неримановой метрикой, отделенную от всех $\varphi_k(\partial M_k)$. Для этой области по теореме 7.2 имеем

$$\mathrm{Vol}(U,\rho) \leqslant \liminf \mathrm{Vol}(\varphi_k^{-1}(U),\rho_k) - \varepsilon$$

для некоторого $\varepsilon > 0$. Выберем $M' \supset U$, применим теорему 7.2 к $M' \setminus U$ и сложим результат с последним неравенством. Получим неравенство (8-1) с правой частью, уменьшенной на $\varepsilon$. Следовательно, $v \geqslant \mathrm{Vol}(M,\rho) + \varepsilon$. □

**B. Контрпримеры.**

В отличие от двумерного случая, в старших размерностях строение хаусдорфовых аппроксимаций не определяется топологическим типом сходящихся пространств, даже в случае, когда все они гомеоморфны сфере. А именно, удается построить примеры римановых метрик на сфере, которые сходятся к сфере (или даже к диску) так, что хаусдорфовы аппроксимации топологически эквивалентны проектированию сферы на гиперплоскость (и, следовательно, имеют нулевую гомологическую степень). Более того, объемы этих метрик можно сделать стремящимися к нулю (теорема 8.6). Сопоставление этого результата со следствием 7.3 показывает, что сходимость по Громову–Хаусдорфу метрик на одном и том же многообразии (в данном случае, на трехмерной сфере) может принципиально отличаться от равномерной сходимости.

Эти примеры будут построены в размерности 3. Взятием сферической надстройки из них можно получить примеры для всех старших размерностей. Следующее предложение содержит основную идею конструкции.

**Предложение 8.5.** *Пусть $D$ — трехмерный шар с дырами (каждая дыра диффеоморфна диску). Тогда любую риманову метрику $\rho$ на $D$ можно сколь угодно хорошо приблизить по Громову–Хаусдорфу римановыми метриками на сфере $S^3$, объемы которых не превосходят $2\,\mathrm{Vol}(D,\rho)$.*

*Доказательство.* Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Построим в $D$ гладкую несамопересекающуюся кривую с началом на краю $D$ и концом во внутренней точке $D$ так, чтобы она образовывала $\varepsilon$-сеть в $(D, \rho)$. Дополнительно к этому соединим край каждой дыры с “внешним” краем $D$ гладкой несамопересекающейся кривой. Проведенные кривые также не должны пересекаться друг с другом. Обозначим образованный ими граф через $\Gamma$. Пусть $U$ — трубчатая окрестность $\Gamma$ радиуса $\delta$, $\rho_\delta$ — индуцированная из $(D, \rho)$ внутренняя метрика области $D' = D \setminus U$. Для любых точек $x, y \in D \setminus \Gamma$ имеем $\rho_\delta(x, y) \to \rho(x, y)$ при $\delta \to 0$. Действительно, $x$ можно соединить с $y$ почти кратчайшей (в метрике $\rho$), которая не пересекает $\Gamma$, при малых $\delta$ эта почти кратчайшая не пересекает $U$, значит, $\rho_\delta(x, y)$ не превосходит ее длины. Поскольку $\rho_\delta$ уменьшается при уменьшении $\delta$, отсюда следует, что при достаточно малом $\delta$ всюду на $D'$ выполняется неравенство $|\rho_\delta - \rho| \leqslant \varepsilon$, т. е. вложение $(D', \rho_\delta) \to (D, \rho)$ является $\varepsilon$-аппроксимацией.

Пространство $D'$ гомеоморфно трехмерному диску $D^3$. Сгладим его край (вблизи вершин $\Gamma$), чтобы оно стало диффеоморфно $D^3$. Рассмотрим удвоение пространства $(D', \rho_\delta)$, т. е. пространство $M = D' \cup D''$, где $D''$ — изометричная копия $D'$ с тем же краем. Оно представляет собой трехмерную сферу с непрерывной римановой метрикой (которую потом можно сгладить). Расстояние между точкой $x' \in D'$ и симметричной ей точкой $x'' \in D''$ равно удвоенному расстоянию от $x'$ до края $D'$ и, следовательно, не превосходит $2\varepsilon$. Поэтому отображение $M \to D$, склеивающее симметричные точки и стандартно вкладывающее $D'$ в $D$, является $(3\varepsilon)$-аппроксимацией. $\square$

**Теорема 8.6.** *Для любого риманова многообразия $(M, \rho)$, диффеоморфного трехмерной сфере или трехмерному диску, существует последовательность римановых метрик $\rho_k$ на $S^3$, такая, что $(S^3, \rho_k)$ сходятся по Громову–Хаусдорфу к $(M, \rho)$, и при этом $\mathrm{Vol}(S^3, \rho_k) \to 0$.*

*Доказательство.* Для построения требуемой последовательности достаточно найти сколь угодно близкие к $(M, \rho)$ диффеоморфные сфере римановы многообразия произвольно малого объема. Случай, когда $M$ — сфера, сводится к случаю диска, поскольку сферу можно приблизить дисками, вырезая из нее малые окрестности точки. В диске, в свою очередь, содержатся сколь угодно хорошо приближающие его диффеоморфные образы куба. Поэтому достаточно приблизить римановыми сферами произвольно малого объема любую риманову метрику $\rho$ на стандартном кубе $I^3 \subset \mathbf{R}^3$. Из предложения 8.5 следует, что приближающие метрики малого объема можно строить не на сферах, а на шарах с дырами.

Пусть $\varepsilon$ — произвольное положительное число. Разобьем $I^3$ на мелкие ячейки тремя семействами плоскостей, параллельных граням, и обозначим через $X$ пересечение $I^3$ с объединением этих плоскостей. Разбиение должно быть настолько мелким, чтобы длина (в метрике $\rho$) любого прямолинейного отрезка, лежащего в одной ячейке, не превосходила $\varepsilon$. Таким образом, узлы решетки образуют $\varepsilon$-сеть как в $(I^3, \rho)$, так и во внутренней метрике $X$. Для каждых двух узлов решетки проведем соединяющую их внутри куба ломаную, длина которой (в метрике $\rho$) не более чем на $\varepsilon$-превосходит расстояние между концами. Через каждое звено каждой из этих ломаных проведем плоское сечение $I^3$ и обозначим через $Y$ объединение $X$ и всех сечений. Узлы исходной решетки образуют $(2\varepsilon)$-сеть в $(Y, \rho_Y)$, где $\rho_Y$ — внутренняя метрика $Y$. Отсюда следует, что вложение $(Y, \rho_Y) \to (I^3, \rho)$ является $(5\varepsilon)$-аппроксимацией. Действительно, любые две точки $x, y \in Y$ можно соединить кривой в $Y$ длины не более $\rho(x, y) + 5\varepsilon$, сначала соединив их с близкими узлами решетки, а потом соединив эти узлы имеющейся ломаной, приближающей расстояние с точностью до $\varepsilon$.

Построенное множество $Y \subset I^3$ представляет собой объединение плоских многоугольников, разбивающее $I^3$ на выпуклые многогранники. Достаточно малая окрестность $Y$ дает искомый пример шара с дырами, приближающего пространство $(I^3, \rho)$ с точностью до (произвольно малой) величины $10\varepsilon$. $\square$

## References


1. В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, М.: Наука, 1989.
2. И. К. Бабенко, *Асимптотический объем торов и геометрия выпуклых тел*, Мат. Заметки **44** (1988), no. 2, 177–190.
3. И. К. Бабенко, *Замкнутые геодезические, асимптотический объем и характеристики группового роста*, Изв. АН СССР Сер. Мат. **52** (1988), 675–711.
4. И. К. Бабенко, *Объемная жесткость двумерных многообразий*, Мат. Заметки **48** (1990), no. 1, 10–14.
5. Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер, *Геометрические неравенства*, Л.: Наука, 1980.
6. А. Дольд, *Лекции по алгебраической топологии*, М.: Мир, 1976.
7. Г. Федерер, *Геометрическая теория меры*, М.: Наука, 1987.
8. П. Халмош, *Лекции по эргодической теории*, М.: Иностр. Лит., 1959.
9. A. Avez, *Variétés riemanniennes sans points focaux*, C. R. Acad. Sci. Paris **270** (1970), 188–191.
10. V. Bangert, *Minimal geodesics*, Ergod. Th. and Dynam. Sys. **10** (1989), 263–286.

11. V. Bangert, *Geodesic rays, Busemann functions and monotone twist maps*, Calc. Var. **2** (1994), 49–63.
12. A. Besicovitch, *On two problems of Loewner*, J. London Math. Soc. **27** (1952), 141–144.
13. G. Besson, G. Courtois, S. Gallot, *Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative*, C. R. Acad. Sci. Paris **319** (1994), 81–84.
14. G. Besson, G. Courtois, S. Gallot, *Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative*, preprint, 1994.
15. D. Burago, *Periodic metrics*, Advances in Soviet Math. **9** (1992), 205–206.
16. D. Burago, *Periodic metrics*, in "Seminar on Dynamical Systems", Progress in Nonlinear Differential Equations (H. Brezis, ed.), vol. 12, Birkhauser, 1994, pp. 90–96.
17. D. Burago, S. Ivanov, *Riemannian tori without conjugate points are flat*, Geom. Func. Anal. **4** (1994), no. 3, 259–269.
18. D. Burago, S. Ivanov, *On asymptotic volume of tori*, Geom. Func. Anal. **5** (1995), no. 5, 800–808.
19. H. Busemann, *Gometry of geodesics*, Acad. Press, New York, 1955.
20. H. Busemann, *Intrinsic area*, Ann. Math. **48** (1947), no. 2, 205–213.
21. C. Caratheodory, *Variationsrechnung und partielle Differentialgleichung erster Ordnung*, B. G. Teubner, Leipzig, Berlin, 1935.
22. C. Croke, A. Fathi, *An inequality between energy and intersections*, Bull. London Math. Soc. **22** (1990), 489–494.
23. C. Croke, B. Kleiner, *On tori without conjugate points*, preprint, 1992.
24. C. Croke, V. Shroeder, *The fundamental group of compact manifold without conjugate points*, Comment. Math. Helv. **61** (1986), 161–175.
25. W. Derrick, *A weighted volume-diameter inequality for $n$-cube*, J. Math. Mech. **18** (1968), no. 5, 453–472.
26. W. Derrick, *A volume-diameter inequality for $n$-cube*, Analysi Math. **22** (1969), 1–36.
27. L. Green, *A theorem of E. Hopf*, Mich. Math. J. **5** (1958), 31–34.
28. M. Gromov, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes* (red. J. Lafontaine et P. Pansu), CEDIC, Paris, 1981.
29. M. Gromov, *Filling Riemannian manifolds*, J. Diff. Geom. **18** (1983), 1–147.
30. K. Grove, P. Petersen, *Bounding homotopy types by geometry*, Ann. Math. **128** (1988), 195–206.
31. G. Hedlund, *Geodesics on a two-dimensional Riemannian manifold with periodic coefficients*, Ann. Math. **33** (1932), 719–739.
32. E. Hopf, *Closed surfaces without conjugate points*, Proc. Nat. Acad. Sci **34** (1948), 47–51.
33. F. John, *Extremum problems with inequalities as susidiary conditions*, in Studies and Essays, Courant Anniversary Volume (K. Friedrichs, O. Neugebauer, J. J. Stoker, eds.), John Wiley & Sons, New York, 1948, pp. 187–204.
34. A. Knauf, *Closed orbits and converse KAM theory*, Nonlinearity **3** (1990), 961–973.
35. L. Loomis, H. Whitney, *An inequality related to the isoperimetric inequality*, Bull. AMS **55** (1949), no. 10, 961–962.

36. J. Mather, *Differentiability of the minimal average action as a function of the rotation number*, Bol. Soc. Bras. Mat. **21** (1990), 59–70.
37. J. Mather, *Action minimizing invariant measures for positive definite Lagrangian systems*, Math. Z. **207** (1991), no. 2, 169–207.
38. J. Mather, *Variational construction of connecting orbits*, Ann. Inst. Fourier **43** (1993), 1349–1386.
39. P. Petersen, *A finiteness theorem for metric spaces*, J. Diff. Geom. **31** (1990), 387–395.
40. W. Vannini, *A note on manifolds without conjugate points of cohomogeneity two*, Indiana Univ. Math. J. **38** (1989), no. 1, 137–140.