Содержание

Лемма Лебега

Теорема

Пусть X — компактное метрическое пространство, $\{U_i\}$ — его открытое покрытие. Тогда существует такое $r > 0$, что любой шар радиуса r целиком содержится в одном из U_i.

Определение

Число r называется числом Лебега данного покрытия.

Доказательство леммы Лебега

Для каждой точки $x \in X$ есть такое $r_x > 0$, что шар $B_{r_x}(x)$ содержится в одном из U_i.

Выберем конечное покрытие из шаров половинного радиуса: $\{B_{r_x/2}(x)\}_{x \in X}$.

В качестве числа Лебега r подходит минимальный из радиусов выбранных шаров.

Действительно, любая точка $y \in X$ лежит в одном из шаров $B_{r_x/2}(x)$, выбранных в подпокрытие.

Так как $r \leq r_x/2$, из неравенства треугольника следует, что

$$B_r(y) \subset B_{r_x/2}(y) \subset B_{r_x}(x),$$

а $B_{r_x}(x)$ содержится в одном из U_i.

Лемма Лебега для отображений

Следствие

Пусть X *— компактное метрическое пространство,*
Y *— топологическое пространство,*
$f : X \to Y$ *непрерывно,*
$\{U_i\}$ *— открытое покрытие* Y*.*

Тогда $\exists r > 0$: $\forall x \in X \quad f(B_r(x))$ *содержится в одном из* U_i*.*

Доказательство.

Применим теорему к покрытию $\{f^{-1}(U_i)\}$. □

Равномерная непрерывность

Здесь X, Y — метрические пространства.

Определение

Отображение $f\colon X \to Y$ равномерно непрерывно, если

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0\colon \;\; \forall x, x' \in X \quad d(x, x') < \delta \implies d(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

Теорема

Если X компактно, то любое непрерывное $f\colon X \to Y$ равномерно непрерывно.

Доказательство.

Применим лемму Лебега (вариант с отображением) к f и покрытию Y шарами радиуса $\delta/2$. $\square$

Содержание

Теорема Тихонова о компактности

Теорема (без доказательства)

Пусть $\{X_i\}$ — произвольное семейство компактных топологических пространств.
Тогда тихоновское произведение $\prod_{i \in I} X_i$ тоже компактно.

Локальная компактность

X — топологическое пространство.

Определение

X локально компактно, если для любой точки $x \in X$ существует окрестность $U \ni x$, замыкание которой $\mathrm{Cl}(U)$ компактно.

Пример

$\mathbb{R}^n$ локально компактно.

Упражнение

Если X локально компактно и хаусдорфово, то X регулярно.

Одноточечная компактификация

Пусть X — хаусдорфово топологическое пространство.

Определение

Одноточечная компактификация X — топологическое пространство $\widehat{X}$, которое строится так:

- Как множество, $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$, где ∞ — точка, не принадлежащая X.
- Множество $U \subset \widehat{X}$, не содержащее ∞, открыто тогда и только тогда, когда оно открыто в X.
- Множество $U \subset \widehat{X}$, содержащее ∞, открыто тогда и только тогда, когда $X \setminus U$ компактно (как подпространство X).

Другими словами: открытые множества $\widehat{X}$ — это открытые в X и дополнения компактных подмножеств X.

Упражнения

- Определение корректно (указанные открытые множества действительно образуют топологию на $X \cup \{\infty\}$.
- $\widehat{X}$ компактно.
- $\widehat{X}$ хаусдорфово $\iff$ X локально компактно.
- $\widehat{\mathbb{R}} \simeq S^1$.
- $\widehat{\mathbb{R}^n} \simeq S^n$.

Содержание

Предел последовательности

X — топологическое пространство.

Определение

Точка $x \in X$ — предел последовательности $\{x_n\} \subset X$, если для любой окрестности $U \ni \mathbb{N}$ существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что $x_n \in U$ для всех $n > N$.

Синонимы: x_n стремится к x, x_n сходится к x.
Последовательность сходится, если имеет хотя бы один предел.

Обозначения: $x_n \to x, \quad x = \lim x_n$.

Свойства пределов

- Постоянная последовательность $x_n = x$ сходится к x.
- Если $x_n \to x$, то любая подпоследовательность тоже сходится к x.
- Если X хаусдорфово, то предел единственен.
- В общем случае может быть больше одного предела. Например, в антидискретном пространстве любая последовательность сходится к любой точке.
- В метрическом пространстве $X = (X, d)$ $x_n \to x \iff d(x, x_n) \to 0$

Пределы и замкнутость

- Замкнутое множество содержит все пределы содержащихся в нем последовательностей:
  Если $A \subset X$ замкнуто, $\{x_n\} \subset A$, $x_n \to x$, то $x \in A$.

  Доказательство: Подставим $U = X \setminus A$ в определение предела.
- В метрическом пространстве X верно и обратное: если $A \subset X$ содержит все пределы содержащихся в нем последовательностей, то A замкнуто (упражнение)
- То же верно в пространстве с 1АС (упражнение)

Содержание

Определение полного пространства

$X = (X, d)$ — метрическое пространство.

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна, если
$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n, k > N \;\; d(x_n, x_k) < \varepsilon$.

Эквивалентно: $d(x_n, x_k) \to 0$ при $n, k \to \infty$.

Синонимы: $\{x_n\}$ — последовательность Коши,
$\{x_n\}$ сходится в себе.

Определение

X полно, если любая фундаментальная последовательность имеет предел.

Свойства фундаментальных последовательностей

- Если последовательность сходится, то она фундаментальна.
- Фундаментальная последовательность ограничена.
- Если последовательность фундаментальна и имеет сходящуюся подпоследовательность, то она сходится.

Примеры

- $\mathbb{R}$ полно
  Было в анализе: «критерий сходимости Коши».
- $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ не полно.
  Доказательство: пусть $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$.
  $\{x_n\}$ фундаментальна, но не имеет предела в $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- $[0, 1]$ полно.
- $(0, 1)$ не полно.

Замечание

Полнота — не топологическое свойство.
Например, $\mathbb{R} \simeq (0, 1)$, $\mathbb{R}$ полно, $(0, 1)$ нет.

$\mathbb{R}^n$ полно

Теорема

$\mathbb{R}^n$ полно.

Доказательство.

Пусть $\{x_k\}$ — последовательность в $\mathbb{R}^n$, $x_k = (x_k^1, \dots, x_k^n)$.
Пусть $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ фундаментальна
$\implies$ координатные последовательности $x_k^1, \dots, x_k^n$ фундаментальны
$\implies$ они имеют пределы $x^1, \dots, x^n$
$\implies$ $x_k \to x := (x^1, \dots, x^n)$. $\square$

Замкнутое подмножество полного — полно

Теорема

Если X полно и $Y \subset X$ замкнуто, то Y полно.

Доказательство.

Фундаментальность последовательности не зависит от того, в каком пространстве она рассматривается.
$\{x_n\} \subset Y$ фундаментальна
$\implies$ она имеет предел $x \in X$ (так как X полно)
$\implies$ $x \in Y$ (так как Y замкнуто). □

Упражнение

1. Если множество в метрическом пространстве полно, то оно замкнуто.
2. Множество в $\mathbb{R}^n$ полно $\iff$ оно замкнуто.

Содержание

Теорема о вложенных шарах

Теорема («о вложенных шарах»)

Пусть

- X — *полное метрическое пространство.*
- $A_1, A_2, A_3, \ldots$ — *непустые замкнутые множества в* X
- $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$
- $\operatorname{diam}(A_n) \to 0.$

Тогда $\bigcap A_i \neq \emptyset.$

Доказательство

Выберем в каждом A_n точку x_n.

$\operatorname{diam}(A_n) \to 0 \implies \{x_n\}$ фундаментальна
$\implies x_n$ имеет предел $x \in X$ (так как X полно)

$x_n \in A_k$ при всех $n \geq k \implies x \in A_k$.

$\implies x \in \bigcap A_i$

$\implies \bigcap A_i \neq \emptyset$ $\square$

Содержание

Нигде не плотные множества

Здесь X — топологическое пространство (временно).

Определение

Множество $A \subset X$ нигде не плотно, если $\operatorname{Int} \operatorname{Cl} A = \emptyset$.

Переформулировки

A нигде не плотно $\iff$ $\operatorname{Cl}(A)$ нигде не плотно $\iff$

- $X \setminus A$ содержит открытое всюду плотное множество
- любое открытое $U \subset X$ содержит открытое $V \subset U$ такое, что $V \cap A = \emptyset$.

Примеры

1. Пусть $f = f(x_1, \dots, x_n)$ — ненулевой многочлен от n переменных (над $\mathbb{R}$). Тогда $f^{-1}(0)$ нигде не плотно в $\mathbb{R}^n$.
2. Канторово множество нигде не плотно в $\mathbb{R}$.

Теорема Бэра

Теорема

Полное метрическое пространство нельзя покрыть счётным набором нигде не плотных множеств.

Следствие

Полное метрическое пространство без изолированных точек несчётно.

Доказательство следствия.

Пусть X счётно. Покроем его точками.
Если точка не изолированная, то она нигде не плотна. □

Доказательство теоремы Бэра

Пусть $A_1, A_2, \dots$ — нигде не плотные множества.

Пусть B_0 — любой замкнутый шар, $B_0 = \overline{B}_{r_0}(x_0)$.

A_1 нигде не плотно $\implies$ открытый шар $B_0(x_0)$ содержит открытое множество U_1 т.ч. $U_1 \cap A_1 = \emptyset$.

U_1 содержит открытый шар, а он содержит замкнутый шар $B_1 = \overline{B}_{r_1}(x_1)$, $r_1 \le 1$.

Мы построили замкнутый шар $B_1 \subset B_0$, $B_1 \cap A_1 = \emptyset$.
Аналогично строим последовательность $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \dots$ вложенных замкнутых шаров с радиусами $r_i \le \frac{1}{i}$,
т.ч. $B_i \cap A_i = \emptyset$.

По теореме о вложенных шарах существует точка $x \in \bigcap B_i$.
Тогда $x \notin \bigcup A_i \implies \bigcup A_i \ne X$.

Усиленная формулировка

Аналогично доказывается такое усиление теоремы Бэра:

Упражнение

Пусть X — полное метрическое пространство,
A — объединение счётного набора нигде не плотных множеств.
Тогда $\operatorname{Int} A = \emptyset$.

Информация: пополнение

Определение

Пусть X — метрическое пространство.

Пополнение X — такое метрическое пространство $\overline{X}$, что

- $\overline{X}$ полно
- $X \subset \overline{X}$ как подпространство (т.е. расстояния те же самые)
- X всюду плотно в $\overline{X}$.

Теорема (без док-ва)

У любого метрического пространства есть пополнение.

Содержание

Определение: секвенциальная компактность

Определение

X **секвенциально компактно**, если у любой последовательности существует сходящаяся подпоследовательность.

Скоро докажем

Для метрических пространств
компактность $\iff$ секвенциальная компактность.

В компактном пространстве бесконечное множество имеет предельную точку

Теорема

Пусть X компактно, $S \subset X$ — бесконечное множество. Тогда существует такая точка $x \in X$, что любая окрестность $U \ni x$ содержит бесконечно много точек S

Доказательство.

От противного: пусть у каждой точки x есть окрестность U_x такая, что $|U_x \cap S| < \infty$.

Выберем из $\{U_x\}$ конечное подпокрытие $U_{x_1}, \dots, U_{x_n}$.

$S = (S \cap U_{x_1}) \cup \dots \cup (S \cap U_{x_n})$,

все $U \cap U_{x_i}$ конечны $\implies$ S конечно. Противоречие. $\square$