Содержание

1 Компактность метрических пространств
- Секвенциальная компактность
- Вполне ограниченные пространства
- Компактность и счётная база
- Обобщения

2 Факторизация
- Определение и примеры

Напоминание из прошлой лекции

Определение

X секвенциально компактно, если у любой последовательности существует сходящаяся подпоследовательность.

Скоро докажем

Для метрических пространств компактность $\iff$ секвенциальная компактность.

Теорема

Пусть X компактно, $S \subset X$ — бесконечное множество. Тогда существует такая точка $x \in X$, что любая окрестность $U \ni x$ содержит бесконечно много точек S

Компактность и метрика $\Longrightarrow$ секвенциальная компактность

Теорема

Если X компактное метрическое пространство, то X секвенциально компактно.

Доказательство

Пусть $\{x_n\}$ — последовательность в X. Докажем, что есть сходящаяся подпоследовательность.

1 случай: в $\{x_n\}$ конечное число различных точек.
Тогда можно выбрать постоянную подпоследовательность.

2 случай: множество $\{x_n\}$ бесконечно.
Тогда по предыдущей теореме существует точка $x \in X$, в любой окрестности которой бесконечно много членов последовательности.

Строим подпоследовательность $y_k = x_{n_k}$ так, что $n_k > n_{k-1}$ и $y_k \in B_{1/k}(x)$ для $k = 1, 2, \dots$.
Тогда $y_k \to x$.

Обобщение: компактность и 1AC $\Longrightarrow$ секвенциальная компактность

Здесь X — топологическое пространство.

Теорема

Если X компактно и удовлетворяет 1AC, то X секвенциально компактно.

Доказательство.

Рассуждаем так же, кроме последнего шага: почему x — предел подпоследовательности.

Пусть $U_1, U_2, U_3, \dots$ — счётная база в точке x. Построим вложенные окрестности $V_1 \supset V_2 \supset U_3 \supset \dots$

$$V_k = U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_k$$

Используем V_k вместо шаров $B_{1/k}(x)$. $\square$

Содержание

1. Компактность метрических пространств
   - Секвенциальная компактность
   - Вполне ограниченные пространства
   - Компактность и счётная база
   - Обобщения
2. Факторизация
   - Определение и примеры

Вполне ограниченные пространства

$X = (X, d)$ — метрическое пространство.

Определение

Пусть $\varepsilon > 0$. Множество $S \subset X$ — ε-сеть в X, если $\forall x \in X \quad \exists s \in S : d(x, s) < \varepsilon$.

Определение

X вполне ограничено, если для любого $\varepsilon > 0$ существует **конечная** ε-сеть.

Упражнение

Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ вполне ограничено $\iff$ ограничено.

Наша цель

Три определения компактности

Для метрического пространства X три свойства равносильны:

1. X компактно
2. X секвенциально компактно
3. X — полное и вполне ограниченное

Уже доказано: $1 \implies 2$

Компактность $\Longrightarrow$ вполне ограниченность

Теорема

Если метрическое пространство X компактно, то оно вполне ограничено.

Доказательство.

Пусть $\varepsilon > 0$.
Выберем конечное подпокрытие из всех шаров радиуса ε.
Центры выбранных шаров — ε-сеть. $\square$

Секвенциальная компактность $\Longrightarrow$ вполне ограниченность

Теорема

Если метрическое пространство X секвенциально компактно, то оно вполне ограничено.

Доказательство.

От противного: пусть для $\varepsilon > 0$ нет конечной ε-сети.
Построим последовательность $x_1, x_2, \ldots$:
x_1 — любая точка,
x_2 — такая, что $d(x_1, x_2) \geq \varepsilon$
...
x_n — такая, что $d(x_i, x_n) \geq \varepsilon$ для $i = 1, 2, \ldots, n-1$
(если такой нет, то $\{x_1, \ldots, x_{n-1}$ — ε-сеть).

Такая $\{x_n\}$ не может иметь сходящейся подпоследовательности (все попарные расстояния $\geq \varepsilon$). $\square$

Секвенциальная компактность $\implies$ полнота

Теорема

Секвенциально компактное метрическое пространство полно.

Доказательство.

Пусть $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность.
По секвенциальной компактности у нее есть сходящаяся подпоследовательность.
$\{x_n\}$ фундаментальна $\implies$ она сходится к тому же пределу. $\square$

Мы доказали, что из 2-го определения компактности следует 3-е ($1 \implies 2 \implies 3$).

Полнота и вполне ограниченность $\implies$ компактность

Теорема

Если X полно и вполне ограничено, то X компактно.

Эта теорема завершает доказательство эквивалентности трех определений компактности для метрических пространств.
$1 \implies 2 \implies 3 \implies 1$

Доказательство

От противного. Пусть $\{U_i\}$ — открытое покрытие, у которого нет конечного подпокрытия.

Пусть S_1 — конечная 1-сеть. Рассмотрим замкнутые шары радиуса 1 с центрами в S_1. Они покрывают $X \implies$ хотя бы один из них не покрывается конечным числом U_i.
Пусть A_1 — такой шар.

Пусть S_2 — конечная $\frac{1}{2}$-сеть. Рассмотрим пересечения

$$A_1 \cap \overline{B}_{1/2}(x), \quad s \in S_2.$$

Они покрывают $A_1 \implies$ одно из них не покрывается конечным набором U_i.
Обозначим его A_2

(окончание следует)

Доказательство — окончание

Аналогично по индукции строим замкнутые множества
$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$
A_n не покрывается конечным поднабором $\{U_i\}$

$A_n = A_{n-1} \cap \overline{B}_{1/n}(s)$, где $s \in S_n$, S_n — конечная $\frac{1}{n}$-сеть

$\implies$ $\operatorname{diam} A_n \le \frac{2}{n} \to 0$

$\implies$ по теореме о вложенных шарах $\exists x \in \bigcap A_n$

x лежит в некотором $U_i \implies \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset U_i$

$\implies$ при достаточно большом n, $A_n \subset U_i$
$\implies$ A_n покрывается одним U_i
$\implies$ противоречие (A_n не покрывается конечным набором)

Содержание

1. Компактность метрических пространств
   - Секвенциальная компактность
   - Вполне ограниченные пространства
   - Компактность и счётная база
   - Обобщения
2. Факторизация
   - Определение и примеры

Вполне ограниченность $\Longrightarrow$ счётная база (2AC)

Теорема

Если X вполне ограничено, то оно имеет счётную базу топологии.

Доказательство.

Объединим конечные ε-сети для $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$.
Получим счётное всюду плотное множество.
$\Longrightarrow$ X сепарабельно
$\Longrightarrow$ X имеет счётную базу (импликация для метрических пространств). $\square$

Метризуемый компакт имеет счётную базу

Теорема

Если X метризуемо и компактно, то X имеет счётную базу топологии.

Доказательство.

Из предыдущих теорем:
компактность и метрика $\implies$ вполне ограниченность
вполне ограниченность $\implies$ счётная база $\square$

Содержание

1. Компактность метрических пространств
   - Секвенциальная компактность
   - Вполне ограниченные пространства
   - Компактность и счётная база
   - Обобщения
2. Факторизация
   - Определение и примеры

Секвенциальная компактность и 2AC $\Longrightarrow$ компактность

Теорема

Пусть X имеет счётную базу топологии.
Тогда для X компактность $\iff$ секвенциальная компактность

Доказательство.

$\Longrightarrow$: было (так как 2AC $\Longrightarrow$ 1AC).

$\Longleftarrow$: Рассмотрим открытое покрытие.
По теореме Линделёфа, из него можно выбрать счётное подпокрытие: $U_1, U_2, U_3, \dots$
Осталось выбрать конечное из счётного.
Продолжение следует □

Продолжение: конечное подпокрытие из счётного

От противного.
Рассмотрим конечные поднаборы $U_1, U_2, \ldots, U_n$.
Ни один из них не покрывает $X \implies$
для каждого $n \in \mathbb{N}$ можно выбрать $x_n \in X \setminus (U_1 \cup \cdots \cup U_n)$

Выберем из $\{x_n\}$ сходящуюся подпоследовательность $y_k = x_{n_k}$
(по секвенциальной компактности).
Пусть $y_k \to y$.

y не может принадлежать никакому U_n (так как в каждом U_n
только конечное число членов последовательности)
Противоречие.

Содержание

1. Компактность метрических пространств
   - Секвенциальная компактность
   - Вполне ограниченные пространства
   - Компактность и счётная база
   - Обобщения
2. Факторизация
   - Определение и примеры

Определение факторпространства

Определение

Пусть X — топологическое пространство,
$\sim$ — отношение эквивалентности на нем
(как на множестве точек).

Факторпространство $X/\!\sim$ — множество классов эквивалентности с такой топологией:
множество U открыто в $X/\!\sim$ $\iff$ объединение всех его элементов открыто в X.

Эта топология называется фактортопологией.

Пояснение

Элементы факторпространтсва $X/\!\sim$ — классы эквивалентности — подмножества X. Их можно объединять.

Каноническая проекция на факторпространство

Здесь и далее X — топологическое пространство,
$\sim$ — отношение эквивалентности на X.

Определение

Каноническая проекция X на $X/\sim$
или отображение факторизации — это отображение

$$p\colon X \to X/\sim$$

сопоставляющее каждой точке $x \in X$ ее класс эквивалентности:

$$p(x) = [x] := \{y \in X : y \sim x\}$$

Каноническая проекция непрерывна

Теорема

Каноническая проекция $p\colon X \to X/{\sim}$ *непрерывна.*

Доказательство.

По определению. $\square$

Переформулировка определения

$A \subset X/{\sim}$ открыто $\iff$ $p^{-1}(A)$ открыто в X.

Замечание

Фактортопология — наибольшая топология, для которой p непрерывно.

Свойства, наследуемые факторпространствами

Теорема

Следующие свойства наследуются факторпространствами (если X обладает свйоством, то $X/\sim$ тоже):

- *Связность*
- *Линейная связность*
- *Компактность*
- *Сепарабельность*

Доказательство.

Все эти свойства сохраняются при непрерывных отображениях (образ связного связен и т.д.)
Факторпространство — образ канонической проекции p. $\square$

Стягивание множества в точку

Определение

Пусть $A \subset X$. Введем отношение эквивалентности $\sim$ на X:

$$x \sim y \iff x = y \text{ или } x \in A \text{ и } y \in A$$

(классы эквивалентности — A и одноточечные).

Факторпространство обозначается X/A.
Эта операция называется стягиванием A в точку.

Пример

$D^n/S^{n-1} \simeq S^n$ (докажем позже).

Несвязное объединение

Определение

Пусть X, Y — топологические пространства.
Их несвязное объединение — это дизъюнктное объединение $X \sqcup Y$ с такой топологией:

$$A \text{ открыто в } X \sqcup Y \iff A \cap X \text{ открыто в } X \text{ и } A \cap Y \text{ открыто в } Y$$

Аналогично для набора топологических пространств $\{X_i\}_{i \in I}$ определяется их несвязное объединение $\bigsqcup_{i \in I} X_i$

Упражнение

Все компоненты связности X открыты $\iff$ X — несвязное объединение своих компонент связности

Приклеивание по отображению

Пусть X, Y — топологические пространства, $A \subset X$,
$f: A \to Y$ — непрерывное отображение.
Введем отношение эквивалентности $\sim$ на $X \sqcup Y$ — наименьшее отношение эквивалентности такое, что

$$a \sim f(a) \text{ для всех } a \in A$$

Факторпространство $(X \sqcup Y)/\sim$ обозначается $X \sqcup_f Y$.
Операция называется приклеиванием X к Y по f.

Пример

Пусть x_0 и y_0 — отмеченные точки в X и Y,
$A = \{x_0\}$, $f(x_0) = y_0$.
Результат склеивания — букет (X, x_0) и (Y, y_0).